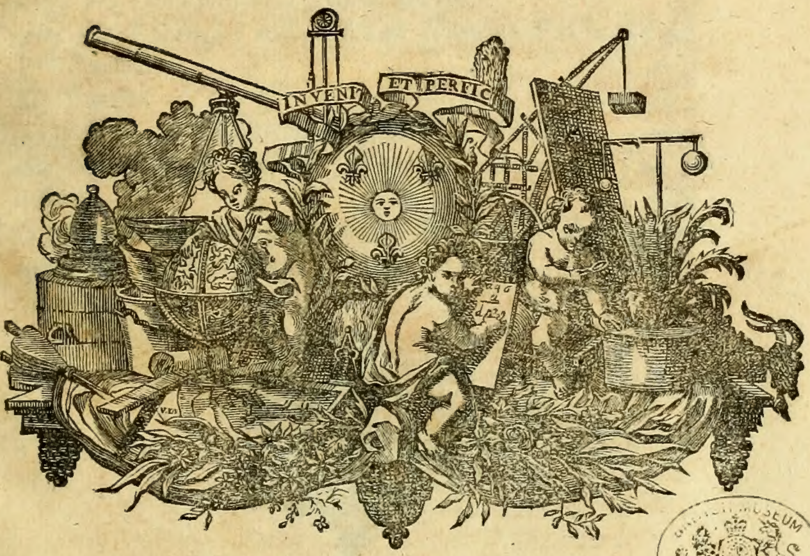
S 804. B7

MEMOIRES
DE
L'ACADEMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

Depuis 1666. jusqu'à 1699.

TOME V.



BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

A PARIS,

PAR LA COMPAGNIE DES LIBRAIRES.

M. DCC. XXIX.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

TABLE
DES MATIERES
CONTENUËS DANS CE VOLUME.

METHODE pour trouver la Solution des Problèmes par les Exclusions. Par M. Frenicle de Bessy. Pag. 1

Abregé des Combinaisons. Par le même. 87

Traité des Triangles rectangles en Nombre. Par le même.

I^ere Partie. 127

II^e Partie. 181

Des Quarrez ou Tables Magiques. Par le même. 209

Table Generale des Quarrez Magiques de quatre. Par le même. 303

Resolution des quatre principaux Problèmes d'Architecture. Par M. Blondel. 355

LES divers Ouvrages de M. FRENICLE que l'on a rassemblé dans ce Volume ont été tirez du Volume *infolio* imprimé au Louvre en 1693. par les soins de M. DE LA HIRE. Nous avons rapporté dans l'Histoire la maniere dont ces differens Traitez vinrent entre les mains de M. DE LA HIRE, & ce qui l'engagea à les publier, ainsi qu'il le dit lui-même dans une Préface qu'il mit à la tête du Recueil qu'il en fit.

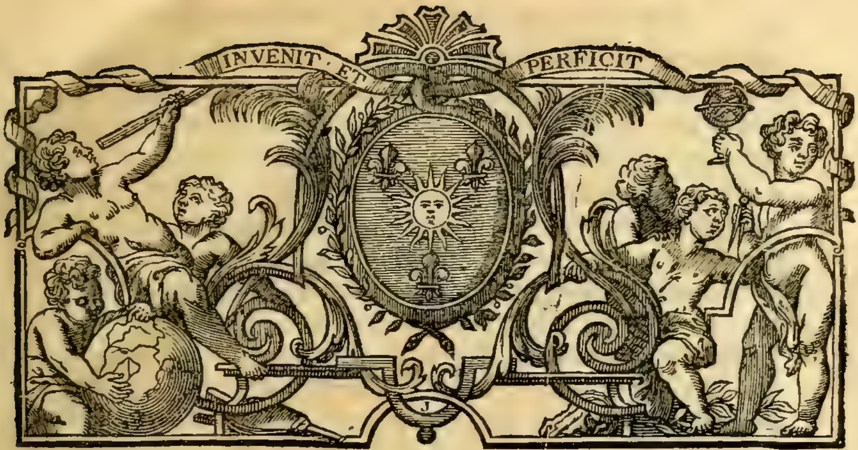
La premiere Partie du *Traité des Triangles rectangles en Nombres*, avoit été imprimée dès l'année 1676. *in douze*, & réimprimée avec la seconde en 1677. au Louvre, avec les *Problêmes d'Architecture* de M. BLONDEL, & quelques autres Ouvrages de MM. de l'Académie dont on fit un Recueil *infolio forme d'Atlas*.

A PARIS,

Chez
- GABRIEL MARTIN, ruë S. Jacques, à l'Etoile.
- FRANÇOIS MONTALANT, Quay des Auguſtins.
- JEAN-BAPTISTE COIGNARD Fils, Imprimeur du Roy & de l'Académie Françoiſe, ruë S. Jacques.
- HIPPOLYTE-LOÜIS GUERIN, ruë S. Jacques, à Saint Thomas d'Aquin, vis-à-vis Saint Yves.

METHODE
POUR LA SOLUTION DES PROBLÊMES PAR LES EXCLUSIONS.

Par M. FRENICLE.



METHODE
POUR TROUVER
LA SOLUTION
DES PROBLÊMES
PAR LES EXCLUSIONS.

QUOIQUE les queſtions doivent être éxaminées diverſement ſuivant la diverſité de leur ſujet, on peut néanmoins y obſerver quelques regles qui conviennent à toutes en général, & qui peuvent en faciliter la recherche.

On doit toujours connoître quelque proprieté de ce qui eſt requis dans la queſtion ; car ſans cela il ſeroit impoſſible de rien trouver, ſi ce n'eſt que le problême ou la queſtion propoſée ſe donne à connoître par elle-même. Comme ſi l'on demandoit quelque choſe touchant les

nombres qui ſont la ſomme de deux quarrez ou des côtez d'un triangle : pourvû qu'on ſçache le moyen de faire des quarrez & des triangles, il ſera facile de ſçavoir leur ſomme ſans qu'il ſoit beſoin d'avoir aucune autre proprieté deſdites ſommes. Deſorte qu'il ſuffit de connoître ce qui eſt propoſé ou par ſoi-même, comme les ſommes ſuſdites, ou par quelque proprieté. Comme ſi l'on demandoit quelque particularité touchant les hypotenuſes des triangles rectangles dont les côtez ſont des nombres entiers : car pour y parvenir il ſera néceſſaire d'avoir quelque proprieté deſdites hypotenuſes par le moyen deſquelles on les puiſſe avoir toutes.

Que ſi l'on connoît pluſieurs proprietez de la choſe propoſée, on ſe ſervira de celle qui conduit plus facilement à la queſtion, & par de moindres nombres. Car il faut remarquer que le principal but & ſubtilité de cette méthode, conſiſte principalement à racourcir le chemin, & à choiſir de certains détours qui en ôtent la longueur & les plus grandes difficultez.

Mais parce qu'ordinairement chaque queſtion ſe traite diverſement ſuivant les differentes proprietez dont il ſe faut ſervir, il ſeroit impoſſible de donner des regles pour tous les divers cas qu'on pourroit rencontrer. C'eſt pourquoi l'on a jugé plus à propos de donner des exemples qui ſeront plus utiles pour faire entendre cette méthode, après avoir expliqué quelques regles générales qu'on peut obſerver pour parvenir à la ſolution du problême.

1°. Si l'on connoît en général ce qui eſt propoſé, mais non pas le particulier qu'on propoſe, il faut par le moyen de pluſieurs particuliers connus trouver quelque regle qui conviennent à tous ; & par ſon moyen on trouvera ce qui eſt requis.

Par exemple, ſi l'on demande quels ſont les quarrez dont la ſomme eſt l'hypotenuſe du triangle 57, 176, 185.

Puiſqu'on ſçait en général le moyen de faire des trian-

gles, il en faut conſtruire pluſieurs dont on ſçaura les quarrez, comme le triangle 3, 4, 5, qui a 4 & 1 pour ſes quarrez; 5, 12, 13, qui a 9 & 4; 8, 15, 17, qui a 16 & 1 : ou bien même on ſe contentera au commencement de quelqu'un de ces triangles, & puis l'on cherchera quelque voye par laquelle avec 3, 4, 5, par exemple, on puiſſe trouver 4 & 1, & l'ayant trouvée l'on regardera ſi elle convient aux autres triangles, & par ce moyen l'on trouvera ce qui eſt requis.

Ainſi ayant trouvé que prenant la ſomme & la difference des deux côtez impairs 5 & 3, qui ſont 8 & 2, leur moitié 4 & 1 donne les quarrez requis, & trouvant que la même choſe convient aux autres triangles 5, 12, 13; 8, 15, 17, &c. j'obſerverai la même regle pour le triangle propoſé 57, 176, 185, en prenant la ſomme & la difference des deux côtez impairs 57 & 185, qui ſont 242 & 128, leur moitié 121 & 64, donnera les quarrez requis.

2°. Mais ſi l'on ne connoît point ce qui eſt propoſé ni en général ni en particulier, il en faut chercher les proprietez par ce que l'on a de connu. Et pour cet effet il faut conſtruire & faire des nombres ſemblables à celui qui eſt requis en toutes les façons poſſibles, & ſans en obmettre aucun, en commençant par le plus petit, & continuant tant qu'on en ait quelque nombre conſidérable, comme dix ou douze, ou plus ſelon la nature de la queſtion; car quelquefois trois ou quatre ſuffiront, & dans d'autres rencontres il en faudra pluſieurs avant qu'on ait découvert ce que l'on cherche.

Par exemple, ſi l'on demandoit combien de fois quelque nombre donné eſt la ſomme de deux quarrez, je ſuppoſe que je n'aye rien de donné, ſinon le moyen de faire des quarrez, & de les aſſembler deux à deux pour avoir leur ſomme : il faudra voir d'abord ſi les nombres qui ſont la ſomme de deux quarrez ont quelque proprieté parti-

culiere, afin de pouvoir connoître ſi le nombre donné eſt la ſomme de deux quarrez, & ſi quelque nombre peut être pluſieurs fois la ſomme de deux quarrez. Et après qu'on aura découvert des nombres qui ſont la ſomme de pluſieurs couples de quarrez, & le moyen d'en trouver autant qu'on voudra, on ſe ſervira de la premiere regle pour en faire leur générale, par laquelle on puiſſe trouver ce qui eſt requis.

Mais pour remarquer quelque proprieté deſdits nombres qui ſont la ſomme de deux quarrez, j'aſſemble les quarrez deux à deux, comme 4 & 1; 9 & 1; 9 & 4; 16 & 1; 16 & 4; 16 & 9, &c. tant que j'en aye quelque multitude notable; & conſidérant leurs ſommes 5, 10, 13, 17, 20, 25, &c. je regarde ſi j'y pourrai découvrir quelque proprieté qui ne convienne point aux autres nombres, comme l'on montrera plus au long dans l'exemple que l'on donnera dans la ſuite.

3°. Pour n'obmettre aucun nombre de ceux qu'on veut avoir, il faut établir quelque ordre pour ne ſe point égarer dans cette perquiſition; & cet ordre doit être le plus ſimple & le moins embroüillé qu'il ſera poſſible, & tel que par ſon moyen l'on puiſſe pourſuivre à faire les nombres auſſi avant qu'on voudra ſans aucune confuſion.

Il faut auſſi que cette recherche ſoit la plus courte & la plus facile qu'il ſe pourra faire, & pour y parvenir on ſe ſervira de deux moyens principaux.

La recherche ſera courte ſi l'on conſidere le moins de nombres que la nature de la queſtion pourra porter.

Elle ſera facile ſi l'on ſe ſert des moindres nombres poſſibles.

4°. Pour le premier moyen, qui eſt de faire la perquiſition courte, on ſe ſervira de l'*Excluſion.* Par l'Excluſion on obmet les nombres que l'on aura reconnus inutiles, & qui ne ſervent de rien à la queſtion, & dont on ſe peut très-bien paſſer, comme ſont preſque toujours les multi-

ples, lesquels néanmoins doivent par fois être considerez, & principalement en deux cas.

Le premier est, lorsque ne sçachant encore aucune proprieté du nombre requis, on recherche tout ce qui lui appartient, tant comme primitif que comme multiple.

L'autre est quand il arrive qu'il n'y a point de répugnance que ce qui est requis soit fait en partie par des primitifs, & en partie par des multiples tout ensemble: comme lorsqu'on demande trois triangles dont les aires soient les côtez d'un triangle rectangle. Dans cet exemple, à cause que le triangle a trois côtez, il n'y a point d'inconvenient que ce dernier triangle ait pour un de ses côtez l'aire d'un triangle multiple, & pour les autres celles de deux autres triangles primitifs; & partant il ne faudra obmettre l'aire d'aucun triangle tant primitif que multiple.

Il faut remarquer que quand on parle de faire la perquisition courte, ce n'est pas que pour cela on ne recherche plusieurs nombres; mais elle est courte, parce qu'en excluant beaucoup de choses inutiles, on passe incontinent bien avant & à de grands nombres par la considération de très-peu.

5°. Cette exclusion se fait encore en considérant les lettres finales des nombres: car il arrive souvent que par les finales on voit que plusieurs nombres ne peuvent avoir la qualité qui est requise. Mais pour l'ordinaire on ne se sert de cette pratique que quand on connoît plusieurs proprietez de ce qui est requis, & qu'on en cherche d'autres plus éloignées & plus cachées.

Par exemple, si l'on veut que quelque nombre soit quarré, on considerera les finales que les quarrez peuvent avoir; & ces finales sont 1, 4, 9, avec la lettre précédente paire, & 6 avec la précédente impaire, 25 avec 0, 2, ou 6 auparavant, & enfin 00 précédé d'une finale

quarrée : d'où l'on conclura que les nombres qui finiront par 2, 3, 7, ou 8, ne pourront être quarrez, ou par 5 précédé d'une autre lettre que de 2, ou dont les finales 1, 4, 9, seront précédées d'un impair, &c. & partant on les pourra exclure comme inutiles à la question.

Il faudra de même considérer les finales des autres nombres dont on aura besoin, & voir s'il y en a quelqu'une qui leur soit particulierement affectée : car bien souvent ces finales montrent clairement & démonstrativement l'impossibilité des questions dont on ne peut donner de solution.

6°. On peut aussi considérer quelques propriétez particulieres de la chose requise pour faire ladite exclusion : par exemple, si le nombre requis doit être pairement pair plus ou moins un, ou bien different de l'unité d'un multiple de 6 ou de 8, ou autres telles propriétez, comme sont les suivantes.

Les quarrez qui ne sont point mesurez par trois, surpassent de l'unité un multiple de 3.

Les quarrez impairs surpassent de l'unité un multiple de 8 ; & ainsi les quarrez impairs qui ne se mesurent point par 3, surpassent de l'unité un multiple de 24.

Tout quarré qui n'est point mesuré par 5, est different de l'unité d'un multiple de 5.

Toute hypotenuse primitive surpasse de l'unité un multiple de 4.

La somme des deux moindres côtez de tout triangle primitif, est toujours differente de l'unité d'un multiple de 8.

Tout nombre premier excepté 2 & 3, est different de l'unité d'un multiple de 6.

Ces propriétez & autres étant considérées à propos, donnent souvent tant d'exclusions, principalement aux questions impossibles, qu'elles semblent en montrer clairement l'impossibilité.

7°. Le ſecond moyen par lequel la perquiſition ſe rendra facile, eſt en ſe ſervant des moindres nombres qu'on pourra ; il ſe peut nommer *diminution.* Il y a pluſieurs voyes pour parvenir à cette diminution, auſſi-bien qu'à l'excluſion, comme ſont les ſuivantes.

En cherchant ou en choiſiſſant quelque propriété, qui faſſe que ce qui eſt requis ſe puiſſe trouver par de moindres nombres que ceux que l'on trouve par quelqu'autre proprieté.

Par exemple, ſi l'on cherche les hypotenuſes des triangles rectangles, on les trouveroit ſuivant la proprieté qu'elles ont, qui eſt que leur quarré eſt la ſomme de deux quarrez : mais on les trouvera beaucoup plus facilement & avec des nombres bien moindres, ſi l'on ſe ſert de la proprieté ſuivante, qui eſt que la ſomme de deux quarrez inégaux eſt une hypotenuſe.

Car par la premiere proprieté on trouve, par exemple, l'hypotenuſe 5, parce que les nombres 9 & 16 joints enſemble font 25, quarré de 5. Mais par la ſeconde je trouverai le même nombre 5 en joignant enſemble 4 & 1 ; ce qui eſt beaucoup plus facile & plus court.

8°. Quelquefois auſſi après avoir trouvé une voye pour rencontrer le nombre requis, & ayant déterminé qu'il faut chercher quelque autre nombre pour avoir le requis, ce ſecond ſe trouvera encore par un troiſiéme, & ce troiſiéme par un quatriéme, ce qui ſert quelquefois dans les problêmes impoſſibles pour en démontrer l'impoſſibilité. Comme ſi l'on trouve que pour avoir le 3ᵉ ou le 4ᵉ il ſe faille ſervir du premier, on verra évidemment l'impoſſibilité de la queſtion. Que ſi elle ne paroît pas fort clairement, cela fait au moins que pour des nombres de deux ou trois lettres qu'on éxamine, étant par après appliquez à la queſtion, les nombres qui en proviendront auront au moins dix ou douze lettres, & par ce même moyen on rejette auſſi une grande multitude de nombres ſuperflus.

9° Que si la question demande plus d'un nombre, comme si l'on requiert un triangle dont l'hypotenuse soit un quarré, & l'enceinte aussi un quarré, on voit qu'il y a deux nombres ausquels on attribuë la proprieté d'être quarrez. En ce cas on recherchera les moyens de faire chacun d'iceux séparément; & pour cela on se servira des moyens cy-dessus déduits; puis on conferera les proprietez de chacun des nombres trouvez l'une avec l'autre, & l'on remarquera si celles de l'un peuvent compatir avec celles de l'autre, car si une des proprietez d'un des nombres détruisoit celles de l'autre, ou quelqu'une d'icelles, la question seroit impossible.

10° Si en la recherche on a trouvé plusieurs nombres tels qu'il est requis, on remarquera leurs proprietez particulieres, qui les font distinguer d'avec les autres nombres, & qui soient communes à tous les nombres d'une même espece, en considérant si tout ce qui a ladite proprieté, a aussi l'autre proprieté qui étoit requise. Par exemple, après avoir remarqué que les nombres premiers qui surpassent de l'unité un multiple de 4, font la somme de deux quarrez, je regarderai si tous les nombres premiers qui sont la somme de deux quarrez, surpassent de l'unité un multiple de 4; & voyant que plusieurs desdits nombres de suite à commencer par le moindre & sans en obmettre aucun, ont cette condition, comme sont 5, 13, 17, 29, &c. je conclus que ladite proprieté convient à tous les autres premiers, qui surpassent de l'unité un multiple de 4.

Quelquefois aussi on trouve certaines exceptions ausquelles il faut avoir égard, & considérer tout ce qui doit être compris dans lesdites exceptions, en remarquant leur origine & d'où elles proviennent.

Il faut remarquer que cette recherche ne sert principalement qu'aux questions possibles, qu'elle trouve ordinairement sans beaucoup de travail, ne se servant pour la plupart d'autre démonstration que de la construction: au

au moins c'est-là son principal but. C'est pourquoi, le plus souvent aux questions impossibles elle donnera bien des voyes pour aller bien avant, & rechercher avec peu de travail jusqu'à des nombres fort grands, encore qu'on ne puisse pas arriver au but desiré, à cause de l'impossibilité de ce qui est proposé.

Il arrive aussi par fois, qu'en recherchant des voyes plus courtes & plus faciles, & voulant essayer tous les moyens de parvenir au but désiré, on trouve des contradictions & absurditez qui font voir l'impossibilité.

PREMIER EXEMPLE.

Deux quarrez étant donnez, trouver le triangle qui est formé desdits quarrez; par exemple, 64 & 25 etant donnez, on demande le triangle.

Cette question suppose qu'on sçache que les triangles sont formez par le moyen de deux quarrez, dont la somme est l'hypotenuse; & partant par le premier précepte, je chercherai quelques-uns des premiers triangles dont je sçaurai les quarrez, comme 3, 4, 5, qui est formé par les quarrez 4 & 1: j'essayerai donc à trouver lesdits 3, 4, 5, par le moyen de 4 & 1. Et premierement je voi que la somme de 4 & 1, est l'hypotenuse 5, & la difference des mêmes 4 & 1, est le côté impair 3, reste donc à trouver le côté pair 4. Je voi bien que le produit de 4 par 1 donne 4, mais cela ne pourroit pas arriver aux autres quarrez, parce que d'ordinaire le produit de deux nombres est plus grand que leur somme; & partant, si le côté pair étoit le produit des deux quarrez, il seroit presque toujours plus grand que la somme, qui est l'hypotenuse: ce qui ne se peut.

Il faut donc former 4 par une autre voye: & puisque les quarrez ne le donnent pas facilement, j'aurai recours à leurs racines 2 & 1, dont le produit est 2, le double duquel est 4.

Je considere maintenant si la même chose se fait & se trouve aux autres triangles.

Ainsi ayant 9 & 4, qui font le triangle 5, 12, 13, je voi que la somme desdits 9 & 4 est l'hipotenuse 13, & leur difference est le côté impair 5. Pour le côté pair je prens les racines desdits quarrez, qui sont 3 & 2; leur produit est 6, dont le double qui est 12 est le côté pair dudit triangle.

J'examinerai encore la même chose aux triangles suivans 8, 15, 17, qui provient de 16 & 1, & à 20, 21, 29, qui est fait par 25 & 4; ce qui me donne à connoître que cette regle convient à tous les triangles, puisqu'elle est propre à ceux que nous venons d'examiner, qui sont assez differens les uns des autres, sinon les deux premiers 3, 4, 5, & 5, 12, 13, qui se ressemblent en ce que le grand côté n'est different de l'hypotenuse que de l'unité.

Je viendrai donc aux quarrez proposez 64 & 25; & leur appliquant ladite regle, je trouverai le triangle 39, 80, 89.

SECOND EXEMPLE.

UN quarré étant donné, trouver un autre quarré, qui étant joint avec le donné, fasse un troisiéme quarré.

On donne par exemple 64.

Je cherche deux quarrez, qui étant joints ensemble, fassent un quarré, comme sont 16 & 9, dont la somme est 25.

Puis je cherche quelque voye par le moyen de laquelle je trouve 9 avec 16; car ici il faut choisir le quarré pair 16, puisque le donné, sçavoir 64, est pair : ou si je ne puis trouver 9 facilement, je chercherai sa racine 3.

Si j'ôte 1 de la racine de 16, sçavoir de 4, il restera 3, racine de 9 : je regarde donc aux autres quarrez pairs si la même chose arrivera.

Je prens par exemple 36, dont la racine 6 étant diminuée d'1, reste 5; le quarré duquel, sçavoir 25, étant joint à 36, donne 61 qui n'est point quarré : ce qui me donne à connoître que cette regle n'est pas la vraye, puisqu'elle n'est pas générale, quoiqu'il pourroit arriver en d'autres questions, que certains quarrez n'auroient pas la proprieté requise. Mais je trouve ici que 36 étant joint au quarré 64, donne 100, qui est un quarré; & partant ledit 36 n'est pas exclus d'avoir ladite proprieté.

Je cherche donc quelque autre convenance de 9 à 16; & parce que 4 y étoit propre dans la premiere regle, je regarde si je ne pourrai point tirer 4 de 16 autrement qu'en le considérant comme racine de 16.

Je voi que 4 est le quart de 16, je le considererai donc en cette qualité, & par même moyen j'éprouverai la même chose au susdit 36 dont le quart est 9, duquel ôtant 1, reste 8, dont le quarré 64 étant joint à 36, donne 100, qui est un quarré : ce qui me fait présumer que la regle est bonne, & on en pourra être entierement assuré en l'essayant sur d'autres quarrez.

Je prens donc le quart du quarré donné 64, qui est 16, dont ôté 1, reste 15, le quarré duquel 225 étant joint à 64, donne 289 quarré de 17, qui surpasse ledit quart 16 de la même unité.

Mais je voi aussi que le même 64 étant joint à 36, fait un quarré; & partant afin que la regle soit plus parfaite, il sera bon de donner un moyen pour trouver tous les quarrez ausquels un quarré étant joint, donne un autre quarré. Je l'éprouve à 64, & ayant pris son quart 16, je cherche le moyen de trouver par icelui la racine de 36 qui est 6. Ce 6 est la moitié moins 2 de 16 : or pour avoir la moitié il faut diviser par 2; de sorte que ce 2 pourroit passer pour partie de 16, & dans cette considération on a pû aussi prendre l'unité quand on l'a ôté de 16.

De même donc que j'ai pris la ſomme & la difference de 16 & 1, qui ſont comme parties rélatives de 16 pour avoir 17 & 15, qui ſont les racines des quarrez requis : de même auſſi je prendrai 2 & 8 pour parties rélatives du même 16, la ſomme & la difference deſquelles eſt 10 & 6, dont les quarrez 100 & 36 ſont tels qu'il eſt requis ; car joignant 36 à 64, on a 100.

Je prendrai garde après ſi la même choſe arrive aux autres quarrez qui ont plus de parties.

Je prens donc 144, & cherche les quarrez auſquels étant joint on peut avoir un quarré.

Son quart eſt 36. Les parties rélatives de 36 ſont 1,36] 2, 18] 3, 12] & 4, 9 : il n'y en a point d'autres, car 6 & 6 ſont ſemblables ; ce qui fait qu'ils n'ont point de difference dont on ſe puiſſe ſervir.

Je prens la ſomme & la difference de chaque couple deſdites parties, & trouve 37, 35] 20, 16] 15, 9] & 13, 5 & partant 144 étant joint au quarré de 35, qui eſt 1225, fait 1369, quarré de 37.

Le même 144 étant joint à 256, quarré de 16, donne 400, quarré de 20.

144 avec 81, quarré de 9, donne 225, quarré de 15.

Et enfin 144 avec 25, quarré de 5, donne 169, quarré de 13.

Pour voir ſi 144 ne ſe peut joindre qu'à 4 quarrez pour faire un quarré, & 64 à 2 ſeulement ; je conſidere que lors qu'un quarré étant joint à un autre quarré, fait un quarré, les racines de ces trois quarrez ſont les côtez d'un triangle. Je verrai donc à combien de triangles la racine du quarré donné ſert de côté ; & je trouve que 8, racine de 64, ne ſert de côté qu'à deux triangles ; & 12 racine de 144, ne ſert qu'à quatre. Puis donc que j'ai trouvé la même choſe auſdits quarrez par l'examen des parties de leur quart, j'infererai que la regle eſt bonne. Que ſi ces deux exemples n'en donnent pas une entiere

aſſurance, on le pourra encore éprouver ſur d'autres quarrez.

Mais ſi on ne ſçavoit pas à combien de triangles un nombre donné ſert de côté, il faudroit éxaminer leſdits quarrez d'une autre ſorte, ſçavoir en joignant le donné avec pluſieurs quarrez, pour voir ſi la ſomme feroit un quarré; & pour y parvenir on ſe pourra ſervir des excluſions dont on a cy-devant parlé; & voici comme on y procedera; prenant 144 pour exemple.

Je conſidere premierement ſi cet examen a des bornes, ou ſi on peut éxaminer utilement leſdits quarrez à l'infini; & pour ce qu'il faut ajouter à 144 un quarré pour avoir un autre quarré, il s'enſuit que 144 doit être la difference de deux quarrez.

Je conſidére donc quelle doit être la difference de deux quarrez, & je trouve que les quarrez allant toujours en augmentant, leurs differences augmentent auſſi à meſure: de ſorte que deux quarrez, dont les racines ont pareille difference que celles de deux autres quarrez, n'auront pas entr'eux pareille difference; mais les quarrez les plus grands auront plus grande difference: ainſi 25 & 64, dont les racines 5 & 8 ont 3 pour difference, different plus entre eux que 4 & 25, dont les racines 2 & 5 ont pareille difference qui eſt 3.

Puis donc que les differences augmentent toujours, il s'enſuit que 144 a des bornes, & qu'il ne faut pas pourſuivre l'examen que juſqu'à certains quarrez.

Or le quarré propoſé étant pair, il ne peut pas être different de deux quarrez dont les racines ne different que de l'unité, parce que de ces deux quarrez l'un étant pair & l'autre impair, la difference ſeroit impaire.

Mais dans les 4 couples de quarrez qu'on a trouvez auſquels 144 ſert de difference, on a ceux de 35 & 37, qui ſont les plus grands auſquels ledit 144 puiſſe ſervir de difference; car puiſque leſdites racines doivent avoir

au moins 2 de difference, si on prenoit deux autres nombres plus grands que 35 & 37, & qui eussent une pareille difference, il est certain que la difference de leurs quarrez seroit plus grande que celle des quarrez de 35 & 37, qui est 144.

Il faut donc à 144 ajouter tous les quarrez jusqu'à celui de 35, & voir si quelques-unes des regles des exclusions auront ici lieu.

Et premierement celle qui exclut les multiples ne peut pas être ici employée, puisque 144 peut aussi bien être la difference de deux quarrez composez entr'eux, que premiers entr'eux.

Mais on aura égard à la cinquiéme regle qui considere les finales, lesquelles dans les quarrez sont 1,4,5,6,9 & 0.

Si à 144 on ajoute un quarré finissant par 1, la somme finira par 5; mais 5 est toujours précédé de 2 dans les quarrez, & partant il faudra que ledit 1 soit précédé de 8, afin que ce 8 étant joint à la pénultiéme lettre 4, on ait 2 pour pénultiéme; & partant si le quarré qu'on ajoute finit par 1, il doit au moins finir par 81.

4 étant joint à 4 donne 8, qui n'est point une finale quarrée, & partant on n'ajoutera point à 144 les quarrez qui finissent par 4.

Pareillement les quarrez qui finissent par 9, ne pourront être ajoutez à 144, parce que la somme auroit 3 pour finale, qui partant ne seroit point quarrée.

Mais on pourra joindre à 144 les quarrez qui finiront par 5 & 0.

On y pourra joindre aussi les quarrez finissans par 6, pourvû qu'ils finissent par 56, afin que la somme ait 00 pour finale.

Cela posé, il ne faudra point ajouter à 144 les quarrez 1, 4, 9 & 16, pour les causes déduites, ni le quarré qui suit 144, sçavoir 169 dont la difference à 144 est 25.

Après 25 il faudra venir à 36, 49 & 64, qu'il faut lais-

ſer pour les mêmes cauſes cy-deſſus déduites.

81 étant joint à 144 donne 225, quarré de 15.

100 étant joint à 144 donne 244, qui n'eſt point quarré.

121, 169, 196, doivent être laiſſez à cauſe des finales.

225 joint à 144, donne 369, qui n'eſt point quarré.

256 joint à 144, donne 400, quarré de 20.

289, 324, 361, ſeront laiſſez à cauſe des finales.

400 & 144 donnent 544, qui n'eſt point quarré.

441, 484, 529, 576, 676, 729, 784, 841, 961, 1024 & 1089, ſeront auſſi laiſſez à cauſe des finales.

625 joint à 144 donne 769, qui n'eſt point quarré.

900 joint à 144 donne 1044, qui n'eſt point quarré.

1156 joint à 144 donne 1300, qui n'eſt point quarré.

Enfin 1225, quarré de 35, joint à 144, donne 1369, quarré de 37. Nous n'avons donc que les 4 couples de quarrez cy-devant trouvez, auſquels 144 ſerve de difference.

Juſqu'ici on a éxaminé la queſtion en ſuppoſant un quarré pair donné : mais qui voudra voir tout ce qui dépend de la queſtion, doit conſidérer la méthode de trouver la même choſe, le quarré donné étant impair ; par exemple, 81 étant donné, trouver un quarré qui étant joint avec icelui faſſe un autre quarré.

Je prens pour cet effet quelque quarré connu, comme 9, auquel je ſçai qu'ajoutant 16 on a 25.

Je cherche donc un moyen pour trouver 16, ou ſa racine 4 avec le quarré donné 9.

Je voi d'abord qu'ôtant 1 de 9, & prenant la moitié du reſte, on aura 4. Je conſidererai donc la même choſe aux autres quarrez impairs.

Ainſi je trouve qu'ôtant 1 de 25 reſte 24, dont la moitié eſt 12, le quarré duquel 144 étant joint à 25, donne 169, quarré de 13.

La même choſe arrivera auſſi à 49 & à 81, car celui-cy étant joint à 1600, quarré de 40, donne 1681 quarré de 41.

On pourra auſſi conſidérer que les quarrez impairs dont la racine n'eſt pas un nombre premier, peuvent être joints avec pluſieurs quarrez pour faire un quarré.

Ainſi éxaminant 81 comme on a fait cy-devant 144, on trouvera qu'étant joint audit 144, il fera 225 quarré de 15.

Il faudra donc trouver une voye pour rencontrer 144, ou ſa racine 12, par le moyen de 81.

Or puiſque nous ſçavons que les quarrez dont la racine eſt un nombre premier, ne peuvent être joints qu'avec un ſeul quarré pour faire un quarré, comme on peut voir à 9, 25, 49, &c. & que ceux dont la racine eſt compoſée peuvent être joints avec pluſieurs, cela fait préſumer que les parties deſdits quarrez ſont cauſe de cela; car 9, par exemple, ne peut être fait par multiplication de nombres differens, que par 1 & 9; de même en eſt-il de 25 qui n'a que 1 & 25, & ainſi des autres. Mais 81 peut être fait par 1 & 81, & par 3 & 27.

A cauſe de 1 & 81 on trouve le quarré de 40 & celui de 41; car on voit qu'ôtant 1 de 81 la moitié du reſte eſt 40, de même ajoutant 1 à 81 la moitié de la ſomme eſt 41.

On agira donc de même aux autres parties de 81, ſçavoir 3 & 27, prenant la moitié de leur ſomme & de leur difference. La ſomme eſt 30, la difference 24, la moitié deſquelles eſt 15 & 12: on verra donc ſi ajoutant à 81 le quarré de 12 on aura celui de 15, ce qui ſe trouve être ainſi.

On éprouvera la même choſe ſur quelqu'autre quarré, dont la racine ſera compoſée, comme ſur 225 quarré de 15.

Les parties rélatives de 225 ſont 1, 225] 3, 75,] 5, 45, & 9, 25.

La moitié de la ſomme & de la difference deſdites parties ſont 113, 112,] 39, 36,] 25, 20,] & 17, 8.

Partant ſi on ajoute 225 au quarré de 112, on aura le quarré de 113.

225 joint au quarré de 36, donne celui de 39.
225 étant joint au quarré de 20, donne celui de 25.
Et enfin 225 avec le quarré de 8, donne celui de 17.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Un nombre étant donné, déterminer s'il eſt hypotenuſe de quelque triangle, & quels ſont les deux côtez dudit triangle.

Afin de donner facilement la ſolution de cette queſtion, dans laquelle ſi l'on propoſoit quelque nombre particulier, comme ſi l'on demandoit ſi 221 eſt hypotenuſe; il faut voir ſi on pourra remarquer quelque ſorte de nombres affectez particulierement aux hypotenuſes; & pour y parvenir, je me ſervirai du ſecond précepte, puiſque je ne ſçai pas encore les proprietez particulieres des hypotenuſes, & que ce ſont elles qu'il faut chercher. Mais il faut ſçavoir ce que c'eſt qu'une hypotenuſe, & quel moyen on a d'en trouver quelqu'une.

Que la proprieté ſuivante ſoit donnée.

Le quarré de l'hypotenuſe d'un triangle rectangle vaut autant que les quarrez des deux autres côtez du triangle.

Partant ſi l'on joint chaque quarré à chaque quarré, on aura les quarrez de toutes les hypotenuſes, ſçavoir quand la ſomme des deux quarrez viendra à être quarrée.

Je cherche donc par le ſecond précepte toutes les hypotenuſes ſans en obmettre aucune, commençant par la moindre, & pour y parvenir j'aſſemble tous les quarrez.

Mais de peur de s'embarraſſer, & pour n'obmettre aucune hypotenuſe, je forme quelqu'ordre par le troiſiéme précepte, par lequel je puiſſe pourſuivre l'aſſemblage deſdits quarrez auſſi loin que je voudrai, & tel auſſi (autant que faire ſe pourra) qu'on puiſſe s'arrêter où on voudra, ſans que le travail qu'on aura commencé oblige à continuer bien avant, & auſſi ſans qu'on ſoit obligé (en cas qu'on voulut pourſuivre la recherche plus avant) de

reprendre ce qu'on auroit quitté. Ce qui ſe doit entendre, ſi cela ſe peut faire commodément.

†4	1	5
9	1	10
†9	4	13
†16	1	17
16	4	20
†16	9	25 ℞ 5
25	1	26
†25	4	29
25	9	34
†25	16	41
†36	1	37
36	4	40
36	9	45
36	16	52
†36	25	61
49	1	50
†49	4	53
49	9	58
†49	16	65
49	25	74
†49	36	85
†64	1	65
64	4	68
†64	9	73
64	16	80
†64	25	89
64	36	100 ℞ 10
†64	49	113

Par exemple, ſi pour aſſembler leſdits quarrez on ajoutoit au premier quarré 1 tous les autres quarrez juſqu'à celui de 200, & que par après on vint à les ajouter à 4, puis à 9, on s'obligeroit, pour avoir toutes les hypotenuſes moindres, de parcourir preſque tous les quarrez, & on entreprendroit un grand travail ſans peut-être en avoir beſoin.

Au contraire, ſi après avoir aſſemblé tous leſdits quarrez l'un à l'autre, on vouloit pouſſer la recherche plus avant, il faudroit reprendre ce qu'on auroit laiſſé, car il faudroit recommencer à 1, & lui ajouter les quarrez plus grands que celui de 200, ce qui apporteroit quelque déſordre. Il vaudra donc mieux prendre un autre ordre, comme cy-après.

Je prens le quarré 4, & lui ajoute 1.

Puis je viens à 9, & lui ajoute tous les moindres, commençant à 1.

Puis je prens 16, & lui ajoute les quarrez moindres 1, 4, 9, & je mets la ſomme enſuite de chaque couple de quarrez, comme on voit ici. Et continuant en cettte façon autant loin qu'on voudra, je remarque les couples dont la ſomme eſt quarrée, parce que la racine de ce

81	1	82
†81	4	85
81	9	90
†81	16	97
81	25	106
81	36	117
81	49	130
†81	64	145

quarré eſt l'hypotenuſe d'un triangle.

Et par le moyen de cette addition on trouvera des hypotenuſes, & aucune ne pourra être obmiſe.

Mais parce que je voi qu'il arrive peu ſouvent que la ſomme ſoit un quarré, je conſidere s'il n'y a rien de ſuperflu dans cette Table.

Les nombres qu'on veut avoir doivent être quarrez : je conſidererai donc quelque proprieté du quarré, comme que tout quarré eſt pairement pair, ou pairement pair +1.

Mais ſi on ajoute enſemble deux quarrez impairs, comme 9 & 1,] 25 & 9, la ſomme ſera impairement paire ; parce que les deux quarrez étant chacun un pairement pair +1, les deux enſemble feront un pairement pair +2, qui eſt un impairement pair.

De là on conclura qu'il eſt ſuperflu d'ajouter enſemble deux quarrez impairs, car leur ſomme étant impairement paire, ne peut pas être quarrée.

Je conſidere auſſi ſuivant le quatriéme précepte ſi les quarrez compoſez entr'eux peuvent être exclus, comme étant multiples d'autres couples de quarrez premiers entr'eux.

Je trouve que les triangles étant multipliez par quelque nombre que ce ſoit, donnent toujours d'autres triangles, car la proportion des côtez ne change point ; & ſi deux quarrez étant joints enſemble font un quarré, ſi on multiplie leſdits quarrez par quelque quarré, il eſt certain que la ſomme de ces multiples ſera encore un quarré, qui ſera meſuré par le même quarré qui aura multiplié les deux autres.

Il faudra donc retrancher de la Table les quarrez qui ſont de même ordre, & ceux qui ont une commune meſure.

Reſte donc de pourſuivre la Table, en joignant les quarrez premiers entr'eux, & de divers ordres, leſquels auſſi je marquerai en la Table précédente, afin de les diſtinguer des autres.

100	1	101	
100	9	109	
100	49	149	
100	81	181	
121	4	125	
121	16	137	
121	36	157	
121	64	185	
121	100	221	
144	1	145	
144	25	169	℞ 13
144	49	193	
144	121	265	
169	4	173	
169	16	185	
169	36	205	
169	64	233	
169	100	269	
169	144	313	
196	1	197	
196	9	205	
196	25	221	
196	81	277	
196	121	317	
196	169	365	
225	4	229	
225	16	241	
225	64	289	℞ 17
225	196	421	

On pourroit par après avoir égard aux finales, ainſi qu'il eſt montré au cinquiéme précepte; car on voit que dans cette ſeconde Table, quoiqu'il y ait déja un grand racourciſſement; néanmoins ſi on vouloit ôter toutes les finales inutiles, il y en auroit encore un beaucoup plus grand.

On pourroit enſuite conſidérer quelque proprieté des quarrez, comme que ceux qui ne ſont pas meſurez par 3, ſurpaſſent de l'unité un multiple de 3. Mais parce qu'on a déja exclu les quarrez qui ont une commune meſure, il s'enſuit qu'il n'y aura aucune des ſommes ſuſdites qui ſoit meſurée par 3; car pour être telle il faudroit que chacun des quarrez fut multiple de 3, puiſque les quarrez ſont ou multiples de 3, ou multiples de 3 + 1; partant ſi chacun des quarrez ſurpaſſe de l'unité un multiple de 3, la ſomme ſera multiple de 3 + 2, ou multiple de 3 — 1, & partant elle ne pourra pas être quarrée.

Il faudra donc que des deux quarrez que l'on ajoute, l'un ſoit

256	1	257
256	9	265
256	25	281
256	49	305
256	81	337
256	121	377
256	169	425
256	225	481

multiple de 3, & l'autre multiple de 3 + 1, ce qui exclut encore beaucoup d'additions.

Mais avant que de continuer ladite table ſuivant les régles deſdites excluſions, il faut voir ſi les ſommes quarrées qu'on a trouvées ne pourront rien apprendre touchant ce qui eſt propoſé, & ſi on ne pourra point trouver quelque proprieté deſdites hypotenuſes, outre celle en vertu de laquelle on les a trouvées juſques ici.

Je trouve ici 25, 100, 169, & 289, qui entre leſdites ſommes ſont quarrées; mais 100 eſt du nombre de celles qui ont été rejettées, parce qu'il provient de deux quarrez qui ont une commune meſure.

Les racines de ces nombres, ſçavoir 5, 10, 13, 17, ſeront donc hypotenuſes de triangles rectangles dont les deux autres côtez ſeront les racines des quarrez qu'on a aſſemblez pour avoir leſdits quarrez 25, 100, 169, 289.

Ainſi 25 étant la ſomme des quarrez 16 & 9, les racines des trois quarrez 25, 16, 9, qui ſont 5, 4, 3, ſeront les côtez d'un triangle rectangle.

Mais en conſidérant ma premiere table, je vois qu'elle contient leſdits nombres 5, 10, 13, 17, que j'ai trouvé être hypotenuſes, & qu'ils ſont de ſuite dans la colomne où ſont les ſommes des quarrez; car 4 & 1 donnent 5,] 9 & 1 donnent 10,] 9 & 4 donnent 13,] & 17 vient de 16 & 1 : il ſe pourroit donc faire que non ſeulement les quarrez des hypotenuſes ſont la ſomme de deux quarrez, mais auſſi que les hypotenuſes mêmes ſont pareillement la ſomme de deux quarrez; ce qu'il faut examiner.

Je voy déja que 5, 13 & 17, ſont hypotenuſes; & de plus j'ai dans la table pluſieurs multiples deſdits 5, 13 & 17, qui ſont pareillement hypotenuſes, comme 10,

20, 40, 45, 26, 34, &c. & qui sont aussi la somme de deux quarrez.

Il faut donc voir si les autres nombres premiers de la table sont pareillement hypotenuses, sçavoir 29, 41, 37, 61, &c.

Mais parce qu'il seroit trop long d'examiner si les quarrez desdits nombres sont la somme de deux quarrez, je cherche quelqu'autre voye qui n'oblige point de considerer lesdits quarrez.

Cette voye sera de satisfaire à la seconde partie de la question, sçavoir de donner les deux autres côtez du triangle, ce qui se trouvera par la premiere regle, puisqu'on a les quarrez dont l'hypotenuse est la somme, & qu'on sçait les côtez de quelques triangles, sçavoir de ceux dont 5, 13 & 17 sont hypotenuses. Car par la table susdite on voit que 5 est hypotenuse, & que 3 & 4 sont les côtez, parce que 25 quarré de 5, est la somme de 9 & 16, quarrez de 3 & 4; de même on trouvera que 5 & 12 sont les côtez du triangle dont 13 est hypotenuse, & que 8 & 15 sont les côtez du triangle 8, 15, 17.

Cela supposé on requiert une voye ou regle par laquelle on puisse trouver lesdits côtez, sçachant seulement l'hypotenuse & les deux quarrez dont elle est la somme.

Cette regle se trouvera par le premier exemple qui a été donné ci-devant; & l'appliquant à tous les nombres de la table, je trouve les côtez des triangles dont ils sont hypotenuses. Par exemple, 29 est la somme de 25 & 4, la difference desdits quarrez qui est 21 est le côté impair: si donc 29 est hypotenuse, & 21 l'un des côtez de son triangle, il faudra que le quarré de 21 étant ôté de celui de 29, il reste un quarré dont la racine soit l'autre côté du triangle. J'ôte donc 441 quarré de 21, de 841 quarré de 29, reste 400 quarré de 20, qui est l'autre côté, & partant 29 est hypotenuse. La même chose se pourra examiner aux autres hypotenuses suivantes, & même aussi aux

multiples ; car ſi en les prenant de ſuite & ſans aucun choix, on trouve la même choſe à toutes, je conclus que ladite regle eſt générale, ſçavoir que la ſomme de deux quarrez inégaux eſt l'hypotenuſe d'un triangle rectangle, dont les côtez ſont tels nombres qu'on voudra.

Mais il ne faut pas ſe contenter de cela, car il faut examiner la converſe, ſçavoir ſi toute hypotenuſe eſt la ſomme de deux quarrez.

J'ai ici de deux ſortes d'hypotenuſes, ſçavoir de primitives, qui ſont nombres premiers, ou au moins qui ſervent à des triangles dont les côtez n'ont point de commune meſure, & d'autres qui ſont multiples d'autres hypotenuſes primitives, & dont les côtez ne ſont pas premiers entr'eux, mais qui ſe peuvent méſurer par un même nombre.

Pour ce qui eſt des hypotenuſes primitives, je vois ici pluſieurs nombres qui ſervent d'hypotenuſe à des triangles fort differens, comme 3, 4, 5,] 8, 15, 17,] 20, 21, 29,] 28, 45, 53, &c. qui ſont tous la ſomme de deux quarrez ; partant il n'y a aucune apparence qu'il y ait d'autres nombres premiers qui ſoient hypotenuſes, & qui ne ſoient point la ſomme de deux quarrez ; car les uns ne peuvent pas avoir plûtôt cette proprieté que les autres, puiſqu'elle ſe trouve en pluſieurs triangles fort differens. Que ſi on s'en vouloit aſſûrer davantage, il faudroit examiner quelques-uns des autres nombres premiers en les prenant de ſuite, comme 7, 11, 19, 23, & voir ſi leurs quarrez ſont la ſomme de deux quarrez ; ce qui ſe pourra faire, en ôtant, par exemple, de 529 quarré de 23, les quarrez qui ſont moindres, & conſiderant ſi le reſte ſera quarré, en ſe ſervant pour cet effet des finales des quarrez. Mais on trouvera toûjours que les nombres premiers qui ne ſont point la ſomme de deux quarrez, ont un quarré qui n'eſt point auſſi la ſomme de deux quarrez : ainſi parce que 23 n'eſt point la ſomme de deux quarrez, ſon quarré 529 ne la ſera pas auſſi.

Reste donc à examiner les multiples, & pour cet effet je prens quelque hypotenuse primitive, comme 5, & je la multiplie par plusieurs nombres pris de suite sans aucun choix, & sans en omettre aucun, comme par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c. & j'aurai 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, &c. lesquels derniers nombres sont de nécessité hypotenuses, puisqu'ils sont multiples de 5, car on a trouvé que multipliant un triangle par quelque nombre que ce fût, on a encore un triangle dont les côtez ont entr'eux même proportion.

Je regarde par après en la premiere table où sont les assemblages de tous les quarrez, tant ceux qui sont premiers entr'eux, que ceux qui ont une commune mesure, & tant ceux de même ordre, que de divers ordres.

En cette table je trouve bien quelques-uns desdits nombres, comme 10, 20, 25, 40, 45, mais je n'y trouve pas les autres, sçavoir 15, 30, 35, d'où je conclus que toute hypotenuse n'est pas la somme de deux quarrez. Et considerant quelle difference il peut y avoir entre les hypotenuses qui sont la somme de deux quarrez & celles qui ne le sont pas, je trouve que les premieres sont ou bien multiples d'une hypotenuse par un quarré comme 20 & 45, ou par un double quarré comme 10 & 40, ou qu'elles ne peuvent être mesurées que par des hypotenuses comme 25; & passant outre en ladite table, on trouveroit encore 50, 65, & 85 : mais ces trois dernieres ont encore cela de particulier, qu'en vertu des quarrez dont elles sont la somme, elles servent d'hypotenuse à des triangles primitifs.

Les autres hypotenuses qui ne se trouvent point dans ladite table, & partant qui ne font point la somme de deux quarrez, comme 15, 30, 35, 55, sont multiples d'hypotenuses par des nombres qui ne sont ni quarrez, ni doubles quarrez, ni hypotenuses, car les trois premieres sont multiples de 5, par 3, 6 & 7.

Mais

Mais il faut voir ſi on ne pourra point découvrir quelqu'autre proprieté des hypotenuſes ; & pour y parvenir, je conſidere les ſeules hypotenuſes primitives, laiſſant-là les multiples qui n'ont autre choſe que ce qu'elles empruntent de leurs primitives, dont voici quelques-unes.

5, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 53, 61, 65, 73, 85, 89, 97, 101, 109.

Je vois premierement que tous les nombres premiers ne ſont pas en ce rang, & qu'il y a auſſi des nombres compoſez, mêlez parmi, mais non pas tous, car on n'y trouve point 21, 49, & autres.

Afin donc de débroüiller un peu ces nombres, je les ſépare en premiers & compoſez, & je regarde quelles ſont les parties des compoſez, 25 eſt le quarré de 5, 65 a pour parties 5 & 13,] & 85 a 5 & 17.

Je conſidere que leſdits nombres 5, 13 & 17 ſont compris entre les nombres premiers qui ſont hypotenuſes : d'où je conclus que les nombres compoſez de ſeules hypotenuſes ſont auſſi hypotenuſes primitives, de même que les nombres premiers dont ils ſont compoſez.

Reſte donc à conſiderer les nombres premiers ſuſdits, 5, 13, 17. Je regarde auſſi quels ſont les autres nombres premiers qui ne ſe trouvent point en ma liſte. Ces nombres ſont 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, &c. je compare les uns avec les autres pour voir ſi les premiers n'ont point quelque proprieté qui ne ſoit point aux derniers, & je trouve que les hypotenuſes, ſçavoir, 5, 13, 17, &c. ſurpaſſent toutes de l'unité un multiple de 4, & que les derniers 3, 7, 11, &c. ſont tous moindres de l'unité qu'un multiple de 4, d'où on tirera ce théorême.

Tout nombre premier qui ſurpaſſe de l'unité un multiple de 4, eſt hypotenuſe ; & tout nombre premier qui eſt hypotenuſe, ſurpaſſe de l'unité un multiple de 4.

Par cette proprieté il ſera facile de réſoudre le pro-

blême, en divisant le nombre donné en ses parties s'il en a, & voyant si quelqu'une d'icelles est un nombre premier qui surpasse de l'unité un multiple de 4.

Si on suppose que toute hypotenuse primitive est la somme de deux quarrez de divers ordres, la consequence est bien facile à tirer, que cette hypotenuse surpasse de l'unité un multiple de 4; car tout quarré impair surpasse de l'unité un multiple de 4, (il n'est pas besoin d'en excepter 1) & partant un quarré impair étant joint avec un pair, (qui est toûjours pairement pair) fera un pairement pair + 1.

Pour ce qui est de trouver le triangle, on verra par ce qui a été dit si le nombre donné est la somme de deux quarrez, & on cherchera quels sont lesdits quarrez, en ôtant dudit nombre le quarré prochainement moindre, & puis le suivant; & voyant à chaque soustraction si ce qui reste est quarré, ce qui est déduit ailleurs plus au long, & ayant les deux quarrez dont le nombre est la somme, on aura le triangle comme cy-devant.

La précedente perquisition auroit pû être conduite d'une autre sorte, car puisqu'il faut que deux quarrez joints ensemble fassent un quarré, je prendrai tous les quarrez l'un après l'autre, & verrai par le second exemple quel quarré il lui faut ajoûter pour faire un autre quarré; car par ce moyen on auroit promptement les quarrez de toutes les hypotenuses, tant primitives que multiples sans en excepter aucune. Et afin de n'avoir point deux fois les mêmes nombres, il ne faudra remarquer que les quarrez qui sont moindres que celui qu'on examinera.

Par exemple, ayant 16, son quart est 4; les parties relatives de 4 sont 1 & 4; leur difference est 3, qui est moindre que 4 racine de 16; & partant je retiendrai le quarré 9, qui étant joint à 16 donne 25, quarré de l'hypotenuse 5.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

UN nombre composé étant donné avec les parties premieres & analogiques, déterminer à combien de triangles il sert d'hypotenuse.

Puisque le nombre est composé il servira d'hypotenuse à quelques triangles multiples; & s'il est composé de seules hypotenuses, il servira aussi à des triangles primitifs: mais parce que les multiples proviennent nécessairement de primitifs, on s'arrêtera premierement aux seuls primitifs.

Je trouve dans ma table quelques nombres composez, comme 25, 65, 85, & je trouve que 25 ne sert qu'à un seul triangle primitif, non plus que les nombres premiers: mais 65 & 85 servent chacun à deux triangles primitifs.

Il faut donc qu'il y ait quelque ressemblance entre 25 & les nombres premiers, qui ne soit pas entre 65 ou 85, & lesdits nombres premiers.

Je trouve que 25 ne peut être mesuré que par un seul nombre premier, non plus que les nombres premiers; mais 65 & 85 se mesurent chacun par deux nombres, celui-là par 5 & 13, & celui-ci par 5 & 17.

Et de-là il s'ensuivra que les puissances des nombres premiers ne serviront d'hypotenuse qu'à un seul triangle primitif. Je l'examine à 125 & 625 puissances de 5, & je le trouve ainsi, car chacun desdits nombres n'est qu'une seule fois la somme de deux quarrez premiers entr'eux: d'où je conclus la verité dudit théorême.

Mais les nombres qui se mesurent par deux nombres premiers differens, (comme 65 qui se mesure par 5 & 13) servent d'hypotenuse à deux triangles primitifs, puisqu'ils sont deux fois la somme de deux quarrez premiers entr'eux.

De-là il s'ensuit que si on multiplie une hypotenuse par un nombre qui la mesure, le produit ne servira pas d'hy-

potenuſe à plus de triangles primitifs ; par exemple, 325 ne doit ſervir d'hypotenuſe primitive qu'à deux triangles, non plus que 65 : car encore que 325 ſoit meſuré par 5 & 25,] & 65 par 5 ſeulement, néanmoins l'un & l'autre n'eſt meſuré que par les deux nombres premiers 5 & 13 ; joint que les quarrez & les autres puiſſances qui ont un nombre premier pour racine, ne ſervent d'hypotenuſe qu'à un ſeul triangle primitif.

Cette remarque ſera confirmée par l'examen qu'on fera de 325, par lequel on trouvera qu'il n'eſt que deux fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux, & partant ne ſert d'hypotenuſe qu'à deux triangles primitifs.

Je compoſe par après un nombre de trois hypotenuſes premieres, & pour plus de facilité je prens les moindres, ſçavoir 5, 13, 17.

Leur produit eſt 1105, je regarde combien de fois il eſt la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux, ce qui ſe fera ôtant de 1105 le quarré prochainement moindre, ſçavoir 1089, le reſte ſera 16 qui eſt un quarré ; & partant 1105 eſt la ſomme des deux quarrez 1089. & 16.

J'ôte par après du même 1105 l'autre quarré précedent, ſçavoir 1024, reſte 81 qui eſt encore un quarré ; & ainſi continuant on trouvera que 1105 eſt quatre fois la ſomme de deux quarrez : d'où je conclus qu'il ſert d'hypotenuſe à quatre triangles primitifs.

On pourroit trouver leſdits quarrez d'une autre ſorte, ſçavoir ôtant le premier quarré 1089, & au reſte 16 ajoûtant 65, qui eſt la ſomme de 33 & 32, racines dudit 1089, & du quarré prochainement moindre.

Et à la ſomme 81 ajoûtant 63 qui eſt la ſomme des deux racines moindres chacune de l'unité que les précedentes, & ainſi continuant tant que ladite ſomme ſera moindre que le reſte, ce qui arrive à la derniere ſomme 529, qui étant ôtée de 1105 reſte 576 ; car ſi on paſſoit outre,

16	4
65	
81	9
63	

la somme seroit plus grande que le reste.

Autant de fois qu'on a un quarré pour ladite somme, y comprenant même le premier nombre trouvé 16, autant de fois le nombre est la somme de deux quarrez : mais il faudra prendre garde s'ils sont tous premiers entr'eux, ce qui se connoîtra si aucun d'iceux ne se mesure par quelqu'une des parties du nombre, qui sont ici 5, 13, 17 : mais on a parlé de ceci ailleurs.

Je vois donc qu'un nombre qui ne se mesure que par un seul nombre premier, ne sert d'hypotenuse primitive qu'à un seul triangle. S'il se mesure par deux nombres premiers, il sert à deux triangles. S'il se mesure par trois nombres premiers, il sert à quatre triangles.

Il faut donc voir quel rapport 1, 2, 4, a avec 1, 2, 3.

Je vois que 1, 2, 3, se suivent en l'ordre des nombres, & 1, 2, 4, se suivent en l'analogie de 2 ; partant il faudroit que le nombre qui auroit quatre nombres premiers fût huit fois hypotenuse, & celui qui en auroit cinq fût seize fois hypotenuse : car de même que 4 est le troisiéme nombre de l'analogie de 2, & partant a rapport à 3 ; de même 8 est le quatriéme, & 16 est le cinquiéme.

144	12
61	
205	
59	
264	
57	
321	
55	
376	
53	
429	
51	
480	
49	
529	23

Pour s'assûrer davantage de cette verité, il faut rechercher quelle raison ou convenance on peut apporter de cette proportion.

Puisque les nombres composez servent à plus de triangles que les premiers, il faut que cette augmentation provienne des parties. Or ces parties doivent être premieres entr'elles, autrement les puissances auroient plus de triangles que leurs racines.

Cela ne provient donc pas simplement de la multitude des parties, mais des parties premieres seulement : mais

ces parties premieres ne doivent pas être prises simplement selon leur multitude, puisque la multitude des triangles n'est pas égale à la multitude desdites parties premieres.

Reste donc à considerer lesdites parties en tant qu'elles composent le nombre : il les faut donc prendre deux à deux, en telle sorte toutefois qu'elles soient premieres entr'elles, car autrement elles ne donneroient pas des quarrez premiers entr'eux ; & parce qu'ayant pris une des parties, si on veut faire le nombre, l'autre partie vient nécessairement ensuite, on nommera ces parties rélatives ; par exemple, si le nombre est 1105, dont les parties premieres sont 5, 13, 17, quand on prendra 5 pour une des parties, on prendra 13 & 17, (c'est à-dire le produit de 13 par 17) pour la partie rélative audit 5.

Il faut donc voir en combien de façons on peut faire chaque nombre par deux parties rélatives premieres entr'elles.

Et premierement les nombres premiers, & leurs puissances ne peuvent être faits que d'une sorte, sçavoir en prenant l'unité pour une des parties, & le nombre entier pour l'autre ; ainsi 5 ne peut être fait que par 1 & 5. La même chose arrive aux puissances, car 125 cube de 5 ne peut aussi être fait que d'une façon, sçavoir par 1 & 125, car si on prenoit 5 & 25, les parties ne seroient pas premieres entr'elles ainsi qu'il est requis.

Les nombres qui sont mesurez par deux nombres premiers comme 65, qui a 5 & 13 pour parties, peuvent être faits en deux façons, sçavoir en prenant 1 d'un côté & le produit de 5 & 13 de l'autre, & en prenant 5 d'un côté & 13 de l'autre pour la seconde façon.

Le nombre qui a trois parties, comme 1105 qui a 5, 13, 17, se fait en quatre façons ; sçavoir 1 par 5, 13 & 17,] 5 par 13 & 17,] 13 par 5 & 17,] 17 par 5 & 13.

Si le nombre avoit quatre parties premieres, comme

32045, qui a 5, 13, 17, 29, il se feroit en huit façons. On prendra 1 d'un côté, par 5, 13, 17 & 29, ou le nombre entier, puis 5 par 13, 17 & 29,] 13 par 5, 17, & 29,] 17 par 5, 13 & 29,] 29 par 5, 13 & 17,] 5 & 13 par 17 & 29,] 5 & 17 par 13 & 29,] 5 par 29, 13 & 17, qui sont en tout huit façons de faire le nombre donné.

De la même maniere on trouvera 16 façons avec cinq parties, & trente-deux façons avec six, &c.

Ayant ainsi trouvé les primitifs, on viendra aux multiples, & pour les trouver il faudra compter les primitifs de chacune des parties : ainsi ayant 65 dont les parties sont 5 & 13, chacune desdites parties sert à un primitif, & partant 65 servira à deux multiples, & en tout à quatre triangles.

Si on donnoit 325 dont les parties sont 25, 13, de ces deux il faut faire toutes les autres, commençant par celles qui n'ont qu'une partie, & prenant aussi leurs puissances, puis celles qui ont deux parties; & ainsi on aura 5, 25, 13 & 65, ou 5 par 13, les trois premieres donnent chacune un triangle, & la derniere qui a deux nombres differens en donne deux, & partant ledit 325 aura cinq multiples, qui avec les deux primitifs font en tout sept triangles.

Ayant ces quantitez, je chercherai les moyens de trouver les autres sans avoir la peine de les compter; & voici comment on raisonnera pour cet effet..

La multitude des triangles ausquels un nombre sert d'hypotenuse, n'augmente pas pour la grandeur des parties, mais seulement pour leur multitude; par exemple, le nombre qui sera fait de 13 & 17, n'aura pas plus de triangles que celui qui proviendra de 5 & 13, car l'un & l'autre n'a que deux nombres premiers : mais si on prenoit 325, qui est fait de 25 & 13, il aura plus de parties, & partant plus de triangles que 65, qui n'a que 5 & 13 comme on vient d'examiner; & partant cette multitude de

parties vient ou de la grandeur des puiſſances, ou de la multitude des parties premieres & de leurs puiſſances.

Il faudra donc dans l'examen prendre ſeulement le nombre qui dénote la puiſſance, ſans ſe ſoucier de quel nombre il eſt puiſſance, puiſque ſa quantité n'y fait rien.

Ayant donc trouvé que le produit de 5 par 13 a quatre triangles, je cherche les expoſans deſdites parties premieres, ou de leurs puiſſances; & je trouve 1 & 1 : je chercherai donc un moyen de rencontrer 4 par le moyen de 1 & 1.

Si je double chacun des expoſans 1 & 1, j'aurai 2 & 2, dont la ſomme ſera 4, qui eſt le nombre requis.

Il faut donc voir quelqu'autre exemple, pour voir ſi la même choſe arrivera.

325 a pour parties premieres & analogiques 25 & 13, & ſert d'hypotenuſe à ſept triangles.

Les expoſans deſdites parties ſont 2 & 1, il eſt manifeſte que le double d'iceux, ſçavoir 4 & 2 étans joints ne feront pas un nombre impair tel qu'eſt 7, & partant la régle premiérement trouvée n'eſt pas bonne. Il faudra donc chercher un autre rapport entre 1, 1 & 4.

Je trouve que le double du produit de 1 par 1, étant joint aux mêmes 1 & 1, donne 4.

La même choſe ſe fera en cherchant 7 par le moyen de 2 & 1, car le double du produit eſt 4, qui étant joint à 2 & 1 donne 7.

J'éprouverai encore cette régle ſur d'autres nombres, & je trouve qu'elle convient à tous.

Mais ſi le nombre ſe meſuroit par pluſieurs nombres premiers, & qu'il y en eût plus de deux, cela pourroit apporter quelque difficulté; par exemple, ſi on donnoit 1105 qui ſe meſure par 5, 13, 17, & qui a 1, 1, 1, pour expoſant de ſes parties; il faut par le moyen d'iceux trouver 13, car il ſert d'hypotenuſe à treize triangles.

Si on prenoit le double du produit des trois expoſans, &

& qu'on lui ajoûtât les trois exposans, on n'auroit que 9; ce n'est donc pas la régle qu'il faut suivre.

Je prendrai donc les exposans deux à deux, & premiérement avec 1 & 1 je trouverai 4. Je retiendrai ce 4 comme s'il étoit exposant, & le comparerai avec le 1 qui reste.

Le double du produit de 1 & 4 est 8, auquel joignant les mêmes 1 & 4, on aura 13 comme il est requis.

Pour s'assûrer davantage de cette régle, on prendra quelque grand nombre, comme le produit du cube de 5 par le quarré de 13 & par 17.

Les exposans desdites parties sont 1, 2, 3.

Je prens le double du produit de 1 & 2, & lui ajoûte les mêmes 1 & 2 pour avoir 7.

A.	1	b. q. par C. cub.
B.	1	a. par b. par C. cub.
B. q.	1	a. par C. cub.
C.	1	a. par b. q. par c. q.
C. q.	1	a. par b. q. par C.
C. cub.	1	a. par b. q.
A. par B.	2	b. par C. cub.
A. par B. q.	2	C. cub.
A. par C.	2	b. q. par C. q.
A. par C. q.	2	b. q. par C.
A. par C. cub.	2	b. q.
B. par C.	2	a. par b. par C. q.
B. par C. q.	2	a. par b. par C.
B. par C. cub.	2	a. par b.
B. q. par C.	2	a. par C. q.
B. q. par C. q.	2	a. par C.
B. q. par C. cub.	2	a.
A. par B. par C.	4	b. par C. q.
A. par B. par C. q.	4	b. par C.
A. par B. par C. cub.	4	b.
A. par B. q. par C.	4	C. q.
A. par B. q. par C. q.	4	C.
A. par B. q. par C. cub.	4	o. primitifs.
Somme	52	

Puis je prens le double du produit dudit 7 par 3 qui reste, & lui ajoûte les mêmes 7 & 3 pour avoir 52.

Je dis donc que le nombre donné sert d'hypoténuse à cinquante-deux triangles.

Je chercherai par une autre voye si ledit nombre a cinquante-deux triangles, sçavoir en comptant toutes ses par-

ties, & les triangles primitifs qui appartiennent à chacune.

Pour faire cela plus aisément, on prendra seulement les puissances, puisque la diversité des nombres premiers n'y fait rien.

Je pose donc que le nombre soit A. par B. q. par C. cub.

Je considere lesdites parties en toutes les façons possibles, prenant premiérement celles qui ne servent qu'à un seul triangle primitif, sçavoir celles où il n'y a qu'une seule puissance ou racine; puis celles qui seront faites de deux differentes puissances, & qui servent à deux triangles; & enfin celles qui contiennent trois puissances, & qui servent à quatre triangles comme on voit cy-dessus.

Les parties sont premiérement en grosses lettres, puis ensuite la multitude des triangles primitifs de ladite partie. Et derriere en petites lettres est la partie rélative, qui est le nombre de multiplicité, sçavoir le nombre par lequel le triangle est multiple. Par exemple A. par C. q. sert à deux triangles primitifs, lesquels seront multipliez par b. q. par C. Et supposant que C. cub. soit 125, que B. q. soit 169, & que A. soit 17, on aura 425. Pour A. par C. q. qui servira d'hypotenuse à deux triangles qu'il faudra multiplier par 845, qui est b. q. par C.

CINQUIE'ME EXEMPLE.

UN nombre étant donné, déterminer combien de fois il est la somme de deux quarrez.

Il faut premiérement voir si on ne trouvera point quelque proprieté particuliere aux nombres qui sont la somme de deux quarrez, afin qu'on puisse connoître plus facilement si le nombre est la somme de deux quarrez.

Si on n'avoit rien de connu, & qu'on ne sçût point que la somme de deux quarrez inégaux est une hypotenuse, il faudroit assembler les quarrez, & faire une table des sommes, comme on voit au troisiéme exemple.

Cela fait, je considere plusieurs desdites sommes prises de suite, comme 5, 10, 13, 17, 20, 25, 26, 29, 34, 41, 37, 40, 45, 52, 61, 50, 53, &c. & je regarde si elles n'ont rien de semblable entr'elles que les autres nombres n'ayent point.

Et parce que je vois diverses sortes de nombres, je les sépare par classes selon leurs diversitez.

Et premiérement, je trouve des nombres pairs & des impairs, des nombres premiers & des composez, des impairs premiers & des composez, des pairs dont les uns sont pairement pairs, & les autres impairement pairs.

Je considére premiérement les nombres premiers comme les plus simples, & je trouve 5, 13, 17, 29, 37, 41, 61, 53.

Je regarde quels sont les autres nombres premiers non compris en cette table, & j'aurai 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59; j'examine s'il y a quelque difference entr'eux, & si les précedens ont quelque chose qui soit commune à tous, & qui ne convienne à aucun des derniers.

Je trouve que 5, 13, 17, & les autres qui sont la somme de deux quarrez, surpassent de l'unité un multiple de 4, ou bien qu'ils sont pairement pairs + 1, & les autres nombres, sçavoir 3, 7, 11, &c. sont tous pairement pairs — 1.

Voilà pour ce qui est des nombres premiers.

Quant aux composez, puisqu'ils sont de diverses sortes, il faut voir d'où peut provenir cette diversité, & si ce ne seroit point de la differente façon d'assembler les quarrez.

Et sur cet assemblage, je trouve que les nombres premiers sont tous faits de deux quarrez premiers entr'eux & de divers ordre.

Et que si on assemble deux quarrez impairs premiers entr'eux, on aura pour la somme un impairement pair qui sera double d'un des nombres ci-dessus pairement pair + 1.

Et par les autres aſſemblages on trouvera les autres ſommes compoſées.

Il faudra par-après conſiderer les parties de ces nombres compoſez, & je trouve de deux ſortes de compoſitions; car les uns n'ont point d'autres parties que des nombres premiers pairement pairs + 1, ou leurs puiſſances, comme 25, 65, 85. Les autres ont pour parties leſdits nombres premiers, & d'autres qui ſont pairement pairs — 1, ou qui ſont de l'analogie de 2. Et conſiderant ces autres nombres qui ne ſont point la ſomme de deux quarrez, je trouve qu'ils ſont tous ou quarrez, ou doubles quarrez; par exemple, 10 a pour parties 2 & 5, deſquels 5 eſt la ſomme de deux quarrez, & 2 eſt double quarré.

20 a pour parties 4 & 5, deſquelles 4 eſt un quarré.

45 a pour parties 9 & 5, deſquelles 9 eſt quarré.

De là je conclurai que tout nombre premier pairement pair + 1, eſt la ſomme de deux quarrez; & que leſdits nombres premiers étant multipliez par un quarré, ou par un double quarré, donnent des nombres qui ſont auſſi ſommes de deux quarrez.

Il faut maintenant conſiderer s'il peut y avoir des nombres qui ſoient pluſieurs fois la ſomme de deux quarrez.

On voit par la table que leſdits nombres premiers ne ſont qu'une fois chacun la ſomme de deux quarrez.

Pour les nombres compoſez nous en avons remarqué de deux ſortes, dont les uns ſont multiples d'un nombre, qui eſt la ſomme de deux quarrez par un qui ne l'eſt point, comme 45 qui eſt multiple de 5 par 9, quand on ne verroit point par la table qu'il n'eſt point plus de fois la ſomme de deux quarrez que ſon primitif; la raiſon montre aſſez que 45, par exemple, dont les parties premieres & analogiques ſont 5 & 9, ne peut pas avoir plus de compoſitions que ſon primitif 5; car puiſque de ſes deux parties 5 & 9, l'une, ſçavoir 5, eſt la ſomme de deux quarrez, & l'autre qui eſt 9 ne l'eſt point, il eſt certain que ledit 9 ne

lui pourra communiquer ce qu'il n'a point ; mais ſeulement parce qu'il eſt quarré, il n'empêchera point que la proprieté de 5 ne paſſe en 45, puiſqu'un quarré multipliant un quarré fait un quarré, & auſſi 9 multipliant 4 & 1 dont la ſomme eſt 5, donnera les deux autres quarrez 36 & 9 dont la ſomme ſera 45, mais il ne lui pourra pas ajoûter de nouvelle compoſition, ni le faire être ſomme de deux autres quarrez que des multiples par 9, de ceux dont 5 eſt la ſomme.

Reſte donc que le nombre qui eſt pluſieurs fois la ſomme de deux quarrez, ſoit compoſé de ſeuls nombres premiers pairement pairs +1, ou au moins qu'il ſoit multiple d'un nombre compoſé deſdits nombres premiers ſeulement.

Mais pour examiner les differens nombres compoſez, il faut commencer par les plus ſimples, ſçavoir par ceux qui ne ſe meſurent que par un ſeul nombre premier, comme ſont les puiſſances dont la racine eſt un nombre premier pairement pair +1.

Je trouve que 25 quarré de 5, n'eſt qu'une ſeule fois la ſomme de deux quarrez.

125 cube de 5 eſt deux fois la ſomme de deux quarrez.

625 qq. de 5 l'eſt auſſi deux fois.

Il ſera facile de voir combien de fois chacun de ces petits nombres eſt la ſomme de deux quarrez, en ôtant les quarrez moindres, comme on voit au quatriéme exemple.

Or on voit que chacun deſdits nombres qui ſont puiſſances d'un nombre premier, n'eſt qu'une ſeule fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux ; de ſorte qu'il ne reſte plus qu'à voir combien de fois il eſt la ſomme de deux quarrez compoſez entr'eux, c'eſt-à-dire, qui ont une commune meſure ; ce qui ſe fera aiſément comme il s'enſuit.

Il faut voir combien de fois le nombre ſe peut diviſer en deux parties, dont l'une ſoit un quarré, & compter combien de fois chacune des ſommes rélatives eſt la ſom-

me de deux quarrez premiers entr'eux ; car autant de fois le nombre donné eſt la ſomme de deux quarrez multiples, & qui ont l'autre partie rélative, qui eſt un quarré pour commune meſure.

Par-là on voit qu'un quarré, dont la racine eſt un nombre premier, n'eſt qu'une fois la ſomme de deux quarrez non plus que ſa racine. Que le cube & le qq. ſont chacun deux fois la ſomme de deux quarrez.

Que la cinquiéme & ſixiéme puiſſance ſont chacune trois fois la ſomme de deux quarrez, & ainſi continuant.

D'où il ſera facile de faire une régle pour trouver combien de fois chaque puiſſance, dont la racine eſt un nombre premier, eſt la ſomme de deux quarrez ; ſçavoir en prenant les expoſans deſdites puiſſances, & conſiderant de quelle façon on tirera 1 des expoſans 1 & 2, & comment on aura 2 par 3 & 4, &c. Car on voit que ſi on prend la moitié de l'expoſant lorſqu'il eſt pair, ou le milieu lorſqu'il eſt impair, on aura ce qu'on cherche.

Il faut maintenant voir ce qui appartient aux nombres qui ſont meſurez par pluſieurs nombres premiers, qui ſurpaſſent de l'unité un multiple de 4.

Je trouve dans la table 65 & 85, dont le premier a 5 & 13 pour parties, & le ſecond 5 & 17, & chacun deſdits nombres eſt deux fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux. Pour des quarrez multiples il n'y en a point, parce qu'aucun deſdits nombres n'a de quarré pour partie.

On trouvera auſſi que ſi le nombre donné a pour parties trois nombres premiers comme 1105, qui eſt produit par 5, 13, 17, il ſera quatre fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux, comme on a vû au quatriéme exemple, & il ne peut être la ſomme de deux quarrez multiples, parce qu'il n'a point de partie quarrée. On verra audit quatriéme exemple combien de fois chaque nombre eſt la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux, car ils le ſont autant de fois qu'ils ſont hypotenuſes primitives, comme il a été dit.

Mais si le nombre donné peut être mesuré par quelque quarré, il sera la somme de quarrez multiples autant de fois que la partie rélative est la somme de deux quarrez primitifs. Et pour avoir une régle par laquelle je puisse trouver la multitude des couples de quarrez, sans avoir la peine de les déchifrer tous par la consideration de toutes les parties quarrées; je chercherai, par ce qui a été dit, la multitude des couples de quarrez de plusieurs nombres, & après en avoir quelques-uns, je verrai quelle régle on pourra donner qui leur convienne à tous; & afin d'éviter la difficulté de cette recherche, je choisirai les moindres nombres, sçavoir ceux qui ne sont mesurez que par deux nombres premiers.

Ainsi je trouve qu'un nombre composé de deux nombres premiers, comme 65, dont les parties sont 5 & 13, est deux fois seulement la somme de deux quarrez.

Si les parties du nombre sont un quarré & une racine, il sera trois fois la somme de deux quarrez, car il aura deux primitifs & un multiple.

Si les parties sont un cube & une racine, il sera quatre fois la somme de deux quarrez.

Si les parties sont un quarré quarré & une racine, il sera cinq fois.

Si les parties sont deux quarrez, il sera quatre fois la somme de deux quarrez.

Si c'est un quarré & un cube, il sera six fois, &c.

Je vois ici que la grandeur des parties ne fait rien à la multitude des couples de quarrez; par exemple, 17 ou son quarré 289, pour être plus grand que 5 ou son quarré 25, n'est pas pour cela plus de fois la somme de deux quarrez; mais l'augmentation des puissances augmente cette multitude: ainsi une cinquiéme puissance donne trois couples, & un quarré n'en a qu'une.

Il faudra donc considerer seulement lesdites puissances, lesquelles seront commodément représentées par leurs exposans.

Je ferai donc une petite table des parties de quelques nombres, ausquelles on mettra les exposans desdites parties au lieu d'icelles parties, comme on voit ici.

Car par exemple, 1, 2 signifient que les parties du nombre sont une racine, ou nombre premier, & un quarré; & ensuite on met 3 séparé d'une ligne, qui montre que le nombre dont les parties sont un quarré, & un nombre premier, est trois fois la somme de deux quarrez.

Or voici comme on trouvera ladite multitude de couples de quarrez. Par exemple, on veut sçavoir combien de fois un nombre, dont les parties sont un quarré & une cinquiéme puissance, est la somme de deux quarrez.

Premiérement, parce qu'il se mesure par deux nombres premiers, je conclus qu'il est deux fois la somme de deux quarrez premiers entr'eux.

1	1	2
1	2	3
1	3	4
1	4	5
1	5	6
2	2	4
2	3	6
2	4	7
2	5	9
2	6	10
3	3	8
3	4	10
3	5	12
3	6	14

Reste donc à trouver les couples des quarrez multiples.

Pour les trouver je divise le nombre en deux parties rélatives, l'une desquelles soit un quarré, & ce en toutes les façons possibles.

Pour le faire avec plus de facilité, je nommerai les parties, que l'une soit A. q. & l'autre B. cinquiéme puissance.

Je prendrai donc A. q. pour une des parties rélatives; l'autre partie sera B. cinquiéme puissance, laquelle n'est qu'une fois la somme de deux quarrez premiers entr'eux, comme il a été dit, je marque donc 1 ensuite. Puis je prens B. q. pour une des parties : la rélative sera A. q. par B. cube, qui

A. q. --- B. 5me puiss.	1
B. q. --- A. q. par B. cub.	2
B. qq. -- A. q. par B.	2
B. q. par A. q. --- B. cub.	1
B. qq. par A. q. --- B.	1
Somme	7

qui eſt deux fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux : je marque donc 2 enſuite.

Et ainſi continuant à prendre les parties quarrées comme on voit ici, on aura les primitifs de la partie rélative, qui donneront autant de multiples au nombre total, puiſque les quarrez primitifs appartenans à la ſeconde partie, ſont tous deux multipliez par la premiere partie qui eſt un quarré.

On aura donc 7 multiples, qui étant joints aux deux primitifs, qui ſont particulierement affectez au nombre total, font en tout 9 couples de quarrez dont la ſomme eſt ledit nombre qui a pour parties un quarré & une cinquiéme puiſſance.

Il faut donc de la multitude des couples de pluſieurs nombres inferer quelque régle pour trouver ladite multitude.

Or je ne trouve point de régle par laquelle je puiſſe trouver à tous la multitude des quarrez par l'inſpection des expoſans des puiſſances deſdites parties.

Auſſi leſdits expoſans n'expriment pas ladite multitude de couples de quarrez, comme ils faiſoient aux hypotenuſes pour en exprimer la multitude. Car, par exemple, une cinquiéme puiſſance eſt bien cinq fois hypotenuſe, mais elle n'eſt que trois fois la ſomme de deux quarrez; & une ſixiéme puiſſance qui eſt ſix fois hypotenuſe, n'eſt auſſi que trois fois la ſomme de deux quarrez.

Expoſans.				
1	1	1	1	2
1	2	1	1'	3
1	3	1	2	4
1	4	1	2'	5
1	5	1	3	6
2	2	1'	1'	4
2	3	1'	2	6
2	4	1'	2'	7
2	5	1'	3	9
2	6	1'	3'	10
3	3	2	2	8
3	4	2	2'	10
3	5	2	3	12
3	6	2	3'	14

On mettra donc la multitude deſdites couples de quarrez enſuite des expoſans, comme on voit ici, pour s'en ſervir au lieu deſdits expoſans.

Mais parce que les puissances dont l'exposant est pair, n'ont pas une plus grande multitude de couples de quarrez que la précédente puissance dont l'exposant est impair ; il semble qu'il est à propos de ne pas obmettre cette condition, & partant je marque d'un accent le nombre de multitude appartenant aux puissances paires.

Ainsi ensuite des exposans 1, 2, je mets les nombres de multitude 1, 1′ ; & après les exposans 2, 4, je mets 1′, 2′, & je me servirai desdits nombres de multitude 1, 1′, pour trouver 3 qui est ensuite ; & de 1′, 2′, pour trouver 7 qui est après.

Mais parce que je voi que les mêmes nombres de multitude qui appartiennent aux exposans ne donnent pas le même nombre de multitude pour le nombre donné, & que ceux qui sont marquez, sçavoir ceux dont l'exposant est pair, donnent un plus grand nombre que ceux dont l'exposant est impair ; il est manifeste qu'il faut avoir égard à la qualité des exposans, ce qui consiste à voir s'il est pair ou impair ; car, par exemple, 1, 2, provenans de 1 & 3 donnent 4 ; mais les mêmes 1, 2′, provenans de 1, 4, donnent 5 ; & si les mêmes 1′, 2, viennent de 2, 3, ils donneront 6 ; & venant de 2, 4, ils donneront 7.

Exposans.				
1	1	1	1	2
1	2	1	1′	3
1	3	1	2	4
1	4	1	2′	5
1	5	1	3	6
2	2	1′	1′	4
2	3	1′	2	6
2	4	1′	2′	7
2	5	1′	3	9
2	6	1′	3′	10
3	3	2	2	8
3	4	2	2′	10
3	5	2	3	12
3	6	2	3′	14

De là on voit manifestement qu'on ne peut donner une même regle generale, puisque les mêmes nombres 1, 2, donnent quatre nombres differens ; mais il faudra distinguer si les exposans dont lesdits 1, 2, ou autres nombres sont dérivez, sont pairs ou impairs.

Cette diversité se peut considérer en trois façons : car ou les deux exposans sont tous deux impairs, ou ils sont

tous deux pairs, ou l'un eſt pair & l'autre impair.

Je chercherai donc ſéparément des regles pour chacune de ces trois façons.

Et premierement quand les expoſans ſont tous deux impairs. Le premier exemple de la Table eſt quand les expoſans des parties du nombre donné ſont 1, 1, les nombres de multitude qui leur appartiennent ſont auſſi 1, 1; je regarde comment je ferai 2 avec 1, 1, & je voi que ſi on prend la ſomme deſdits 1 & 1 on aura 2.

Je prens un autre exemple, ſçavoir le troiſiéme où les expoſans ſont 1, 3, & leur nombre de multitude ſont 1, 2: or la ſomme de 1, 2, n'eſt pas 4 ainſi qu'il ſeroit requis, & partant ce n'eſt pas là la regle.

Je chercherai donc 2 avec 1 & 1 d'une autre ſorte, & je trouve que le double du produit de 1 par 1 eſt 2.

Et conſidérant les autres exemples où les deux expoſans ſont tous deux impairs, je trouve les nombres qui appartiennent à chacun d'iceux en la même ſorte; car le double du produit de 1, 2, qui appartiennent à 1, 3, eſt 4, & ainſi des autres; d'où je conclus que la regle eſt bonne.

Je paſſe aux expoſans qui ſont tous deux pairs. Le premier exemple eſt celui dont les expoſans ſont 2 & 2, leurs nombres ſont 1′, 1′, (ſçavoir la moitié d'iceux, & aux expoſans impairs le milieu,) je cherche le moyen de faire 4 avec 1 & 1.

Pour ſuivre le plus que je pourrai la premiere méthode, il faudra que je prenne le produit de 1 par 1, lequel eſt 1 dont le quadruple ſera 4. Mais il n'en ira pas de même aux expoſans 2 & 4, car les nombres qui leur appartiennent ſçavoir 1′ & 2′, donneroient 8, & non pas 7, ainſi qu'il eſt requis.

J'eſſayerai donc à faire 4 par le moyen des mêmes 1′ & 1′ du premier exemple d'une autre façon, en ſuivant encore le plus que faire ſe pourra la premiere méthode.

On prendra donc encore le produit de 1 par 1, lequel

eſt 1 ; ſon double eſt 2, auquel joignant les mêmes 1 & 1, on aura 4, ainſi qu'il eſt eſt requis.

Je prens enſuite les expoſans 2 & 4 : les nombres qui leur appartiennent, ſçavoir leur moitié eſt 1 & 2, leur produit eſt 2 dont le double eſt 4, auquel joignant les mêmes 1 & 2, on aura 7, qui eſt le nombre qu'il falloit avoir.

J'éprouve la même choſe aux expoſans 2 & 6, & trouve 10, d'où je conclus que la regle eſt bonne.

Je paſſe par après à la troiſiéme diſtinction, ſçavoir quand l'un des expoſans eſt pair, & l'autre impair. Le premier exemple eſt quand les expoſans ſont 1 & 2, leur milieu & moitié ſont 1 & 1′, avec leſquels il faut trouver 3. Je prens comme auparavant le produit de 1 par 1, qui eſt 1, ſon double eſt 2.

Or puiſque les deux expoſans étant impairs on prend ſimplement le double du produit ſans rien ajouter, & lorſque leſdits expoſans ſont tous deux pairs on ajoute au double du produit les deux nombres qui ſe ſont multipliez, il ſe pourra faire que quand l'un des expoſans eſt pair & l'autre impair, il faudra ſeulement ajouter un des nombres au double du produit ſuſdit.

Partant audit produit 2 j'ajoute l'un des nombres, ſçavoir 1 pour avoir 3.

Mais parce que chacun des nombres qui ſe ſont multipliez eſt 1, je ne puis encore ſçavoir ſi c'eſt celui qui vient de l'expoſant pair, ou celui qui vient de l'impair.

Je prens donc un autre exemple, ſçavoir le ſuivant auquel les expoſans ſont 1 & 4. Les nombres qui en dépendent ſont 1, 2′, le double de leur produit eſt 4 ; mais parce qu'il faut avoir 5, on ajoutera 1 audit 4 : or cet 1 eſt le nombre qui provient de l'expoſant impair ; je dirai donc qu'au double du produit il faut ajouter le milieu de l'expoſant impair.

Je regarde aux autres exemples ſi la même choſe arri-

vera comme à ceux dont les exposans sont 1, 6,] 2, 3,] 2, 5, &c. & je trouve que cette regle convient à tous, d'où je conclus qu'elle est bonne.

Il faut maintenant voir quand le nombre donné sera mesuré par trois nombres premiers differens; par exemple, si ses parties sont un nombre premier, un quarré & un cube, lesquelles soient A. B. q. & C. cub.

Je les mets en deux parties rélatives, en telle sorte que l'une soit un quarré, & je prens les primitifs de la partie rélative au quarré que je mets ensuite. Par exemple, prenant C. q. pour une des parties, la rélative sera A. par C. par B. q. laquelle contenant trois sortes de nombres premiers, elle sera quatre fois la somme de deux quarrez premiers entr'eux; je mets donc 4 ensuite, & ainsi des autres.

B. q.	---- A. par C. cub.	2
C. q.	---- A. par C. par B. q.	4
B. q. par C. q.	---- A. par C.	2

Et assemblant tous lesdits primitifs des parties qui seront multiples au nombre total, je trouve huit multiples, ausquels joignant les quatre primitifs dudit nombre total, on aura en tout douze couples de quarrez, desquels le nombre donné est la somme.

Il faut donc trouver 12 par le moyen des exposans 1, 2, 3, ou des nombres qui leur appartiennent 1, 1′, 2.

Et premierement de 1 & 1′ j'ai 3. Je prendrai donc 3 au lieu de 1, 1′, & ainsi j'aurai 3 & 2 : leur produit est 6 dont le double est 12, qui est la multitude requise des couples de quarrez.

On pourroit ici trouver quelque difficulté sur le 3 qui provient de 1 & 1′, sçavoir s'il doit être pris comme venant d'un exposant pair ou d'un impair, puisqu'il provient de tous les deux ensemble; mais la regle nous montre que l'impair prévaut ici, car autrement il faudroit ajouter un des nombres au double du produit 12.

Mais ici il faut considérer que l'exposant pair montre

que l'exposé est quarré, & l'exposant impair montre que l'exposé n'est pas quarré : si donc le nombre de multitude est celui qui provient de plusieurs exposans, ou qui est la moitié ou milieu d'un desdits exposans, ce nombre de la multitude appartient à un nombre quarré, & il doit être réputé provenir d'un pair : mais si ledit nombre de multitude appartient à nombre non quarré, il doit être réputé comme provenant d'un impair. Si donc entre les parties analogiques d'un nombre, il s'en trouve une qui ne soit point quarrée, le nombre ne sera point quarré, & les parties non quarrées auront leurs exposans impairs.

D'où il s'ensuit qu'entre plusieurs exposans, s'il y en a quelqu'un qui soit impair, le nombre qui est produit par les parties à qui appartiennent lesdits exposans, suit la loy des exposans impairs.

Ainsi en notre exemple, ayant premierement travaillé sur les exposans 1 & 2, qui donnent 3 pour le nombre de la multitude, ledit 3 doit être réputé comme provenant d'un exposant impair, parce qu'entre les exposans dont il provient il y en a un impair, ce qui fait que le nombre qui est trois fois la somme de deux quarrez n'est pas quarré, & partant son exposant doit être réputé impair.

On trouvera le même nombre 12 en mêlant autrement lesdits exposans. Comme si je multiplie à part les nombres 1, 2, provenans des exposans 1 & 3, j'aurai 4. L'autre exposant est 2, son nombre est 1′, je multiplie donc 1′ par 4, le produit est 4, dont le double est 8, auquel il faut ajouter le nombre qui provient de l'exposant impair, sçavoir 4, puisque l'autre nombre 1′ provient d'un exposant pair, & on aura 12 comme cy-devant.

SIXIE'ME EXEMPLE.

TRouver tous les triangles qui ont un nombre donné pour difference de leurs moindres côtez.

Afin de trouver tout ce qui dépend de la connoissance

des nombres qui ſervent de difference aux côtez des triangles, je fais pluſieurs triangles primitifs de ſuite, & je prens leur difference, en laiſſant les multiples, parce qu'ils ne peuvent rien avoir qui ne vienne des primitifs.

On voit ici tous les triangles primitifs dont les hypotenuſes ſont moindres que 100, & après eux eſt la difference de leurs moindres côtez.

Or pour remarquer ce qu'il y a de particulier dans leſdits nombres qui ſervent de difference, je trouve qu'ils ſont premiers ou compoſez de nombres que je trouve auſſi dans la Table, comme 49 qui eſt le quarré de 7; de plus ces nombres premiers (ſi on en excepte 1) ſont tous differens de l'unité d'un multiple de 8, & je ne trouve aucun nombre dans ladite Table qui n'ait cette condition.

3	4	5	1
5	12	13	7
8	15	17	7
7	24	25	17
20	21	29	1
12	35	37	23
9	40	41	31
28	45	53	17
11	60	61	49
16	63	65	49
33	56	65	23
48	55	73	7
13	84	85	71
36	77	85	41
39	80	89	41
65	72	97	7

Maintenant il faut voir comment on pourra trouver tous les triangles, la difference des moindres côtez étant donnée.

Je prendrai par exemple 7, & par ſon moyen je chercherai une regle pour trouver les triangles 5, 12, 13 & 8, 15, 17. Mais parce que 7 eſt nombre premier, & qu'il ſert de difference à pluſieurs triangles, il faut de néceſſité qu'il y ait quelqu'autre proprieté par laquelle on puiſſe trouver leſdits triangles, autrement ils ne ſe pourroient pas trouver; car quoique je ſçache que 7 eſt different de l'unité d'un multiple de 8, cela ne me donne autre choſe, ſinon que 7 eſt proche du premier octonaire, ce qui ne pourra pas ſuffire pour trouver les deux triangles ſuſdits, & les autres qui ſont encore enſuite.

Or en considérant 7, je voi qu'il est la difference entre 1 & 8, & entre 2 & 9, sçavoir entre un quarré & un double quarré. Je regarderai donc si les autres nombres qui servent de difference entre les moindres côtez d'un triangle sont aussi la difference d'un quarré & d'un double quarré.

Et sans examiner 1 qui sert de difference entre 1, 2, & 8, 9, & autres, je viens à 17 qui sert de difference entre 1 & 18, & entre 8 & 25; de même 23 sert de difference entre 2 & 25, & entre 9 & 32, & chacune desdites couples contient un quarré & un double quarré.

De plus, je remarque qu'à chacune de ces couples il y a un des nombres moindres que la difference d'entr'eux; ainsi à la couple 9, 32, le moindre nombre 9 est moindre que 23 qui en est la difference.

Je verrai donc si par cette proprieté je trouverai que 7 est la difference entre les moindres côtez des deux triangles 5, 12, 13, & 8, 15, 17.

Voici comme il faut s'y prendre.

7 sert de difference entre 1 & 8, & entre 2 & 9. Je prens leurs racines qui sont 1, 2″, & 1″, 3. Je marque les racines des doubles quarrez, afin de les connoître d'avec celles des quarrez, car on voit bien qu'il faut comparer la racine du double quarré avec le nombre dont elle provient d'une autre maniere que celle du quarré simple, & qu'elles doivent produire un effet different l'une de l'autre.

Je mets donc 7, & ensuite les racines des deux couples susdites, comme on voit ici; sçavoir 1, 2″, & 1″, 3.

7	1	2″	2	3
	1″	3	1	4

Je considére par après les deux triangles qu'il faut trouver, sçavoir 5, 12, 13, & 8, 15, 17, je prens les quarrez dont ils proviennent, qui sont 4, 9; & 1, 16.

Leurs racines sont 2 & 3,] & 1, 4, que j'écris aussi ensuite. Car

Car il faut remarquer que d'ordinaire la solution se trouve plus aisément par le moyen des racines que par les quarrez, de sorte que quand on aura des quarrez, si on ne trouve pas aisément par leur moyen ce qu'on cherche, on l'éxaminera par les racines, ce qui sert aussi à rendre la recherche plus facile par la septiéme regle, sçavoir en se servant de moindres nombres.

Il faut donc par le moyen de 1, 2″, & 1″, 3, trouver 2, 3, & 1, 4, sçavoir par les racines des quarrez & doubles quarrez dont 7 est la difference, trouver les racines des quarrez qui font les triangles qui ont 7 de difference entre leurs moindres côtez.

Je voi que 1″, 2″, sont les racines des moindres quarrez desdits triangles, & les deux grandes 3 & 4, se pourront trouver prenant en croix la somme de 1″, 2″, & de 1, 3.

7	1′	2″	2	3
	1″	3′	1	4

On pourroit dire aussi que la somme & la difference de 1′ & 3′, donnent 2 & 4, qui sont les racines des quarrez pairs des triangles; & la somme & la difference de 1″, 2″, donnent 1 & 3, qui sont les racines des quarrez impairs.

Mais on pourroit encore se servir d'une seule couple pour un triangle; sçavoir si on prend la racine du double quarré pour une des racines, & la somme des deux pour l'autre.

Ainsi à la premiere couple 1′, 2″,] 2 sera une des racines requises, & 3 qui est la somme de 1 & 2 sera l'autre.

Et à l'autre couple 1″, 3′,] 1 sera l'une des racines, & la somme de 1, 3, sçavoir 4, sera l'autre.

Et cette derniere façon si elle est bonne, comme il y a quelque apparence, sera plus commode, puisque chaque couple donne un triangle.

Ce qui me fait présumer qu'elle est bonne, est que les autres ne peuvent pas servir pour les triangles qui ont 1 de

difference entre leurs côtez ; car 1 eſt la difference entre le quarré & double quarré 1, 2, le moindre deſquels ſçavoir 1 n'eſt pas plus grand que ladite difference 1.

Voici donc comme je l'éxaminerai à 1.

Les racines du quarré & double quarré ſuſdit ſont $1'$ & $1''$, donc 1 ſera une des racines, (ſçavoir prenant la racine du double quarré) & 2 qui eſt la ſomme des deux racines $1'$ & $1''$ ſera l'autre racine : on aura donc 1, 2, dont les quarrez 1, 4, donnent le triangle 3, 4, 5, qui a 1 de difference entre ſes moindres côtez.

Le même 1 eſt encore la difference entre le quarré, & le double quarré 8 & 9, dont les racines ſont $2''$, $3'$.

On aura donc pour les racines des quarrez 2 & 5, ſçavoir la racine du double quarré, & la ſomme des deux.

Leſdits 2 & 5 donneront le triangle 20, 21, 29, qui a 1 de difference entre ſes moindres côtez.

Il faut maintenant examiner les deux premieres regles ſur 17. Les quarrez & doubles quarrez dont il eſt la difference ſont 1, 18, & 8, 25. Leurs racines ſont $1'$, $3''$, & $2''$, $5'$.

Je les diſpoſe comme auparavant.

17	$1'$	$3''$	3	5
	$2'$	$5'$	2	6

Par la premiere regle, je prendrai 3 & 2 pour les racines des moindres quarrez requis, & les ſommes de $2''$, $3''$, & de $1'$, $5'$, pour les autres ; mais on ne pourra pas faire par ce moyen les triangles requis, car on auroit les quarrez de 3 & 5, & de 2, 6, qui donneroient des triangles auſquels les trois côtez ſeroient pairs, & partant la difference qui ſeroit paire ne ſeroit pas 17.

Que ſi on vouloit accoupler autrement 5 & 6, & qu'on prit 2, 5, & 3, 6, on n'auroit pas auſſi le triangle requis, car les quarrez de 3 & 6 étant multiples de 3, donneroient un triangle auquel tous les côtez ſeroient meſurez par 3, & partant la difference des côtez ne pourroit pas être 17, puiſqu'elle-même ſeroit auſſi meſurée par 3, & partant

la premiere façon de trouver les triangles n'eſt pas bonne. Venons à la ſeconde.

La ſomme & la difference de $1'$, $5'$, ſont les racines des quarrez pairs, & la ſomme & la difference de $2''$, $3''$, ſont les racines des quarrez impairs: mais cette regle ne réüſſit pas non plus que la premiere, quoiqu'elle ait plus d'apparence d'être bonne, car par la premiere, après qu'on a pris $2''$, $3''$, pour les racines des moindres quarrez, on prend par après les ſommes de $2''$, $3''$, & de $1'$, $5'$, pour les racines des deux autres quarrez; d'avoir pris $2''$ pour un triangle, & $3''$ pour l'autre, cela va bien, parce qu'il y a de la reſſemblance entre $2''$ & $3''$: mais de prendre par après la ſomme de $2''$, $3''$, pour un des triangles, & celle de $1'$, $5'$, pour l'autre, ce ſont des façons differentes, parce que $2''$, $3''$, ſont racines de doubles quarrez, & $1'$, $5'$, de quarrez ſimples.

17	$1'$	$3''$	4	5
	$2''$	$5'$	1	6

La ſeconde façon n'a pas cette répugnance, les racines de chaque triangle étant égales à la ſomme & à la difference de $1'$, $5'$, & de $2''$, $3''$; néanmoins parce que l'on prend pour le premier la difference des racines des quarrez ſimples & la ſomme de celles des doubles quarrez, & le contraire pour le ſecond triangle; cette diverſité fait qu'elle ne réüſſit pas.

La troiſiéme voye eſt plus réguliere, & les triangles ſe trouvent par des façons entierement ſemblables, auſſi eſt-ce la vraye méthode de trouver les triangles.

On ſe ſert de chaque couple à part, prenant la racine du double quarré pour la moindre racine, & la ſomme des deux quarrez pour l'autre.

17	1	$3''$	3	4
	$2''$	5	2	7

Ainſi 3 eſt la racine du moindre quarré d'un des triangles, & 4 qui eſt la ſomme de $3''$ & 1, eſt l'autre racine.

Les deux racines ſont donc 3 & 4, qui donnent le triangle 7, 24, 25, qui a 17, pour difference de ſes côtez.

L'autre triangle se trouvera de la même maniere, sçavoir prenant la racine du double quarré 2 pour celle du moindre quarré, & la somme de 2 & 5 sçavoir 7, pour racine de l'autre quarré. On aura donc 2 & 7 pour racines, qui donnent le triangle 28, 45, 53, qui a 17 de difference entre ses côtez.

La même chose se fera aux autres nombres, car des couples de 23, sçavoir de 3, 4″, & 1″, 5, on trouvera les triangles 33, 56, 65, & 12, 35, 37, qui ont 23 de difference entre leurs côtez.

23	3	4″	4	7
	1″	5	1	6
31	1	4″	3	5
	3″	7	3	10

Et des couples de 31 on trouvera les triangles 9, 40, 41, & 60, 91, 109, qui ont 31 de difference, d'où l'on peut inférer que la regle est bonne.

Voilà donc le moyen de trouver les triangles qui ont un nombre donné pour difference de leurs côtez, mais la question demande tous lesdits triangles.

Il faut donc voir combien il y en doit avoir, & s'il y en a quelque nombre déterminé; & pour cet effet j'ai recours à la Table qu'on a faite en commençant d'éxaminer la question, dans laquelle je voi qu'un même nombre sert à plusieurs triangles, car il y en a 4 qui ont 7 pour difference.

Je considére aussi qu'il n'y a point de répugnance qu'un même nombre serve de difference aux moindres côtez d'une infinité de triangles, vû même qu'il y en a une infinité qui n'ont que 1 de difference entre le grand côté & l'hypotenuse, & je conclus qu'il se pourroit bien faire aussi qu'il y auroit une infinité de triangles qui auroient un même nombre pour difference de leurs moindres côtez.

Et ce qui me confirme en cette opinion, est que je voi quatre triangles qui ont un nombre premier, sçavoir 7 pour difference. Or les nombres premiers ne sont pas si abondans, lorsque la chose est limitée; comme on voit que les

mêmes nombres sont aussi la somme des susdits côtez des triangles : mais parce que cela est limité, & qu'il est impossible qu'ils soient la somme des côtez d'une infinité de triangles, on voit que les nombres premiers comme 7, 17, &c. ne sont chacun la somme des côtez que d'un seul triangle.

Or si chaque nombre sert de difference entre les moindres côtez d'une infinité de triangles, il est nécessaire qu'il y ait quelque progression qui conduise à cette infinité de triangles ; & s'il y a une progression, & qu'on sçache les deux moindres termes, & la difference des nombres de ladite progression, on la pourra poursuivre aussi loin qu'on voudra.

Je cherche donc dans ma Table deux triangles qui ayent une même difference entre leurs moindres côtez, & je prens les triangles les plus proches. Ainsi 5, 12, 13, & 8, 15, 17, ont tous deux 7, de difference entre leurs côtez.

Il faudroit voir si on pourroit avec le moindre faire le plus grand : mais parce que les racines des quarrez qui font le triangle sont plus simples que les côtez du même triangle, je prens lesdites racines qui sont 2, 3, & 1, 4 ; mais on ne peut pas trouver une suite qui avec 2, 3, donne 1, 4, ou avec 1, 4, donne 2, 3, & qui continuë à l'infini en augmentant : car si on prend 2, 3, pour le premier terme, & qu'on trouve 1 au second, cela iroit en diminuant ; de même qui prendroit 1, 4, pour le premier, le second auroit 3 pour sa plus grande racine qui seroit moindre que la plus grande du précédent, & ainsi on iroit encore en diminuant.

Il faut donc afin que la progression aille en augmentant, que chacun des termes augmente, ou au moins que le grand terme augmente, & que le moindre ne diminuë point.

Je conclus de là que les deux triangles susdits sont

chacun le commencement de quelque progression.

Il faut donc prendre dans la table quelqu'autre triangle plus grand qui ait pareil nombre de 7, pour difference entre ses moindres côtez. Je trouve 48, 55, 73.

Les racines des quarrez dont il provient sont 3 & 8.

Mais parce qu'on ne voit pas d'où peut provenir ce 3 & 8, sçavoir si c'est de 2, 3, ou de 1, 4, je choisirai plûtôt dans la table une autre difference pour l'examiner, puisque j'y vois deux triangles assez éloignez l'un de l'autre qui ont chacun l'unité pour difference entre leurs côtez.

Joint aussi que pour plus grande facilité la méthode requiert qu'on se serve du moindre nombre possible en l'examen. Mais (pour retourner à notre 7) si on vouloit juger duquel des deux triangles dépend 48, 55, 73, sçavoir si c'est de 5, 12, 13, ou de 8, 15, 17, il faudroit voir si c'est le premier qu'on rencontre après les deux susdits, & s'il n'y en a point dont les côtez soient moindres, & parce que je trouve que c'est le moindre après les deux susdits, je conclurai qu'il provient du moindre des deux premiers, sçavoir de 5, 12, 13, qui est moindre que 8, 15, 17.

Je trouve donc 3, 4, 5, qui a 1 de difference, & ensuite 20, 21, 29. Les racines de leurs quarrez sont 1, 2, & 2, 5.

Je les dispose comme on voit ici, & je regarde comment je pourrai de 1, 2, tirer 2, 5. Et premierement je vois que le moindre nombre de la seconde couple est égal au plus grand de la premiere, car chacun d'iceux est 2.

1	2
2	5
5	12

Reste donc à faire 5 avec 2, & 1. Le 5 est la somme des trois nombres que j'ai déja, sçavoir de 2, 2, & 1, ou (ce qui est la même chose) il est la somme du moindre nombre 1, & du double de 2 qui est le plus grand.

Je continuë par-aprés cette progreſſion de la même ſorte, prenant le plus grand nombre 5 pour le moindre de la couple ſuivante, & pour avoir le plus grand j'ajoûte 2 au double de 5 pour avoir 12.

1	2	3	4	5
2	5	20	21	29
5	12	119	120	169
12	29	696	697	985

J'ai donc 5 & 12 dont les quarrez donnent le triangle 119, 120, 169, qui a 1 de difference entre ſes moindres côtez.

De la même façon avec 5 & 12, on fera 12, 29, qui donneront le triangle 696, 697, 985.

J'appliquerai par-aprés cette méthode aux autres nombres.

2	3	5	12	13	1	4	8	15	17
3	8	48	55	73	4	9	65	72	97
8	19	297	304	425	9	22	396	403	565

Et avec 2, 3, je ferai les racines 3 & 8, prenant 3 pour la moindre, & la ſomme de 2, & du double de 3 pour la plus grande, qui donneront le triangle 48, 55, 73.

Et avec 3 & 8, on fera 8 & 19, & ſon triangle 297, 304, 425.

Semblablement avec 1 & 4 on fera 4 & 9 & ſon triangle 65, 72, 97, & avec 4 & 9, on fera 9, 22, & ſon triangle 396, 403, 565.

Et ainſi à toutes ſortes de nombres, pourvû qu'on ſçache un des triangles, on trouvera les autres, mais il faut auſſi avoir égard aux multiples.

Or ces multiples ſont faciles à trouver quand on ſçait les primitifs, & ce qu'on doit ici remarquer eſt que tout nombre excepté 1, ſert de difference entre les moindres côtez d'un infinité de triangles multiples, parce que tout nombre eſt multiple de 1, lequel 1 ſert de difference entre les moindres côtez d'un triangle.

Ainſi 7 ſert de difference entre les côtez des triangles

5, 12, 13, & 8, 15, 17, & de ceux qui en proviennent; mais outre cela parce que 7 est multiple de 1, il sera encore la difference des côtez des triangles multiples par 7, de 3, 4, 5, de 20, 21, 29, & de leur suite; sçavoir de 21, 28, 35,] 140, 147, 203, & des autres.

Il en est de même des autres nombres, & s'ils étoient composez, il y auroit beaucoup plus de multiples; au moins il y auroit plus de principes dont ils proviennent.

Il y a plusieurs autres choses à considerer sur ce sujet, dont on a parlé au discours des triangles au chapitre qui traite de la somme & de la difference des deux moindres côtez : mais ceci suffira pour faire découvrir le reste.

TROUVER UN TRIANGLE *auquel tant l'hypotenuse que la somme des deux autres côtez soit un quarré.*

Voici le triangle.

4687298610289 hypotenuse.
4565486027761 côté impair.
1061652293520 côté pair.

C'est la question que l'exemple 7 suivant nous enseigne à chercher par tant de moyens.

TROUVER UN TRIANGLE *duquel l'aire ajoûtée aux deux petits côtez fasse un quarré.*

Voici le triangle.

205769.
190281.
78320.

TROUVER UN TRIANGLE *dont l'aire jointe à l'hypotenuse donne un quarré.*

C'est 17, 144, 145.

TROUVER

TROUVER UN TRIANGLE dont l'aire jointe au petit côté faſſe un triangle.

C'eſt 3, 4, 5,] 16, 30, 34.
Et le troiſiéme eſt 105, 208, 233.

SEPTIE'ME EXEMPLE.

TRouver un triangle auquel tant l'hypotenuſe que la ſomme des deux autres côtez ſoit un quarré.

Puiſque la queſtion requiert deux choſes, ſçavoir l'hypotenuſe quarrée & la ſomme des deux côtez auſſi quarrée, je chercherai les moyens de faire chacun ſéparément, & je verrai ſi l'un étant quarré l'autre le peut être auſſi, ſuivant ce qui a été dit au neuviéme précepte.

Je chercherai premiérement tous les triangles qui ont un quarré pour la ſomme de leurs moindres côtez.

Je ſuppoſe donc qu'on ait examiné quels nombres doivent être la ſomme des deux moindres côtez des triangles, & qu'on ait trouvé que ce ſont des nombres premiers differens de l'unité d'un multiple de 8, ou qui ſont compoſez deſdits nombres premiers ſeulement.

Je prens donc les quarrez deſdits nombres, ſçavoir de 7, 17, 23, 31, &c. & je cherche leurs triangles pour voir ſi quelqu'un d'entr'eux aura un quarré pour ſon hypotenuſe.

Pour avoir leſdits triangles il faut avoir les couples de quarrez & doubles quarrez, dont la difference eſt la ſomme des deux moindres côtez du triangle. Et parce que tous les nombres dont on ſe doit ſervir ſont quarrez, il faut voir ſi par le moyen de leurs racines, on ne pourra point trouver les couples de quarrez, & doubles quarrez qui leur appartiennent.

Pour trouver cela on ſe ſervira des méthodes ordinaires, prenant des nombres connus; par exemple, je ſçais que 7 eſt la difference de 1, 8, & de 2, 9, dont les racines

ſont 1, 2″, & 1″, 3. Je ſçais auſſi que ſon quarré 49 eſt la difference de 1, 50, & de 32, 81, dont les racines ſont 1, 5″, & 4″, 9.

1	2″	1	5″
1″	3	4″	9

Il faut donc par le moyen de 1, 2″, & 1″, 3, trouver 1, 5″, & 4″, 9. On donneroit bien pluſieurs moyens de paſſer de l'un à l'autre, mais ils ne conviennent pas aux autres nombres. En voici un qui convient à tous.

Je prens le produit des deux couples, ſçavoir de 1 par 2, & de 1 par 3, pour avoir 2 & 3. Leur ſomme eſt 5 qui eſt le côté du double quarré, leur difference eſt 1 qui eſt le côté du quarré de la même couple. On aura donc 1, 5″, pour une des couples.

L'autre ſe trouvera aiſément, ſçavoir en prenant la difference de 1 & 5 pour côté du double quarré de l'autre couple, & la ſomme des racines des doubles quarrez, ſçavoir de 4″ & 5″ pour la racine du quarré de ladite ſeconde couple.

On aura donc ainſi les deux couples, 1, 5″, & 4″, 9.

J'éprouve la même choſe aux autres nombres comme 17 & 23, & je trouve que cela y revient.

Je fais donc une table aſſez grande de pluſieurs quarrez qui ſont la ſomme des deux moindres côtez d'un triangle, comme on peut voir ci-après; & afin de trouver commodément les couples de quarrez & doubles quarrez dont ils ſont la difference, je mets leurs racines avec leurs couples auſſi; comme près de 49 je mets 7 avec ſes couples 1, 2″, & 1″, 3, afin qu'on puiſſe trouver plus facilement les couples de 49 par le moyen de celles de 7, car les racines étant moindres que leurs quarrez, leurs couples ſe trouveront auſſi plus facilement que celles des quarrez.

TABLE DES QUARREZ

qui sont la somme des moindres côtez des triangles.

7 1 2″ 1″ 3	49 1 5″ 4″ 9	79 7 8″ 1″ 9	6241 47 65″ 18″ 83	151 7 10″ 3″ 13	22801 31 109″ 78″ 187
17 1 3″ 2″ 5	289 7 13″ 6″ 19	89 3 7″ 4″ 11	7921 23 65″ 42″ 107	161 1 9″ 8″ 17	25921 127 145″ 18″ 163
23 3 4″ 1″ 5	529 7 17″ 10″ 27	97 1 7″ 6″ 13	9409 71 85″ 14″ 99	9 11″ 2″ 13	73 125″ 52″ 177
31 1 4″ 3″ 7	961 17 25″ 8″ 33	103 5 8″ 3″ 11	10609 7 73″ 66″ 139	167 11 12″ 1″ 13	27889 119 145″ 26″ 171
41 3 5″ 2″ 7	1681 1 29″ 28″ 57	113 7 9″ 2″ 11	12769 41 85″ 44″ 129	191 3 10″ 7″ 17	36481 89 149″ 60″ 209
47 5 6″ 1″ 7	2209 23 37″ 14″ 51	119 3 8″ 5″ 13	14161 41 89″ 48″ 137	193 7 11″ 4″ 15	37249 17 137″ 120″ 257
49 1 5″ 4″ 9	2401 31 41″ 10″ 51	9 10″ 1″ 11	79 101″ 22″ 123	199 1 10″ 9″ 19	39601 161 181″ 20″ 201
71 1 6″ 5″ 11	5041 49 61″ 12″ 73	127 1 8″ 7″ 15	16129 97 113″ 16″ 129	217 11 13″ 2″ 15	47089 113 173″ 60″ 233
73 5 7″ 2″ 9	5329 17 53″ 36″ 89	137 5 9″ 4″ 13	18769 7 97″ 90″ 187	5 11″ 6″ 17	47 157″ 110″ 267

223	49729	289	83521	383	146689
13 14″	167 197″	7 13″	23 205″	3 14″	233 317″
1″ 15	30″ 227	6″ 19	182″ 387	11″ 25	84″ 401
233	54289	311	96721	391	152881
3 11″	119 185″	9 14″	31 221″	1 14″	337 365″
8″ 19	66″ 251	5″ 19	190″ 411	13″ 27	28″ 393
239	57121	313	97969		
7 12″	1 169″	5 13″	103 233″	11 16″	71 281″
5″ 17	168″ 337	8″ 21	130″ 363	5″ 21	210″ 491
241	58081	329	108241	401	160801
1 11″	199 221″	3 13″	191 269″	7 15″	79 289″
10″ 21	22″ 243	10″ 23	78″ 347	8″ 23	210″ 499
257	66049			409	167281
9 13″	49 185″	11 15″	89 241″	13 17″	137 305″
4″ 17	136″ 321	4″ 19	152″ 393	4″ 21	168″ 473
263	69169	337	113469	431	185761
5 12″	73 193″	1 13″	287 313″	9 16″	17 305″
7″ 19	120″ 313	12″ 25	26″ 339	7″ 23	288″ 593
271	73441	343	117649	433	187489
11 14″	103 205″	13 16″	151 265″	17 19″	281 365″
3″ 17	102″ 307	3″ 19	114″ 379	2″ 21	84″ 449
281	78961	353	124609	439	192721
13 15″	161 229″	15 17″	217 293″	19 20″	359 401″
2″ 17	68″ 297	2″ 19	76″ 369	1″ 21	42″ 443
287	82369	359	128881	449	201601
1 12″	241 265″	17 18″	287 325″	1 15″	391 421″
11″ 23	24″ 289	1″ 19	38″ 363	14″ 29	30″ 451
		367	134689	457	208849
15 16″	223 257″	5 14″	137 277″	11 17″	49 325″
1″ 17	34″ 291	9″ 23	140″ 417	6″ 23	276″ 601

463		214369		487		237169					
7	16″	113	337″	5	16″	217	377″	9	17″	47	353″
9″	25	224″	561	11″	27	160″	537	8″	25	306″	659
479		229441		497		247009		503		253009	
13	18″	119	349″	15	19″	193	377″	3	16″	329	425″
5″	23	230″	579	4″	23	184″	561	13″	29	96″	521

Je vois par-après comment on fera le triangle par le moyen desdites couples ; par exemple 7 est la somme des côtez du triangle 3, 4, 5, les racines des quarrez qui donnent ledit triangle sont 1 & 2, je cherche donc comment avec les couples susdites, sçavoir avec 1, 2″, & 1″, 3, je ferai 1 & 2.

Je trouve que les racines des doubles quarrez desdites couples sont les racines des quarrez du triangle ; je prens par-après un autre nombre comme 17, dont les couples sont 1, 3″, & 2″, 5, & je trouve aussi que prenant 3 & 2 pour les racines des quarrez qui doivent composer le triangle, elles donneront 5, 12, 13, qui a 17 pour la somme de ses moindres côtez.

Voyons maintenant ce qu'il faut pour faire que l'hypotenuse soit quarrée. Il est nécessaire que les deux quarrez dont elle est la somme soient les côtez d'un triangle ; car puisque le quarré de l'hypotenuse est la somme des quarrez des deux autres côtez d'un triangle, les racines desdits quarrez qui sont la somme d'un quarré d'hypotenuse sont les côtez d'un triangle.

Or les racines des doubles quarrez de chaque couple sont les racines des quarrez dont la somme doit être une hypotenuse quarrée. Il s'ensuit donc que lesdites racines des doubles quarrez doivent être les côtez d'un triangle.

Il ne sera donc point besoin de former les triangles qui ont les quarrez susdits pour la somme de leurs moindres côtez, puisqu'on n'a besoin d'autre chose que de voir si l'hypotenuse est quarrée. Et on connoîtra si elle est quar-

rée en considerant les racines des doubles quarrez susdits, & voyant s'ils peuvent être les deux côtez d'un triangle.

On ne considere ici que les triangles primitifs, parce que les multiples se réduisent à un primitif; & parce que le primitif est moindre que son multiple, s'il y en a quelqu'un qui ait les qualitez requises, il se trouvera auparavant ledit multiple.

Pour voir si les racines des doubles quarrez (qui appartiennent aux quarrez susdits qui sont la somme des côtez d'un triangle) sont les côtez d'un triangle, il faut considerer quelques proprietez des côtez des triangles suivant le sixiéme précepte.

1°. Le côté pair de tout triangle primitif doit être pairement pair, & partant toutes les couples qui sont ici ausquelles il se trouve un impairement pair, doivent être excluës, comme on voit aux couples de 289, 529, 2209, 2401, &c.

2°. L'un des deux côtez de chaque triangle doit être mesuré par 3: or le plus grand des deux nombres susdits ne peut pas être mesuré par 3, ni aussi être pair, lorsque la somme des deux moindres côtez est un quarré, car le côté impair étant la difference des deux quarrez, si le plus grand des deux est pair & le moindre impair, ce moindre sera pairement pair + 1, car tout quarré impair est pairement pair + 1, & partant étant ôté du quarré pair il restera un pairement pair — 1, pour le côté impair. Et si on ajoûte par-après ce côté impair au côté pair qui est pairement pair, la somme sera un pairement pair — 1, & partant ne sera pas un quarré; par exemple, le triangle qui sera fait par les quarrez de 5 & 12, ne pourra pas avoir un quarré pour la somme de ses côtez, car le côté impair sera la difference de 25 & 144, quarrez de 5 & 12, & ce côté impair sera pairement pair — 1, sçavoir 119, puisque pour l'avoir il faut ôter un pairement pair + 1, sçavoir 25 du pairement pair 144. Si donc on ajoûte le pairement pair

—1, qui eſt 119, au côté pair du triangle, ſçavoir à 120 qui eſt pairement pair, la ſomme ſera un pairement pair—1, & partant ce ne ſera pas un quarré.

On montrera de la même façon que ſi le plus grand des deux quarrez qui font le triangle eſt meſuré par 3, la ſomme des deux moindres côtez ne ſera point un quarré.

Que les racines deſdits quarrez ſoient comme devant 5 & 12, pour avoir le côté impair on ôtera 25 de 144; or 25 eſt multiple de 3 +1, car tout quarré qui n'eſt point meſuré par 3 ſurpaſſe de l'unité un multiple de 3.

Si donc on ôte un multiple de 3 +1 d'un multiple de 3, ſçavoir 25 de 144, reſtera 119 qui ſera ternaire —1.

Le côté impair ſera donc ternaire—1, lequel étant ajoûté au côté pair 120, qui néceſſairement eſt multiple de 3, la ſomme deſdits côtez ſera multiple de 3—1, & partant ne ſera point quarrée.

Puis donc que le plus grand des deux nombres ſuſdits, qui ſont racines des doubles quarrez, & qui doivent auſſi être côtez de triangles, n'eſt point meſuré par 3 ni par 4, il faudra de néceſſité que le moindre des deux ſoit meſuré par 3 & 4, puiſque les côtez des triangles doivent contenir 3 & 4. Le moindre doit donc être meſuré par 12.

Il faudra donc rejetter toutes les couples auſquelles la racine du moindre double quarré ne ſe meſure pas par 12.

Et le premier qui n'eſt point excepté par les deux régles précedentes eſt 5041, quarré de 71, qui a 12 pour la racine du moindre de ſes doubles quarrez.

3°. Le grand côté de tout triangle eſt composé, & ſe meſure par deux nombres premiers, ſi on en excepte 3, 4, 5, & quelques-uns de ſes multiples : mais lorſque le grand côté eſt impair comme il eſt toûjours ici, il n'y a aucune exception.

Et partant il faudra exclure tous les quarrez (qui ſont la ſomme des côtez des triangles) qui ont un nombre premier ou ſa puiſſance pour la racine du plus grand double quarré.

Ainſi 5041, quarré de 71, ſera auſſi exclus, parce que le plus grand de ſes doubles quarrez a 61 pour racine; de même 5329 ſera exclus, parce que 53 eſt ſa grande racine, & que 61 & 53 ſont nombres premiers.

Les nombres ou quarrez ſuivans, ſçavoir 6241, 7921 & 9409 ſeront auſſi exclus, car ils ont bien un nombre compoſé pour leur grande racine, mais la moindre n'eſt pas meſurée par 12.

Comme auſſi 57121 ſera exclus, quoique ſa moindre racine 168 ſoit meſurée par 12, car la grande racine 169 eſt le quarré d'un nombre premier.

Il ne reſtera donc à examiner que les nombres ou quarrez, dont la moindre des racines des doubles quarrez eſt meſurée par 12, & la grande eſt meſurée par deux nombres premiers; car puiſque les racines des doubles quarrez doivent être les côtez d'un triangle, elles doivent avoir les deux ſuſdites conditions qui appartiennent aux côtez des triangles tels qu'il eſt ici requis.

On aura auſſi égard aux finales des côtez des triangles, & par l'examen qu'on fera deſdits triangles on trouvera que lorſque le côté pair finit par 2 ou 8, l'impair finit toûjours par 5.

Quand il finit par 4 ou 6, l'impair finit par 3 ou 7.

Quand il finit par 0, l'impair finit par 1 ou 9.

Par les régles précedentes on excluroit la plûpart des nombres ſuſdits, & il ne reſteroit que 24, 265, qui appartiennent à 82369 quarré de 287; puis 168, 305, appartenans à 167281,] 288, 305, appartenans à 185761,] 84, 365, qui appartiennent à 187489,] 276, 325, qui dépendent de 208849, & 96, 425, qui viennent de 253009. Mais examinant leſdits nombres par les finales on rejettera 24, 265,] 84, 365,] 276, 325,] & 96, 425, parce que les finales 4 & 5,] & 6, 5, ne ſont point enſemble aux côtez des triangles.

Reſte donc les couples 168, 305, & 288, 305 qu'il faut

faut examiner, & voir ſi leurs quarrez étant joints enſemble font un quarré ; mais il ſe trouve que non, & partant ils ne feront point les côtez d'un triangle, & l'hypotenuſe des triangles ne ſera point quarrée.

Or le plus grand quarré de la table eſt 253009, & partant on ſera aſſûré qu'il n'y a aucun quarré qui ſoit la ſomme des deux côtez d'un triangle qui ait ſon hypotenuſe quarrée, s'il n'eſt plus grand que ledit 253009 quarré de 503.

Mais on pourroit traiter cette queſtion d'une autre ſorte, & au lieu de faire une table des quarrez qui ſont la ſomme des côtez d'un triangle, on en pourroit faire une qui contiendroit tous les quarrez qui ſont hypotenuſes.

Or parce que la méthode enſeigne de ſe ſervir des moindres nombres poſſibles, & auſſi de retrancher tout ce qui eſt inutile, comme on voit par le troiſiéme précepte, je cherche les moyens de faire leſdits racourciſſemens & excluſions.

Pour amoindrir les nombres on ſe ſervira des racines au lieu des quarrez des hypotenuſes, & par le moyen du triangle qui a ladite racine pour hypotenuſe, on aura le triangle qui a le quarré de ladite hypotenuſe ; par exemple, avec 3, 4, 5, je ferai le triangle qui a 25 pour hypotenuſe, car ledit triangle eſt fait par les quarrez de 3 & 4, qui ſont côtez dudit triangle 3, 4, 5.

Mais pour n'avoir point la peine de prendre leſdits quarrez de 3 & 4, je chercherai quelqu'autre méthode pour trouver 7 & 24 (qui ſont côtez du triangle qui a 25 quarré de 5 pour hypotenuſe,) par le moyen deſdits 3 & 4.

Et premiérement 24 eſt le double du produit de 3 & 4, reſte donc à trouver 7. Si je prens la ſomme deſdits 3 & 4 j'aurai 7, il faut donc voir à quelqu'autre triangle ſi cela réuſſira de même.

Au triangle 5, 12, 13, la ſomme de 5 & 12 eſt 17, mais 17 n'eſt pas côté du triangle qui a 169 quarré de 13 pour

hypotenuſe. Ledit triangle eſt 119, 120, 169. Je regarde ſi 17 meſure 119, & je trouve qu'il le meſure, le quotient eſt 7, lequel 7 eſt la difference de 5 à 12.

Je dis donc que ſi on multiplie la ſomme des deux côtez par leur difference, on aura le côté impair du triangle qui aura pour hypotenuſe le quarré de l'hypotenuſe du premier triangle.

Et je vois que la même choſe arrive au premier triangle 3, 4, 5, car 7 qui eſt la ſomme de 3 & 4, étant multiplié par la difference 1 donne 7 pour côté du triangle, qui a 25 quarré de 5 pour hypotenuſe, ſçavoir de 7, 24, 25.

De cette façon on aura les côtez des triangles dont l'hypotenuſe eſt quarrée, par le moyen de tous les triangles, & ayant leſdits côtez on aura leur ſomme : reſte donc à voir ſi cette ſomme ſera quarrée.

Mais afin de n'avoir point la peine d'examiner tous les triangles, il ſe faut ſervir de l'autre moyen qui eſt de retrancher tout ce qui eſt inutile ; ce qui ſe fera en conſiderant quelques proprietez du quarré, puiſque ladite ſomme des côtez doit être un quarré : par exemple, tout quarré impair (tel qu'eſt ladite ſomme) ſurpaſſe de l'unité un pairement pair.

De là on inferera que les triangles dont le moindre côté ſera impair, ne pourront pas donner de triangle qui ait un quarré pour la ſomme de ſes côtez, & partant on ne prendra que les triangles dont le moindre côté ſera pair.

Et de cette autre proprieté, que tout quarré non diviſible par 3 ſurpaſſe de l'unité un multiple de 3, on inferera que le moindre côté doit être meſuré par 3, & partant il ne faudra conſiderer que les triangles dont le moindre côté ſera meſuré par 12.

La façon dont on trouvera ces deux excluſions a été traitée au commencement du préſent exemple, & partant on ne la repetera point ici ; car les côtez des triangles dont on parle ici ſont les mêmes nombres qui doivent ſer-

vir de racine aux doubles quarrez appartenans aux sommes quarrées susdites, & on a montré que la moindre des deux racines susdites doit être mesurée par 12.

Je prens donc tous les triangles dont le moindre côté est mesuré par 12. Et on pourroit les mettre tous de suite commençant par 12, 35, 37,] 24, 143, 145,] 36, 77. 85,] 36, 323, 325, &c. mais parce qu'on a déja examiné cette question par une autre voye, sçavoir par la somme des côtez, & qu'on l'a poursuivie jusqu'à faire que la somme des côtez de triangle fust 253009, on commencera par des hypotenuses qui donneront à peu près ladite somme, ou plûtôt moins, afin que dans l'inégalité desdites sommes, qui sont souvent en proportion fort differente avec l'hypotenuse, on n'en omette aucune.

Je commencerai donc par les hypotenuses quarrées dont la racine n'est point moindre que 400, & suivrai l'ordre desdites hypotenuses, les choisissant dans une table que je suppose être faite desdites hypotenuses, desquelles il ne faut prendre que les racines, comme il a été dit.

Que si on n'avoit point travaillé à la question par la voye précedente, ou qu'on n'eût point de table desdites hypotenuses, il faudroit prendre les triangles dont le moindre côté se mesure par 12, & poursuivre, comme on vient de le montrer, & pratiquer les exclusions dont on parlera ci-après.

On peut considerer les finales, & voir quelles elles doivent être, afin que la somme des côtez du triangle qu'on fera soit un quarré.

Et premiérement quand le côté pair du triangle est 2 ou 8, l'impair doit finir par 5. Si le pair finit par 0, l'impair peut avoir 1 ou 9 pour finale, & en toutes les façons susdites les finales n'empêchent point que la somme des côtez du triangle qui sera produit du premier qui est ici consideré, ne soit un quarré.

Mais si le côté pair du premier triangle finit par 6, le côté impair doit finir par 3. Et si ledit côté pair finit par 4, l'impair doit avoir 7 pour finale; autrement si 6 étoit avec 7, & 4 avec 3, la somme des côtez du triangle qui seroit produit, n'auroit pas une finale quarrée; ce qu'on montrera comme il s'ensuit.

120	391	409	
84	437	445	
168	425	457	+
132	475	493	
—336	377	505	
396	403	565	
276	493	565	+
48	575	577	
240	551	601	
—336	527	625	
300	589	661	
—156	667	685	
108	725	733	+
216	713	745	
468	595	757	
432	665	793	
168	775	793	
540	629	829	+
—504	703	865	
348	805	877	
60	899	901	
420	851	949	
—696	697	985	
372	925	997	+
660	779	1021	
192	1015	1033	
132	1085	1093	
744	817	1105	
576	943	1105	

Pour faire avec le premier triangle celui dont l'hypotenuse est quarrée, on multiplie pour le côté impair la somme des deux côtez par leur difference, & pour le côté pair on prend le double du produit des mêmes côtez. Si donc les côtez finissent par 6 & 7, la somme d'iceux finira par 3, car 7 & 6 font 13, & la difference finira par 1, car le côté pair étant le moindre côté, il le faudra ôter de 7.

Le produit de 1 par 3, sçavoir de la somme par la difference sera 3, & telle sera la finale du côté impair du triangle requis.

Pour le côté pair il faudroit prendre le produit des mêmes finales 6 & 7 qui finira par 2, & son double finira par 4, partant le côté pair finira par 4, lequel étant joint avec le côté impair qui finit par 3, la somme des deux finira par 7, qui n'est point une finale quarrée; car les quarrez impairs ont pour finale 1, 9, ou 25, & partant la somme des deux côtez ne sera point un quarré.

—264	1073	1105	
528	1025	1153	+
204	1147	1165	
660	989	1189	
612	1075	1237	

On montrera de même que si les côtez du premier triangle finissoient par 4 & 3, la somme des côtez du triangle qui en seroit produit finiroit aussi par 7, & partant elle ne seroit point quarrée.

On voit ici plusieurs triangles qui ont tous leur moindre côté divisible par 12, & qui sont destinez pour faire des triangles qui ayent pour hypotenuse le quarré de l'hypotenuse de ceux-ci. Mais on en exclura ceux qui n'ont pas les finales de leurs côtez ainsi qu'il est requis, & qui sont marquées — devant leur moindre côté ; comme sont 336, 377,] 336, 527,] 156, 667,] 504, 703,] &c. car le 6 se doit trouver avec le 3,] & le 4 avec le 7.

Il y a encore une autre exclusion, mais elle est tirée de la premiere partie de cet exemple, & de l'autre table.

Les côtez des triangles qui sont en cette table-ci, sont les mêmes qui devroient être les racines des doubles quarrez de la table précedente, car lesdites racines doivent être les côtez d'un triangle, & leurs quarrez doivent faire le triangle qui a les deux conditions susdites.

Or on a montré que la plus grande des deux susdites racines doit être impair, mais je veux ici montrer qu'elle est hypotenuse primitive.

Puisque le quarré qui est la somme des côtez d'un triangle, est la difference d'un quarré & d'un double quarré, & qu'en la table susdite il y a toûjours deux couples desdits quarrez & doubles quarrez, en l'une desquels le double quarré est plus grand que le quarré, & en l'autre il est moindre ; il s'ensuit que le plus grand double quarré des deux est la somme de deux quarrez : par exemple, 49 est la difference de 1, 50, & de 32, 81, & partant dans la couple dont le double quarré est plus grand que le quarré 49, ledit double quarré qui est 50 est la somme de deux quarrez, sçavoir de 1 & 49, d'où il s'ensuit qu'il est hypo-

tenuſe : mais voyons quelle hypotenuſe. Le quarré qui ſert de ſomme aux côtez comme 49, eſt toûjours impair, & partant l'autre quarré 1 ſera auſſi impair, puiſqu'enſemble ils doivent faire un double quarré qui eſt pair; ce ſont donc deux quarrez impairs qui ſont premiers entr'eux, car s'ils avoient une commune meſure, le double quarré l'auroit auſſi, & le triangle ſeroit multiple; mais on ſuppoſe qu'il ſoit primitif.

Puis donc que les deux quarrez, qui joints enſemble font le double quarré, ſont impairs & premiers entr'eux, leur ſomme ſera le double d'une hypotenuſe primitive, comme on a dit ailleurs : mais la même ſomme eſt un double quarré, & partant la racine de ce double quarré ſera hypotenuſe primitive.

Le grand côté des triangles de la table précedente doit donc être l'hypotenuſe d'un triangle, & partant pairement pair plus 1.

Je marque donc les triangles dont le grand côté eſt hypotenuſe, la marque eſt + & rejette les autres dont le grand côté eſt pairement pair — 1, comme 120, 391, 409, &c. & ceux auſquels ledit côté étant pairement pair + 1, n'eſt pas néanmoins hypotenuſe comme 84, 437, 445, &c.

Il n'y a donc que ſix triangles qui ne ſoient point exclus, ſçavoir 168, 425, 457,] 276, 493, 565,] 108, 725, 733,] 540, 629, 829,] 372, 925, 997,] 528, 1025, 1153, deſquels triangles il faudra faire ceux qui auront pour hypotenuſe le quarré de leur hypotenuſe. Ainſi avec 168, 425, 457, on fera le triangle dont l'hypotenuſe ſera le quarré de 457; mais on n'a beſoin que de la ſomme des côtez dudit triangle, pour voir ſi c'eſt un quarré : par exemple, on prendra pour le côté pair dudit triangle le double du produit de 168 par 425, qui ſera 142800, l'impair ſe trouvera multipliant la ſomme de 168 & 425 par leur difference, ſçavoir 593 par 257, le produit 152401 eſt le côté impair, qui étant joint au côté

pair 142800 donne 2950201 pour la ſomme des côtez, qui n'eſt point un quarré, ainſi qu'il paroîtra en prenant la racine par la voye ordinaire, & par la même façon on trouvera que les autres cinq triangles ne donnent pas des triangles dont la ſomme des côtez ſoit un quarré.

HUITIE'ME EXEMPLE.

TROUVER un triangle dont l'hypotenuſe & l'enceinte ſoient quarrées.

Je cherche quelque voye pour trouver l'enceinte des triangles, autrement qu'en ajoûtant les côtez. Je trouve qu'on la peut avoir en multipliant la ſomme des racines des quarrez qui font le triangle, par le double de la plus grande racine. Ainſi au triangle 3, 4, 5, les racines ſont 2 & 1, leur ſomme eſt 3, qui multipliée par 4 (double de la plus grande racine 2) donne 12, pour l'enceinte dudit triangle.

De cette proprieté je conclurai que pour faire que l'enceinte ſoit un quarré, il faut que la ſomme des deux racines ſoit un quarré, & que la plus grande racine ſoit un double quarré, afin que venant à muliplier ladite ſomme (qui eſt un quarré) par un autre quarré (qui ſera le double de la plus grande racine,) on ait un quarré pour l'enceinte. Ainſi prenant pour les deux racines 18 & 7 qui enſemble font 25, on multipliera ladite ſomme 25 par 36 double de 18, & on aura 900 pour l'enceinte du triangle 252, 275, 373.

Maintenant il faut voir ce qui eſt néceſſaire pour faire que l'hypotenuſe ſoit quarrée; ou bien ſuppoſant que l'hypotenuſe de ce triangle ſoit quarrée, je regarde ce qu'on en peut déduire.

Je voi que ſi l'hypotenuſe eſt quarrée, les racines des quarrez dont elle eſt la ſomme doivent être les côtez d'un triangle.

Mais parce qu'il faut qu'un même triangle ait l'hypote-

nuſe quarrée, & l'enceinte quarrée, je joins enſemble les deux ſuſdites conditions, & partant il faudra trouver un triangle dont le grand côté ſoit double quarré, & la ſomme des deux moindres côtez ſoit un quarré.

Pour faire que le côté pair ſoit double quarré, il faut que le triangle ſoit fait de deux qq. parce que leurs racines doivent être quarrées : il faudra donc trouver un triangle fait par deux qq. qui ait un quarré pour la ſomme de ſes moindres côtez.

Or les nombres qui ſont la ſomme des deux côtez d'un triangle ſont deux fois la difference d'un quarré, & d'un double quarré, & les racines des deux doubles quarrez ſont auſſi les racines des quarrez qui font le triangle : mais les quarrez qui font le triangle ſont des qq. partant leurs racines ſont quarrées : il s'enſuit donc que les racines des doubles quarrez ſuſdits ſont des quarrez.

On pourra donc ſe ſervir ici de la premiere Table de l'éxemple précédent qui contient les quarrez qui ſont la ſomme des côtez d'un triangle : il faudroit donc trouver en ladite Table, dans la liſte des couples appartenantes aux quarrez, quelque quarré qui eut deux quarrez pour les racines de ſes doubles quarrez, ce qui ne ſe trouve point en toute cette Table : toutefois on ne peut pas être aſſuré qu'il ne s'en trouvat point ſi on pourſuivoit la Table plus loin, puiſque cela ſe trouve bien aux ſommes non quarrées, comme à 23 qui a 1 & 4 pour les racines de ſes doubles quarrez, & à 137 qui a 4 & 9.

Or cette Table mene fort loin, car par ſon moyen on entre bien avant dans les nombres d'onze lettres, & voici comme il y faudroit procéder, ſi on avoit trouvé deux quarrez qui ſerviſſent de racine à deux doubles quarrez appartenans à un même nombre.

Par exemple, ſi les racines des doubles quarrez qui appartiennent à 247009 quarré de 497, ſçavoir 306, 353, étoient deux quarrez, & qu'on voulut par leur moyen faire

faire le triangle qui auroit des quarrez pour son enceinte, & pour son hypotenuse, voici comme il y faudroit procéder.

Le triangle fait par les quarrez de 306 & 353 auroit pour côté pair 216036, & pour côté impair 30973.

Les quarrez de ces deux côtez qui sont 46671553296 & 959326729 étant joint ensemble, donneront une hypotenuse quarrée qui sera 47630880025.

Or l'enceinte du triangle dont ledit nombre est hypotenuse, se trouvera multipliant la somme des racines 216036 & 30973, sçavoir 247009, (qui est un quarré, puisque c'est le nombre auquel appartiennent les deux racines premierement prises, sçavoir 306 & 353,) par le double de la plus grande, sçavoir par 432072 pour avoir 106725672648 qui sera l'enceinte du triangle, dont l'hypotenuse sera le quarré susdit 47630880025.

Et cette enceinte seroit aussi un quarré si les deux nombres susdits 306 & 353 étoient quarrez, car cela étant 216036 qui est le double de leur produit seroit un double quarré, & le double de ce nombre, sçavoir 432072 seroit un quarré : si donc on vient à le multiplier par 247009 qui est aussi un quarré, le produit seroit un quarré : or ce produit étant l'enceinte d'un triangle qui a un quarré pour hypotenuse, ledit triangle auroit les deux conditions requises.

On peut encore examiner cette même question d'une autre façon, comme il s'ensuit.

L'enceinte se trouve, comme il a été dit, en multipliant la somme des deux racines par le double de la plus grande des deux ; il faudra donc, afin que l'enceinte soit quarrée, que la somme des deux racines soit un quarré, & la plus grande soit un double quarré, afin que son double soit un quarré. Mais afin que l'hypotenuse soit quarrée, il faut que les racines susdites soient côtez de triangles, afin que leurs quarrez étant joints ensemble fassent le quarré d'une

hypotenuſe : il faudra donc trouver un triangle dont le grand côté ſoit double quarré, & la ſomme des deux moindres côtez ſoit un quarré.

Puiſque le grand côté doit être double quarré, il faut qu'il ſoit le double d'un quarré pair, car autrement il ne ſeroit pas pairement pair, ainſi qu'il eſt requis aux côtez pairs, & partant il aura pour finales 2, 8, ou 0, comme leſdits doubles quarrez.

Or quand le côté pair finit par 2 ou 8, l'impair finit toujours par 5, (ce qui ſe doit entendre aux primitifs dont nous parlons ici) & partant la ſomme des côtez finit par 7 ou 3 qui ne ſont point finales quarrées.

Et partant ſi le côté impair finit par 2 ou 8, la ſomme des deux côtez ne pourra pas être un quarré.

Reſte donc que le côté pair finiſſe par 0, car ainſi l'impair finira par 1 ou 9, & la ſomme deſdits côtez aura une finale quarrée.

On conſidérera par après que tout quarré non diviſible par 3 ſurpaſſe de l'unité un multiple de 3, & partant le double quarré ſera ternaire + 2 ou -- 1. Mais en tout triangle l'un des côtez ſe meſure par 3, & partant ſi le côté pair n'eſt point ternaire l'impair le ſera, & la ſomme de ces côtez dont l'un eſt ternaire, & l'autre ternaire -- 1 ſera auſſi ternaire -- 1, & partant ce ne ſera pas un quarré ainſi qu'il eſt requis.

Il faut donc que le côté pair ſoit meſuré par 3 & auſſi par 5, afin qu'il finiſſe par 0; il ne pourra donc être moindre que 1800, double du quarré de 30.

On remarquera auſſi que le côté impair doit être ternaire + 1, afin qu'étant joint au côté pair qui eſt ternaire, il faſſe un ternaire + 1 qui puiſſe être quarré.

Or la moitié du côté pair, ſçavoir 900 eſt produite par les racines des deux quarrez conſtitutifs du triangle, leſquelles racines doivent néceſſairement être quarrées, afin qu'elles ſoient premieres entr'elles, & l'une d'icelles doit

être mesurée par 9 & l'autre non, puisque le côté pair est mesuré par 9.

Et partant le côté impair étant la difference des deux quarrez desdites racines, il sera la difference de deux qq. le moindre desquels doit être mesuré par 81, & sa racine par 9, autrement le côté impair seroit ternaire--1, car puisque l'un des deux qq. doit être mesuré par 3 ou 81, si c'étoit le plus grand qui le fut, donc le moindre qq. seroit ternaire +1, lequel étant ôté du plus grand qui seroit ternaire, resteroit un ternaire--1 pour ledit côté impair.

Ce même côté impair doit être aussi pairement pair +1, autrement étant joint au côté pair, il ne feroit pas un pairement pair +1, comme doit être la somme pour être quarrée; & partant le susdit moindre qq. qu'on a montré devoir être mesuré par 81, doit être pair; car s'il étoit impair, le grand qq. seroit pair, & leur difference seroit un pairement pair—1; car si on ôte un pairement pair +1 d'un pairement pair, il restera un pairement pair—1, & & partant la racine de ce moindre qq. sera au moins 36.

D'ailleurs puisque tout qq. impair surpasse de l'unité un multiple de 16, le côté impair, qui est la difference de deux qq. le plus grand desquels est impair, surpassera aussi de l'unité un multiple de 16, car le qq. pair étant divisible par 16 (comme tout qq. pair doit être,) si on l'ôte d'un multiple de 16 +1, il restera un multiple de 16 +1.

Quand donc on assemblera les deux côtez, sçavoir le pair avec l'impair, si le pair ne se mesure que par 8 comme 1800, (qu'on avoit pris pour le moindre côté pair possible) la somme des deux côtez susdits retiendra aussi cette restriction, & surpassera de l'unité un multiple de 8 & non pas de 16.

Mais les nombres qui sont particulierement affectez à être la somme des côtez des triangles, different tous de l'unité d'un multiple de 8, & partant leurs quarrez surpasseront de l'unité un multiple de 16, tels sont 49, 289, 529, &c.

De là il s'ensuit que le côté pair doit au moins être mesuré par 16, & partant au lieu de 1800 il faudra prendre son quadruple 7200, double de 3600, quarré de 60, qui est le moindre qui puisse avoir les conditions requises, sçavoir d'être double quarré, & d'être divisible par 3, 5, & 16.

Mais ledit 7200 se trouvera encore trop petit : car si on prend, comme il a été dit, les parties de la moitié 3600 en telle sorte que la partie paire soit mesurée par 9 ainsi qu'il est requis, on aura pour parties 144 & 25 ; mais la partie paire doit être la moindre comme on a montré cy-devant, puisqu'elle est la racine d'un qq. pair, qui doit être le moindre des deux.

Si donc 144 est la moindre partie possible, il faut que l'autre soit plus grande, & qu'elle se mesure par 25, & que ce soit un quarré comme 625, qui multiplié par 144 donne 90000, dont le double 180000 sera le moindre côté pair qu'on doive examiner.

Mais le côté pair étant tel, & prenant 144 & 625 pour les parties qui doivent faire le triangle, le côté impair se trouvera plus grand que le pair, car ce sera 369889. Or est-il qu'il doit être moindre que le pair, puisque la question requiert que le grand côté soit double quarré, & par conséquent pair.

Il faut donc voir ce qui fait ici que le grand côté est impair. Cela provient de ce que les parties susdites 144 & 625, qui doivent être les racines des quarrez dont le triangle est formé sont trop distantes l'une de l'autre, & sont hors des bornes nécessaires pour faire que le grand côté soit pair.

Il faudra donc prendre des nombres moins differens pour lesdites racines, comme 576 & 625, ausquelles la moindre est toujours paire, & le double du produit desdites racines sçavoir 720000 sera le côté pair, & l'impair sera 58849.

Or si la somme de ces deux côtez qui est 778849 étoit un quarré, on auroit ce qui est requis; car multipliant ladite somme 778849 par 1440000 double du grand côté 720000, on auroit 1121542560000, qui est l'enceinte du triangle qui est fait par les quarrez desdits 720000 & 58849, duquel triangle l'hypotenuse est le quarré de la somme des quarrez de 576 & 625; ou si on veut l'hypotenuse dudit triangle est le quarré de l'hypotenuse du triangle, dont les côtez sont 720000 & 58849.

Et l'enceinte susdite 1121542560000 seroit un quarré, puisqu'elle seroit le produit des deux quarrez 778849 & 1440000. Mais parce que ledit 778849 (qui est la somme des côtez 720000 & 58849) n'est pas quarré, l'enceinte susdite ne sera pas aussi un quarré.

On voit donc par là que s'il y a des triangles qui ayent leur hypotenuse & leur enceinte quarrée, il faut que ladite enceinte soit fort grande, puisque la moindre & premiere qui ait besoin d'être éxaminée a treize lettres comme on voit ici.

Qui voudroit passer outre, on pourroit prendre 1225 au lieu de 625, puis on augmenteroit aussi 576 prenant garde toujours que la partie paire soit la moindre, mais que l'impaire ne l'excéde pas plus que de la raison qu'il y a de 1 + ℞. 2 à 1, & que si la partie paire est 1000000, l'impaire n'excede pas 2414213.

Cet examen conduiroit fort loin avec peu de nombres.

Et pour éxaminer lesdits 576 & 1225, je les prens pour racines des quarrez qui font un triangle, partant le côté pair sera 1411200, & l'impair sera 1168849, (qui se trouve multipliant la somme de 576 & 1225 par leur difference, sçavoir 1801 par 649) la somme des deux côtez sera 2580049 qui n'est point quarrée, & partant on pourroit passer à un autre; car l'enceinte de l'autre triangle qu'on cherche ne seroit point un quarré, puisqu'elle se trouve multipliant ladite somme 2580049 par

le double du côté pair, sçavoir par 2822400 qui est un quarré.

NEUVIE'ME EXEMPLE.

TRois Marchands ont mis ensemble quelque argent pour leur trafic : celui du premier a profité pendant six mois, celui du second pendant neuf mois, & celui du dernier pendant douze mois.

Le premier a reçû 70 livres, tant pour sa mise que pour son gain. Le second 230 livres. Le troisiéme 180 livres. On demande la mise de chacun.

Ces sortes de questions dépendent de la premiere regle, car on peut prendre d'autres éxemples de même nature dont on aura la solution.

Ainsi je fais une autre question semblable à la premiere, & je pose que le premier Marchand ait mis 8 livres, & ait gagné 12 livres en six mois; le second & le troisiéme doivent profiter à même raison eu égard au temps : si donc le second a mis 6 livres, son gain sera de 9 livres en six mois, & partant si son argent a profité pendant neuf mois, le profit sera de 13 livres 10 sols. Si le troisiéme a mis 3 livres, le profit en six mois sera de 4 livres 10 sols, & en douze mois de 9 livres.

Donc le premier aura 20 livres, tant pour son profit en six mois que pour sa mise. Le second aura 19 livres 10 sols, pour son profit de neuf mois & pour sa mise. Le troisiéme aura 12 livres pour son profit en douze mois & pour sa mise.

Il faut donc voir comment avec 20 livres & six mois de temps on trouvera la mise qui est 8 livres, & de même des autres.

C'est la façon ordinaire des questions qui n'ont qu'une solution, ou qui ont tout nombre pour solution comme celle-ci : mais pour celles qui en ont une multitude indéfinie (on entend ici parler des nombres dont il y a ou dont

il peut y avoir une infinité, & qui néanmoins vous ménent bientôt à de fort grands nombres, comme qui demanderoit les nombres parfaits, ou ceux qu'on nomme Amiables) on n'est pas obligé de trouver 8, car ce seroit un grand hazard si on trouvoit 8 parmi tant d'autres nombres qu'on peut donner; & puisque le gain ni la mise ne sont point séparément déterminez, on pourra prendre quel nombre on voudra pour la mise ou pour le gain, car on peut augmenter & diminuer l'un ou l'autre tant qu'on voudra; il suffit seulement de faire que l'argent de chacun profite egalement en temps égal, & en temps inégal à proportion du temps. Or on peut séparer un nombre en deux parties, qui auront entr'elles telle raison donnée qu'on voudra.

Mais puisqu'en la question proposée la raison de la mise & du gain n'est point donnée, il sera permis de prendre le nombre & la raison à discrétion, puisque la somme de la mise & du profit peut être séparée en deux parties qui auront telle raison qu'on voudra.

Je pose donc que la mise du premier soit de 50 livres, son profit sera donc de 20 livres; il faut donc voir quelle raison il y a de 50 à 20: mais parce que le temps de chacun est different, il faut diviser le profit par le temps, & pour plus grande facilité je prens le plus grand nombre qui soit commun aux temps des trois Marchands. On aura donc pour le premier Marchand deux termes, pour le second trois termes, & pour le troisiéme quatre termes.

Je regarde quel profit a fait le premier Marchand en un terme, & je trouve 10 livres. Je considére maintenant quelle raison il y a de la mise 50 au profit d'un terme 10, la raison est quintuple, & le profit est par terme la cinquiéme partie de la mise.

On posera donc $\frac{5}{5}$ pour la mise de chacun; & parce que les sommes données contiennent la mise & le gain tout ensemble, il faut assembler le profit avec lesdits $\frac{5}{5}$.

Le ſecond Marchand a laiſſé ſon argent à profit pendant trois termes, & en chaque terme a gagné la cinquiéme partie de ſa miſe : or la miſe étant $\frac{5}{5}$, la cinquiéme partie ſera $\frac{1}{5}$ & $\frac{3}{5}$ pour les trois termes; & parce que les 230 livres qu'a euës le ſecond Marchand contiennent la miſe & le gain, il faut aſſembler les $\frac{5}{5}$ de la miſe, avec les $\frac{3}{5}$ de gain, & on aura en tout $\frac{8}{5}$; je dirai donc par la régle de proportion :

Si $\frac{8}{5}$ donnent 230, combien $\frac{5}{5}$, ou bien :

Si 8 donnent 230 livres, combien 5. Je multiplie 230 par 5, & je diviſe le produit 1150 par 8, le quotient 143 livres 15 ſols ſera la miſe du ſecond.

De même pour le troiſiéme Marchand, ſa miſe étant $\frac{5}{5}$, ſon profit pour quatre termes à raiſon de $\frac{1}{5}$ pour terme ſera $\frac{4}{5}$, qui étant joint à la miſe donne $\frac{9}{5}$ pour la ſomme qui répréſente 180. Je trouverai donc par la même regle de proportion que :

Si $\frac{9}{5}$ ou 9 donnent 180, —$\frac{5}{5}$ ou 5 donneront 100 pour la miſe du troiſiéme Marchand.

Si on avoit pris 60 livres pour la miſe du premier Marchand, le profit ſeroit 10 livres en deux termes, & partant 5 livres par terme, qui eſt la douziéme partie de la miſe, & ſur cette proportion on trouveroit les miſes des autres.

DIXIE'ME EXEMPLE.

TRouver un triangle dont l'hypotenuſe ſoit quarrée, & dont le moindre côté ait un quarré pour difference avec chacun des deux autres.

Puiſque le triangle a deux proprietez differentes, il les faut examiner l'une après l'autre.

1° Pour faire que l'hypotenuſe ſoit quarrée, il faut que les racines des quarrez qui la compoſent ſoient les deux côtez d'un autre triangle.

2°. Pour faire qu'un triangle ait ſon moindre côté different d'un quarré de chacun des deux autres, il faut prendre

prendre pour la racine du plus grand des deux quarrez qui le composent, l'hypotenuse d'un triangle & la racine de l'autre quarré sera un des moindres côtez du même triangle, moins la difference de l'hypotenuse & de l'autre côté. Ainsi ayant choisi le triangle 3, 4, 5, l'hypotenuse 5 sera la racine du grand quarré, & pour l'autre racine j'ôte d'un des cotez comme de 3 la difference de 4 à 5, ou de 4 la difference de 3 à 5, & restera 2. On a donc 5 & 2 dont les quarrez font le triangle 20, 21, 29, qui a la condition requise. On peut voir cela dans le discours des triangles.

Mais lesdites racines 5 & 2 doivent être les deux côtez d'un triangle, si on veut que l'hypotenuse qui sera faite de leurs quarrez soit un quarré.

Il faut donc trouver un triangle dont le moyen côté soit l'hypotenuse d'un autre triangle, & le moindre côté soit un des côtez de cet autre triangle moins la difference de ladite hypotenuse & de son autre côté. De sorte que si 5 & 2 étoient les deux côtez d'un triangle, on auroit ce qu'on cherche, parce que le moyen côté 5 est l'hypotenuse du triangle 3, 4, 5, & le moindre côté 2 est un des côtez dudit triangle 3, 4, 5, moins la difference de l'autre côté & de l'hypotenuse.

Je chercherai par après en la Table des triangles, si je trouverai un triangle qui ait ses deux côtez tels qu'il est requis.

Et pour abréger & exclure les superflus, je voi que le grand côté doit être une hypotenuse, je ne m'arrêterai donc qu'aux triangles dont le grand côté sera impair & hypotenuse primitive, car les hypotenuses multiples ne doivent point ici être considérées, à raison que le triangle dont elles sont hypotenuses est multiple, & le triangle auquel elles serviroient de côté seroit aussi multiple: or nous n'avons dans la Table que des primitifs, & il ne serviroit de rien aussi de considérer les multiples.

Or il y a beaucoup de manieres pour connoître si un nombre n'est point hypotenuse : mais il ne se faut servir que de celles qui donnent d'abord à connoître que le nombre n'est point hypotenuse, comme s'il est pairement pair --1 ; & s'il est divisible par 3, on rejettera donc les triangles ausquels le côté impair est petit côté, & ceux aussi ausquels ledit côté impair est mesuré par 3, & ceux ausquels il est pairement pair --1.

Je considére aussi quel doit être l'autre côté du triangle, & je trouve qu'il doit être moindre que la moitié du moyen côté qui doit être hypotenuse, comme on voit à 5 & 2, & cela est facile à juger par la construction de 2.

Les côtez impairs sont dans la seconde colomne de la Table après l'hypotenuse.

Avec cela j'éxamine les triangles de la Table, & je regarde ceux dont le grand côté est impair, & surpasse de l'unité un pairement pair.

Le premier est celui qui a 21 pour grand côté : mais parce que 21 est mesuré par 3, je passe outre. Je laisse aussi 45, & puis 77, parce qu'on voit sans peine qu'il est divisible par 7, lequel 7 n'étant point hypotenuse, ses multiples ne seront point aussi hypotenuses primitives.

Le premier qu'on trouve qui doive être éxaminé est 221, son autre côté est 60, je trouve que 221 est hypotenuse des triangles 221, 21, 220, & de 221, 171, 140. Mais d'abord je trouve du défaut à tous les deux, car puisque 60 doit être moindre que l'un & l'autre des côtez du triangle auquel 221 sert d'hypotenuse, le triangle 221, 21, 220, n'y pourra pas servir.

Dans l'autre triangle 171 étant pairement pair --1, si on l'ôte de 221, qui étant hypotenuse doit toujours être pairement pair +1, il restera un impairement pair, qui étant ôté d'un pairement pair, sçavoir du côté pair 140, restera un impairement pair, lequel partant ne pourra pas être le côté pair d'un triangle tel qu'est 60. Il faut donc :

1°. Que le grand côté du triangle serve d'hypotenuse à un autre triangle.

2°. Que le petit côté qui est pair, soit moindre que la moitié du grand côté.

3°. Que le second triangle auquel le grand côté du premier sert d'hypotenuse, ait son moindre côté plus grand que le moindre côté du premier.

4°. Que ledit second triangle ait un pairement pair +1, pour son côté impair.

Le premier triangle qui ait toutes ces conditions est 457, 425, 168, car le grand côté 425 est l'hypotenuse d'un autre triangle, & le petit côté 168 est moindre que la moitié de 425; de plus 425 sert d'hypotenuse au triangle 425, 297, 304, auquel le moindre côté 297 est plus grand que 168, & le côté impair 297 est pairement pair +1.

Mais on pourroit encore donner une autre condition au second triangle, auquel il faut, qu'ôtant 304 de 425, & ôtant ce qui reste de 297, il reste enfin 168; mais ledit 168 doit nécessairement être divisible par 3, & desdits trois côtez 425, 297, 304, il ne sçauroit y avoir que l'un des deux moindres divisible par 3, & partant afin que la derniere difference ou reste soit mesuré par 3, il faut que les deux autres, comme 425, 304, excédent 3 d'une même quantité, car ainsi leur difference sera mesurée par 3, & cette difference étant par après ôtée du troisiéme côté qui est aussi mesuré par 3, le dernier reste sera mesuré par 3, & cette cinquiéme condition ne se trouve pas dans ledit triangle 425, 297, 304, car 304 surpasse un ternaire de l'unité, & 425 le surpasse de 2.

Passant outre à chercher les triangles, on trouve 725 qui sert de côté au triangle 733, 725, 108, & d'hypotenuse au triangle 725, 333, 644, lesquels ont les cinq conditions requises; car pour la cinquiéme 644 surpasse de 2 un ternaire aussi-bien que l'hypotenuse 725: mais si on considére les finales, on verra que cela ne peut réüssir, c'est-à-dire, que si on ôte 333 de 725, & qu'on ôte le

reste de 644, il ne peut pas rester 108 comme il seroit besoin, ce qui se connoîtra ôtant seulement les dernieres lettres : car si on ôte le |3| de 333, du |5| de 725, il restera 2, lequel étant ôté du |4| de 644, restera 2, mais il faudroit qu'il restât 8 pour avoir la finale de 108.

La considération de ces finales est fort facile, & montre d'abord l'impossibilité quand elle provient de là. On peut aussi juger de cette façon de recherche qu'en travaillant on trouve toujours de nouvelles facilitez & abrégez.

Mais passant outre à la recherche, on trouvera 925 au triangle 997, 925, 372, qui a aussi les quatre premieres conditions avec celui qui a 925 pour hypotenuse, sçavoir 925, 533, 756 : mais ce dernier n'a pas la cinquiéme, joint que les finales y répugnent comme au précédent.

Le même empêchement se trouve aussi à 1261, 1189, 420, & à son correspondant 1189, 989, 660.

Enfin on trouve 1517 au triangle 1525, 1517, 156, & son correspondant 1517, 165, 1508, qui sont les premiers qui ont toutes les conditions requises, & même les finales s'accordent bien à ce qui est requis. On éprouvera donc si ôtant de 165 la difference de 1508 à 1517, on aura 156 ; j'ôte 1508 de 1517, reste 9, lequel étant ôté de 165, reste 156, ainsi qu'il est requis.

On a donc trouvé un triangle dont le moyen côté, sçavoir 1517, est hypotenuse d'un autre triangle, & dont le moindre côté 156 est moindre que l'un des côtez du second triangle de la difference de l'autre côté à l'hypotenuse, car 156 est moindre que 165 de 9, lequel 9 est la difference de l'autre côté 1508, & de l'hypotenuse 1517 ; ce qu'il falloit trouver.

Ayant ce triangle 156, 1517, 1525, on aura celui qui est requis prenant les côtez de celui-ci pour les racines des quarrez qui le composent, les quarrez de 156 & 1517 sont 24336 & 2301289, qui donnent le triangle 473304, 2276953, 2325625, auquel l'hypotenuse est un quarré

dont la racine est 1525, & le moindre côté 473304 a un quarré pour difference avec chacun des deux autres, car sa difference avec le moyen côté est 1803649 quarré de 1343, & avec l'hypotenuse 1852321 quarré de 1361. Ainsi qu'il étoit requis.

ABREGÉ DES COMBINAISONS.

ON appelle Combinaiſon le divers aſſemblages de pluſieurs choſes.

Il y en a de deux ſortes principales, chacune deſquelles ſe diviſe encore en d'autres. De ces deux jointes enſemble on en fait une troiſiéme qui eſt mêlé de ces deux, & encore une quatriéme qu'on nommera multiple, parce qu'elle ſe fait par la multiplication de chacune de ces ſortes.

La premiere ſera nommée combinaiſon d'ordre, la deuxiéme combinaiſon de changement, la troiſiéme mêlée, & la quatriéme multiple.

La combinaiſon d'ordre contient les façons differentes dont on peut arranger & diſpoſer pluſieurs choſes; par exemple, en combien de ſortes on peut arranger quelque multitude de ſoldats, ou combien on peut faire de nombre differens avec quelques chiffres, ou combien on peut faire d'Anagrammes de quelque nom, ſoit qu'elles ſe puiſſent prononcer, ou qu'elles ne le puiſſent; & ce qu'on obſerve en ceci, & qui eſt la proprieté particuliere de cette combinaiſon, eſt que les choſes une fois priſes ne doivent point être changées; comme ſi on prend cette diction *Jaques*, on conſidérera la varieté des diſpoſitions que peuvent recevoir les ſix lettres de cette diction, ſans qu'il ſoit permis de mettre quelque autre lettre nouvelle outre ces ſix, ou d'en omettre quelqu'une.

Cette combinaiſon a pluſieurs cas, ou une infinité, qui ſe réduiront à deux.

Le premier & le principal eſt quand toutes les choſes combinées ſont differentes, comme lors qu'il eſt queſtion d'arranger des hommes, pas un deſquels ne ſe peut trouver en deux lieux : ou lors qu'on fait les Anagrammes de quelque diction, dont toutes les lettres ſont differentes, comme *Charité.*

Le ſecond, qui dépend du premier, eſt quand parmi les choſes combinées, il y en a de ſemblables, comme il arrive en faiſant les Anagrammes des dictions qui ont quelque lettres ſemblables : par exemple, ſi on vouloit ſçavoir combien on peut faire d'Anagrammes de cette diction *Pierre*, entre les ſix lettres de laquelle il y a deux *e*, & deux *r* qui ſe reſſemblent.

Combinaiſon d'ordre.

L'ordre des choſes differentes ſe trouve comme il s'enſuit.

On multiplie la combinaiſon de la multitude précédente par le nombre de la multitude donnée : ainſi pour avoir l'ordre de ſix choſes, il faut multiplier l'ordre de 5 choſes par 6 ; & pour avoir l'ordre de 5, on multipliera celui de 4 par 5 ; & pour celui de 4, on prendra le produit de l'ordre de 3 par 4 ; de même pour celui de 3, on multipliera l'ordre de 2 par 3. Or l'Ordre de 2 ne peut être que 2, car deux choſes ne ſouffrent que deux diſpoſitions differentes, ſçavoir en mettant au premier lieu celle qui auparavant étoit au ſecond, comme *B*, *A*. & *A*, *B*. On pourroit dire auſſi que la combinaiſon de deux choſes ſe trouve en multipliant celle de 1, qui eſt 1 par 2.

1	1
2	2
6	3
24	4
120	5
720	6
5040	7
40320	8
362880	9
3628800	10
39916800	11
479001600	12
6227020800	13
87178291200	14
1307674368000	15
20922789888000	16
355687428096000	17
6402373705728000	18
121645100408832000	19
2432902008176640000	20
51090942171709440000	21
1124000727777607680000	22

On trouvera cette combinaison poursuivie jusques à 64. in lib. Harmonicon, *du P. Mersenne, pag.* 116, *&* 117.

Si on veut donc trouver l'ordre de quelque multitude, il faudra chercher celui des multitudes précédentes, & faire la Table de toutes, comme on voit ici.

La colomne qui est du côté droit contient le nombre de la multitude des choses dont on veut sçavoir l'ordre, c'est-à-dire la differente façon de les arranger: celle qui est du côté gauche contient l'ordre.

Je mets donc premierement 1, tant à droite qu'à gauche, parce que l'ordre d'une chose n'est qu'un; puis je mets du côté droit le nombre suivant 2, par lequel je multiplie l'ordre du précédent, sçavoir 1, pour avoir 2.

Je mets après 3 au-dessous de 2 à droit, & par ce nom-

bre je multiplie l'ordre de 2, ſçavoir 2 ; & on aura 6, qu'il faudra mettre près de 3 : enſuite j'écris 4 deſſous 3, & je multiplie par ce 4 l'ordre de 3, ſçavoir 6, pour avoir 24, & ainſi de ſuite comme on voit en la Table.

obie
obei
oibe
oieb
oebi
oeib
boie
boei
bioe
bieo
beoi
beio
iobe
ioeb
iboe
ibeo
ieob
iebo
eobi
eoib
eboi
ebio
eiob
eibo

Voici la differente diſpoſition qu'on peut donner à quatre choſes, afin de faire voir de quelle façon on les arrangera pour n'omettre aucune diſpoſition. On ſe propoſera premierement quelque ordre, comme en ces quatre lettres *o*, *b*, *i*, *e*. La premiere ſoit *o*, la ſeconde *b*, &c. il faut en retenant la premiere changer l'ordre des dernieres. Ainſi, ayant placé & diſpoſé les quatre lettres ſelon cet ordre, je retiens *o* que je laiſſe toujours au premier lieu, & je change les trois autres *b*, *i*, *e*, en toutes les façons poſſibles qui ſont 6, & pour ces 6, on obſervera encore la même regle ; & ainſi parce que je trouve *b*, le premier des 3, je le retiens, & je change les deux autres *i*, *e*, en toutes les ſortes, qui ſont 2, ſçavoir *i*, *e*, & *e*, *i*.

Cela fait je change le *b*, & en ſon lieu je mets la lettre ſuivante, ſçavoir la troiſiéme qui eſt *i*, & on aura *o*, *i*, & enſuite je mets les deux autres *b*, *e*, dans leurs deux rangs, & enfin après *o* je mets la quatriéme lettre, ſçavoir *e*, & je change encore les deux autres *b*, *i*, en leurs deux façons.

Et parce que la quatriéme lettre eſt la derniere, & qu'on ne peut plus en mettre d'autre au ſecond lieu, je change la premiere lettre *o*, & en ſa place je mets la ſeconde *b*, & enſuite les trois autres ſelon leur ordre, ſçavoir la premiere au ſecond lieu, puis la troiſiéme & quatriéme ; & la ſeconde lettre *b*, demeurant ainſi au premier lieu, on fera les ſix changemens des autres trois, ſçavoir de *o*, *i*, *e*, comme auparavant. Cela étant fait, on mettra la troiſiéme lettre *i* au premier lieu, & on fera encore les ſix variations des trois autres, *o*, *b*, *e* ; & enfin on

mettra la derniere *e* au commencement, pendant que les trois autres *o*, *b*, *i*, ſeront arrangées en ſix façons.

S'il y avoit cinq lettres differentes comme *Tobie*, on auroit en la même maniere que ci-devant les vingt-quatre changemens de *o*, *b*, *i*, *e*, le *T* demeurant toûjours le premier; puis on ôteroit le *T* du premier lieu, & en ſa place on mettroit *o*, après lequel on mettroit *T*, *b*, *i*, *e*, en vingt-quatre ſortes; puis la troiſiéme lettre *b* tiendroit le premier lieu, & enfin la quatriéme & la cinquiéme.

De même, ſi on avoit ſix lettres, on feroit le changement des cinq dernieres en cent vingt façons, & mettant chacune des ſix lettres au premier lieu, on aura ſix fois 120, ſçavoir 720, pour les divers arrangemens des ſix choſes.

Pour ſept lettres on fera les 720 changemens des ſix dernieres, qui ſeront recommencez ſept fois, à cauſe des ſept lettres qui doivent occuper le premier lieu.

On trouvera de la même ſorte les diverſes ſituations pour les autres multitudes, ce qui donne aſſez à connoître la conſtruction de la table précedente, & la raiſon pour laquelle il faut multiplier tous les nombres & leurs produits depuis l'unité juſqu'au nombre de la multitude requiſe, pour avoir la combinaiſon de quelque multitude: car ayant à diſpoſer pluſieurs choſes d'un ordre different, on commence à operer ſur les trois dernieres; & gardant la premiere des trois, on range les deux dernieres en deux façons: & parce qu'il y a trois lettres differentes, on mettra chacune des trois pour la premiere, & après chacune on mettra les deux autres en deux façons. D'où il s'enſuit que pour avoir la combinaiſon de trois choſes, il faut multiplier 2 par 3, dont le produit eſt 6.

Si on vient après à conſiderer quatre choſes, on a montré comme les trois dernieres ſe peuvent varier en ſix façons: mais parce que chacune de ces quatre choſes peut tenir le premier lieu, & que les trois qui reſteront ſe va-

rient en ſix ſortes, il faudra multiplier 6 par 4, pour avoir la varieté de l'ordre de quatre choſes, qui ſera 24.

De même, ſi on a cinq choſes, chacune doit être miſe la premiere, & à chacune de ces ſituations les quatre dernieres ſeront rangées en vingt-quatre ſortes : il faut donc multiplier 24 par 5. Pour avoir l'ordre de cinq choſes, qui ſera 120; & ainſi de ſuite, il faudra multiplier la combinaiſon précedente par le nombre de la multitude donnée; & cela eſt une preuve évidente qui ſert de démonſtration pour la conſtruction de la table.

Mais lorſque dans une diction il y a pluſieurs lettres ſemblables, comme en cette diction, *Beauté*; il eſt certain qu'il n'y aura pas tant de varietez en l'ordre, que ſi toutes les ſix lettres étoient differentes; & que les deux *e* qui s'y rencontrent diminuent la multitude de ces varietez.

En ce cas, il faudra prendre la combinaiſon de l'ordre des lettres ſelon leur multitude, & la diviſer par l'ordre qui appartient à la multitude des ſemblables : ainſi, pour ſçavoir combien on peut faire d'anagrammes de la diction *Beauté*, on prendra la combinaiſon de l'ordre de ſix choſes, qui eſt 720; & parce que dans la diction il y a deux lettres ſemblables, on diviſera 720 par la combinaiſon de deux choſes, qui eſt 2, le quotient 360 ſera la multitude des anagrammes requiſes.

ebene
ebeen
ebnee
eebne
eeben
eenbe
eeneb
eeebn
eeenb
enbee
enebe

De même pour cette diction, *Ebene*, on prendra 120, qui eſt la combinaiſon de 5, à cauſe de ſes cinq lettres : mais parce que parmi ces cinq lettres il y en a trois ſemblables, je diviſe 120 par la combinaiſon de 3, ſçavoir par 6, & le quotient 20 ſera la multitude des anagrammes de cette diction.

On voit ici les 20 varietez de ces cinq lettres, qui pourront donner à connoître comment on pourra faire les varietez des ſituations, quand les choſes ne ſont pas toutes differentes.

eneeb Que s'il y avoit plusieurs sortes de lettres sem-
beene blables, il faudroit diviser la combinaison de tou-
beeen tes les lettres par celle de chaque sorte de sem-
benee blable, comme aux dictions, *Pierre* & *George*,
bneee ausquelles il y a six lettres, mais deux d'une sor-
nebee te & deux d'une autre.
neebe Je prendrai la combinaison de 6, sçavoir 720,
neeeb & la diviserai par celle de 2, & le quotient 360
nbeee encore par celle de 2, & j'aurai 180: ou bien je
multiplierai la combinaison de 2 par celle de 2, le produit sera 4, par lequel je diviserai 720, & le quotient sera 180.

Pour avoir la combinaison ou la multitude des anagrammes de la diction, *Ananas*, je vois qu'elle a six lettres: je prens donc 720, qui est la combinaison de 6; & parce qu'entre ces lettres il y en a trois d'une sorte & deux d'une autre, je divise 720 par la combinaison de 3, sçavoir par 6, & le quotient 120 par celle de 2, sçavoir par 2, & j'aurai 60: ou bien je multiplie la combinaison de 3 par celle de 2, sçavoir 6 par 2, & par le produit 12 je divise la combinaison de la multitude des lettres, sçavoir 720, le quotient 60 donnera la multitude des varietez des lettres de cette diction.

Il semble que l'ordre demanderoit qu'on traitât ensuite de la combinaison de changement ou de choix: mais parce qu'on trouve ses varietez par le moyen de la mêlée, on traitera premiérement de celle-ci, & on commencera par celle qu'on nomme générale.

Combinaison générale.

Cette combinaison est celle qui a été appellée mêlée, parce qu'elle contient tant l'ordre que le changement des choses. On la peut aussi diviser en deux especes, comme les autres, sçavoir si on considere les choses toutes differentes, ou bien si on suppose qu'elles puissent être toutes

ſemblables, ou qu'il y en puiſſe avoir pluſieurs ſemblables.

Cette derniere combinaiſon eſt la plus univerſelle de toutes, puiſqu'elle comprend toute ſeule tout ce qui eſt compris dans toutes les autres; car on y conſidere l'ordre comme en la premiere, & on prend les choſes dans une plus grande multitude, comme en la ſeconde; & outre celà on en peut prendre pluſieurs ſemblables ou toutes, comme ſi on prenoit les douze cartes du piquet dans douze jeux de piquet, car par ce moyen les douze cartes pourroient être ſemblables, & ainſi on pourroit avoir douze Rois de pique; ou ſeulement neuf ou dix cartes ſemblables, & les autres differentes, & en toutes les autres façons poſſibles; & l'ordre fera voir en combien de manieres on les pourroit joüer & jetter ſur la table en toutes ces ſortes de jeux.

Cette combinaiſon ſe trouve, prenant la multitude des choſes pour l'expoſant d'une puiſſance, qui a pour racine la diverſité des choſes combinées: ainſi pour ſçavoir en combien de façons on peut avoir & arranger ou joüer les douze cartes priſes dans douze jeux de piquet de trente-ſix cartes chacun, afin qu'on en puiſſe avoir tant de ſemblables qu'on voudra, il faut prendre 36 pour racine, & 12 pour l'expoſant de la puiſſance.

Ce ſera donc la douziéme puiſſance de 36.

Si on ne prenoit qu'une carte, on n'auroit que 36 varietez.

Si on en prenoit 2, on auroit 1296 varietez, ſçavoir le quarré de 36.

Pour trois cartes, on prendroit le cube de 36. Pour quatre, le quarré quarré. Pour cinq, la cinquiéme puiſſance de 36, & ainſi des autres.

La verité de cette operation ſe peut tirer ou du raiſonnement, ou de quelque exemple. Nous en avons un exemple aux chiffres, car il eſt certain qu'on les prend & diſpoſe en toutes les façons poſſibles, ſoit ſemblables ou differentes & priſes dans un plus grand nombre, & on a auſſi égard

à l'ordre : or les nombres ſe ſuivent, & ne different de proche en proche que de l'unité ; d'où il s'enſuit que le dernier & plus grand nombre de ceux qui ont une certaine multitude de lettres, comprendra tous les précedens ; par exemple, le plus grand nombre qui s'écrive par deux lettres ou chiffres eſt 99, qui comprend non ſeulement les nombres de deux lettres, mais auſſi ceux qui n'en ont qu'une ; mais il faut conſiderer que parmi ces nombres, il n'y en a aucun qui ait un zéro du côté gauche, & en la place des dixaines : on le pourra donc ſuppoſer au-devant des neuf premiers chiffres où il ne ſignifie rien, en prenant 01, 02, &c. & ainſi on auroit 99, nombres de deux lettres. Mais il y en manque encore un, pour avoir toutes les combinaiſons des dix caracteres pris deux à deux : car celui qui ſeroit fait de deux zero, ſçavoir 00, n'y eſt point ; il faudra donc ajoûter 1 à 99 pour avoir en tout 100 varietez, que peuvent ſouffrir deux choſes priſes dans dix. Or le nombre 100 contient 10 & 2, car 10 eſt ſa racine, & 2 ſon expoſant.

Les mêmes nombres ou chiffres pourroient encore fournir un autre exemple, ſçavoir ſi on prenoit les deux choſes dans neuf differentes, comme ſi on cherchoit tous les nombres de deux chiffres qui n'ont point de zero ; car par ce moyen on n'aura que neuf lettres : or en chaque dixaine il y a neuf nombres qui n'ont point de zero, & il n'y a que neuf dixaines qui ayent deux lettres, car les nombres de la premiere n'ont qu'une lettre : ſi donc on multiplie 9 par 9, on aura 81, qui eſt la varieté requiſe de deux choſes priſes dans neuf ; c'eſt la même choſe aux autres quantitez. Mais voici comme on fera voir la verité de cette régle.

Pour ne point ſortir de notre exemple de neuf, on voit premierement que ſi on ne prend qu'une ſeule choſe dans neuf differentes, on n'aura que 9 varietez : mais ſi on prend deux choſes, puiſqu'après chacune des neuf choſes on peut mettre chacune des mêmes l'une après l'autre ; pour

avoir cette varieté, il faudra multiplier 9 par 9, & on aura 81, qui eſt le quarré de 9.

Que ſi on prend trois choſes dans les neuf, on pourra devant chacune des 81 combinaiſons précedentes mettre chacune des neuf choſes : il faudra donc, pour avoir la varieté de trois choſes priſes dans neuf, multiplier 81 par 9, pour avoir 729 cube de 9.

Et ainſi continuant, on fera voir que pour avoir la varieté de quatre choſes priſes dans neuf, il faut multiplier 729 par 9, pour avoir le quarré quarré de 9, parce que devant chacune des 729 façons dont on aura pris & arrangé trois choſes, on pourra mettre chacune des neuf dans leſquelles on les a priſes.

De même, pour cinq choſes priſes dans neuf, on prendra la cinquiéme puiſſance de 9, &c.

Il faut ſeulement prendre garde que la diverſité des choſes qu'on prend, comme eſt ici 9, ſert toûjours de racine, & la multitude des mêmes choſes ſert d'expoſant.

Combinaiſon de changement ou de choix.

La ſeconde eſpece de combinaiſon eſt nommée de changement, ou de choix, à la difference de la premiere, où on ſuppoſe que les mêmes choſes demeurent toûjours : mais en celle-ci, on les varie, & on en fait comme divers amas pris dans une grande multitude. Par exemple, ſi d'un Régiment de 1000 hommes, on en détache 100, & qu'on veuille ſçavoir en combien de ſortes on peut faire une Compagnie de 100 ſoldats pris dans un Régiment de 1000 ; ou bien ſi on veut ſçavoir en combien de ſortes on peut avoir les douze cartes du jeu de piquet, où il y en a trente-ſix ; on voit manifeſtement que l'ordre ne fait rien à cette multitude, car la differente diſpoſition des cartes dans la main ne change rien au jeu, encore qu'on puiſſe bien avoir égard à l'ordre tant aux ſoldats en les arrangeant

geant diverſement, qu'aux cartes en les joüant de plusieurs manieres.

Cette combinaiſon ſera auſſi diviſée en deux eſpeces comme la précedente, ſçavoir celle en laquelle toutes les choſes ſont differentes, comme en l'aſſemblage des ſoldats, & celle en laquelle il ſe trouve pluſieurs choſes ſemblables; comme ſi on avoit un cent de diverſes ſortes de fruits, ſçavoir de chacune eſpece un cent, & qu'on voulût ſçavoir en combien de façons on pourroit remplir un panier d'un cent de ces fruits, ou bien ſi on avoit enſemble douze jeux de piquet, & qu'on voulût voir en combien de ſortes on pourroit avoir douze cartes à les prendre dans ces douze jeux.

Pour trouver la multitude des choix, il faut remarquer que toute combinaiſon mêlée étant diviſée par l'ordre, donne la combinaiſon de changement, pourvû que toutes les choſes ſoient differentes, ou qu'il y en ait toûjours autant de ſemblables.

Exemple. Si on avoit ſix paniers dont chacun fût plein d'une eſpece de fruit different des autres, mais égaux entr'eux, & qu'on voulût voir en combien de façons on pourroit prendre un cent de ces fruits dans les ſix paniers, ſuppoſant toûjours que dans chaque panier tous les fruits ſoient égaux, & qu'il n'y ait rien à choiſir, de ſorte que chaque eſpece de fruit ſoit reputée pour un même fruit, ainſi que les lettres de l'Alphabet, chacune deſquelles ne differe en rien de ſa ſemblable en ce qui regarde l'uſage qu'on en fait dans les dictions; & ainſi dans la diction *Anna*, le premier *a* n'eſt pas autre que le ſecond: or on entend que les fruits d'une même eſpece ſoient ici pris en la même façon que les lettres.

Si donc on veut avoir la varieté des ſortes de choix qu'on peut faire d'un cent de ces fruits dans les ſix paniers, dans chacun deſquels il faut ſuppoſer auſſi qu'il y ait pour le moins un cent de fruits, afin que ſi on veut on puiſſe

prendre un cent de ces fruits tous égaux, il faut faire la combinaiſon générale de cent choſes priſes dans ſix ſortes de choſes, ſi on y comprend auſſi l'ordre.

Et parce que la varieté des choſes eſt 6, ce nombre ſera la racine, & 100 qui eſt la multitude des choſes qu'on prend ſervira d'expoſant. On prendra donc la centiéme puiſſance de 6 pour la varieté des diverſes façons dont on pourroit prendre & arranger les fruits pris dans les ſix paniers.

Et parce que la combinaiſon générale contient la combinaiſon de l'ordre en toutes les façons poſſibles, tant des choſes ſemblables que des differentes, dont l'ordre eſt different, on ne la peut pas diviſer par l'ordre; car la ſomme de pluſieurs diviſeurs donne un autre quotient que s'ils étoient ſéparez, c'eſt-à-dire, que ſi on diviſoit ſéparément par chacun d'eux; joint que quelques-unes de ces varietez n'ont point d'ordre, c'eſt-à-dire, ne ſe peuvent mettre qu'en une ſeule façon, comme lorſque les choſes qu'on a priſes ſont toutes ſemblables: & les autres, où il ſe trouve pluſieurs choſes ſemblables, ont fort peu de varietez d'ordre; par exemple, ſi on a quatre choſes, elles ſeront conſiderées confuſément, ſoit qu'on les prenne toutes differentes, comme *a*, *b*, *c*, *d*, ou deux ſemblables, & deux autres differentes, comme *a*, *a*, *b*, *c*, ou trois ſemblables, & une autre comme *a*, *a*, *a*, *b*, ou deux d'une ſorte & deux d'une autre, comme *a*, *a*, *b*, *b*, ou enfin toutes quatre ſemblables comme *a*, *a*, *a*, *a*, ou *b*, *b*, *b*, *b*.

A, *b*, *c*, *d* ſe change en vingt-quatre façons; *a*, *a*, *b*, *c* en douze; *a*, *a*, *a*, *b* en quatre; *a*, *a*, *b*, *b* en ſix, & enfin *a*, *a*, *a*, *a* ne peut être diſpoſé que d'une ſorte, & n'a aucun ordre: mais voici comme on en ſéparera l'ordre.

Nous avons dit que la combinaiſon de changement étoit de deux ſortes: l'une où toutes les choſes ſont differentes comme aux douze cartes du piquet; l'autre où elles peuvent être indifferemment, ou toutes differentes, ou

toutes ſemblables, ou en partie diſſemblables & en partie ſemblables, comme ſi on prenoit les douze cartes du piquet dans douze jeux de piquet.

Pour l'une & l'autre ſorte de choix, il faut faire douze nombres par multiplication, compris le premier qu'on multiplie, qui eſt 36, à cauſe qu'il y a trente-ſix ſortes de choſes: mais pour le premier où tout eſt different, il faut multiplier par les nombres inferieurs, ſçavoir par 35, & le produit par 34, &c. & pour le ſecond qui peut avoir des choſes ſemblables, il faut multiplier par les ſuperieurs, ſçavoir par 37, 38, &c.

Ce qu'il faut obſerver en ceci, eſt que le nombre par lequel on commence les multiplications eſt celui de la varieté, & la multitude des nombres qu'il faut trouver par les multiplications le premier compris, eſt la multitude des choſes.

Ainſi voulant avoir toutes les façons du jeu de piquet, ſçavoir, de douze cartes priſes dans trente-ſix, en ſorte qu'elles ſoient toutes differentes, je prens 36 pour le terme & commencement des multiplications; & parce que toutes les cartes doivent être differentes, il faudra multiplier 36 par les nombres précedens moindres, ſçavoir par 35, & le produit 1260 par 34, pour avoir 42840, qu'il faudra encore multiplier par 33, & continuer tant qu'on ait douze nombres, ce qui ſe fera après onze multiplications, & le dernier nombre par lequel il faudra multiplier ſera 25, ſçavoir 11 moins que 36; car on prend toûjours un moins que la multitude des choſes, à cauſe que le nombre de la varieté, ſçavoir 36, eſt pris pour le premier nombre.

Le dernier produit eſt 599555620984320000, qui contient la varieté de douze cartes priſes en trente-ſix avec l'ordre, c'eſt-à-dire ſuppoſant qu'on les arrange auſſi en toutes les façons poſſibles, qui eſt le premier cas, ou premiere ſorte de la combinaiſon mêlée, qui ſuppoſe tou-

tes les choſes differentes, mais priſes en un plus grand nombre, & ſuppoſant auſſi l'ordre.

Que ſi on veut avoir les jeux de piquet ſans l'ordre, puiſque cet ordre ne change point le jeu, il faudra diviſer le nombre trouvé 599555620984320000 par la combinaiſon de l'ordre de douze choſes, ſçavoir par 479001600, & on aura 1251677700 varietez de jeux de piquet.

Pour ce qui eſt de joüer & de jetter les cartes ſur la table, il faut avoir égard à l'ordre, & chaque jeu ſe peut joüer en 479001600 ſortes, car telle eſt la combinaiſon de l'ordre de douze choſes, & ainſi pour avoir en tout en combien de ſortes on peut joüer les douze cartes priſes en 36, il faut multiplier 1251677700 par 479001600, pour avoir le nombre ci-devant trouvé 599555620984320000, qui montre en combien de façons on peut avoir & joüer les douze cartes.

Voilà pour ce qui appartient à la combinaiſon de changement, & à la combinaiſon mêlée lorſque toutes les choſes ſont differentes.

Car la mêlée, où l'ordre eſt compris, ſe trouve comme on a vû multipliant le nombre de la varieté des choſes, comme 36 par les nombres précedens 35, 34, &c. tant qu'on ait autant de nombres ou produits compris 36, que la multitude des choſes, qui eſt 12, & prenant le dernier produit pour le nombre requis.

Et la combinaiſon de changement ſe trouve diviſant ce nombre, ſçavoir le dernier produit, par le nombre de la combinaiſon d'ordre de la multitude des choſes, qui eſt ici 12.

Reſte à donner un exemple de la même combinaiſon de changement, lorſque les choſes peuvent être ſemblables.

Que les douze cartes ſe prennent dans douze jeux de piquet de trente-ſix cartes chacun, afin qu'elles puiſſent être toutes ſemblables, il faudra, comme on a dit ci-devant,

multiplier 36 par les nombres ſuivans, ſçavoir par 37, 38, &c. tant qu'on ait 12 nombres ou produits, ſçavoir autant que la multitude des choſes, & ainſi le dernier nombre qui multipliera ſera 47, puis diviſer le produit par l'ordre du nombre de la multitude, ſçavoir par l'ordre de 12.

De même pour les ſix paniers de fruit dans tous leſquels on choiſit cent fruits à diſcrétion, avec liberté de prendre ſi on veut tous les cent de même eſpece, & d'un même panier.

Parce que le nombre de la varieté eſt 6, je prens 6 pour le terme ou commencement des multiplications; je le multiplie donc par 7, & le produit 42 par 8, & le produit par 9, tant qu'on ait 100 nombres, compris 6, & ainſi le dernier nombre qui multipliera ſera 105, qui ſurpaſſe 6 de 99, ſçavoir de 1 moins que le nombre de la multitude 100, à cauſe que 6 eſt compté pour le premier nombre; & le dernier produit étant diviſé par l'ordre de cent choſes, qui eſt la multitude des choſes qu'on prend, donnera le nombre requis.

Que ſi on avoit des tables faites de la combinaiſon d'ordre, qui eſt la plus ordinaire & la plus en uſage, on y pourroit prendre la combinaiſon de 105, ſçavoir de 1 moins que la ſomme des deux nombres de varieté & de multitude, & la diviſer par la combinaiſon de 5, ſçavoir de 6—1; car ſi on avoit commencé par 2 à multiplier, & qu'on eût continué juſques à 105, on auroit la combinaiſon de 105: mais parce qu'on n'a commencé que par 6, il s'enſuit que le produit devroit être multiplié par la combinaiſon de 5 pour parvenir à celle de 105; & par conſequent, ſi on diviſe celle de 105 par celle de 5, on aura le nombre requis, qui doit être diviſé par celle de 100, comme il a été dit.

Mais parce que de ſi grandes diviſions & multiplications ſont ennuyeuſes, on ſe pourra ſervir du moyen ſuivant pour ſe paſſer de la diviſion, & diminuer beaucoup les multiplications.

Nous prendrons l'exemple des jeux de piquet dans les deux façons précedentes.

1° On prend douze cartes dans trente-six toutes differentes, & on demande en combien de sortes je puis avoir les douze cartes : parce que 36 est la varieté des choses, il me servira de terme ; & parce qu'il y a douze choses, je prens 12 nombres, compris 36 ; car la multitude des nombres qui se multiplient doit suivre la multitude des choses qui se combinent : & parce que les cartes sont toutes differentes, & qu'il n'y en a point de semblables, je prens les nombres moindres que 36, comme on voit ici, sçavoir 36, 35, 34, &c. le produit desquels il faudroit diviser par la combinaison d'ordre de douze choses, laquelle combinaison se trouve, en multipliant l'un par l'autre tous les nombres jusqu'à 12, sçavoir 1, 2, 3, &c.

Puis donc que le produit des nombres inferieurs doit diviser celui des superieurs, il faut que les inferieurs se trouvent tous séparément dans les superieurs, autrement leur produit ne diviseroit pas l'autre grand produit.

Que les inferieurs soient donc ôtez des superieurs, & la division sera faite, comme on voit ici.

7 9
36, 35 : 34, 33, 32, 31, 30, 29, 28, 27, 26, 25.
2 3
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.

Je considere donc les superieurs, & je trouve premierement 36, qui est le produit de 3 & 12 ; j'ôte donc 36 de la ligne superieure, & 3 & 12 de l'inferieure.

Je viens à 35, qui est produit par 5 & 7 ; j'ôte donc 35 d'un côté, & 5 & 7 de l'autre.

34 est fait de 2 & 17 ; mais parce que 17 n'est point en la ligne inferieure, je passe à une autre, & considere 33, qui est produit par 3 & 11 ; j'ôte donc 33, & de la ligne inferieure j'ôte 3 & 11 ; mais parce que le nombre 3 ne s'y trouve plus, je l'ôte de quelque composé de la même ligne

inferieure, comme de 9, & je remets un 3 dessus, parce que 9 est fait & produit de deux 3.

32 est fait de 4 & 8; j'ôte donc 32 de la ligne superieure, & 4 & 8 de l'inferieure. | 31 est nombre premier.

30 est fait de 3 & 10; j'ôte donc 30, & de la ligne inferieure j'ôte 3 & 10, sçavoir le 3 que j'avois mis sur le 9.

Il ne reste plus en bas que 2 & 6 : le 6 est fait de 2 & 3; j'ôte donc 3 de quelque nombre de la ligne superieure, comme de 27, reste 9, que j'écris dessus 27; & ôtant ainsi le 3 de 6, reste 2, que j'écris sur 6, (car ici, où il est question de parties qui font le nombre par multiplication, ôter un nombre c'est diviser par ce nombre.)

Enfin il reste en bas 2 & 2, qui font 4, que j'ôte de quelque nombre de la ligne superieure, comme de 28, reste 7, que j'écris dessus, & j'ôte tant 28 que les deux 2 de la ligne inferieure.

Reste donc en la ligne superieure à multiplier, 34, 31, 29, 7, 9, 26, 25, l'un par l'autre, dont le produit fait 125167700 pour la diversité des jeux de piquet, comme on avoit trouvé ci-devant.

Que si on prend les douze cartes dans douze jeux de trente-six cartes chacun, les douze cartes pourront être semblables : il faut donc prendre 12 nombres, suivant la multitude des cartes, à commencer par 36, qui représente la varieté des cartes, & poursuivant par les nombres plus grands, comme on voit ici, il faudroit diviser le produit des superieurs par celui des inferieurs : mais pour épargner cette division, on ôtera les semblables comme ci-devant, sçavoir pour 36, on ôtera 3 & 12.

19 (au-dessus de 38) 23 (au-dessus de 46)

36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47.

2 (au-dessus de 8)

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.

Pour 40. | 4 & 10 pour 42. | 6 & 7. pour 44, 11 & 4. Mais parce qu'il n'y a point de 4, on le prendra dans 8,

& on mettra un 2 dessus. Pour 45 on ôtera 5 & 9, & il restera 2 & 2 en la ligne inferieure : on en ôtera l'un de 38, & l'autre de 46, restera 19 & 23, qu'on écrira dessus.

Restera donc 37, 19, 39, 41, 43, 23, 47, qu'il faut multiplier l'un par l'autre ; le produit 5225140085 1 sera la varieté requise des jeux qu'on peut avoir, sçavoir de douze cartes prises dans douze jeux de trente-six cartes chacun.

Corollaire premier.

De ce qui a été dit, il s'ensuit que tout nombre qui dénote la varieté des choses differentes sans l'ordre, dénote aussi la varieté de quelques autres, entre lesquelles toutes ou quelques-unes peuvent être semblables pareillement sans l'ordre, exemple.

Le nombre qui montre la varieté de douze cartes prises dans trente-six, montre aussi la varieté de douze cartes prises dans douze jeux de vingt-cinq cartes chacun, c'est-à-dire, supposant douze jeux semblables, chacun desquels auroit vingt-cinq cartes differentes.

La raison se tire de l'opération, car aux deux cas des cartes differentes ou semblables, on prend le nombre de la varieté pour le premier; & si les choses sont differentes, on prend les nombres moindres : que si elles peuvent être semblables, on en prend autant qui soient plus grands que le nombre de varieté : mais si du grand nombre comme 36, on descend au moindre 25, & qu'on multiplie les nombres qui sont entre deux, comme il a été dit, on aura le même produit, que si on prend 25 pour le nombre de la varieté, & qu'on monte jusqu'à 36 : mais le premier se fait quand les choses sont differentes, & le second quand elles peuvent être semblables : donc un même nombre montre la combinaison des choses differentes, & de celles aussi qui peuvent être semblables, en le divisant par la combinaison d'ordre de douze choses : mais des deux nombres

nombres qui sont les extrêmes de ceux qui le multiplient, le plus grand sera la variété des choses quand elles sont toutes differentes, comme 36; & le moindre comme 25, quand les choses peuvent être toutes semblables.

De même, le nombre qui représente la diversité ou combinaison de douze cartes prises en douze jeux de trente-six cartes chacun, montre aussi la combinaison de douze cartes prises en quarante-sept.

Ainsi pour passer des cartes semblables aux differentes, on change la variété des cartes, & on prend le douziéme nombre en augmentant si on se sert de douze cartes chaque fois, & au lieu de 36, on aura 47.

Mais pour passer des choses differentes aux semblables, il faut prendre le douziéme nombre en diminuant, & au lieu de 36, on prend 25, car le nombre de la multitude, sçavoir 12, ne change point.

Corollaire second.

Lorsqu'on prend les douze cartes dans douze jeux de cartes, afin qu'elles puissent être toutes semblables, on les peut considerer avec l'ordre, ou sans l'ordre: si on y met l'ordre, il se faut servir des puissances quarrées; si on n'y met point l'ordre, on se servira des puissances triangulaires.

On nomme ici puissance quarrée celle qui se fait par multiplication de la racine par elle-même, puis du produit par la même, &c. comme sont les puissances ordinaires.

On voit une table desdites puissances triangulaires jusqu'à la douziéme puissance de 25. in lib. Harmonicon, du P. Mersenne, page 136.

On nomme puissance triangulaire celle qui se fait par l'addition des puissances qui ont 1 moins d'exposant depuis la premiere, qui est 1, jusques à celle qui a pareille racine: ainsi la sixiéme puissance triangulaire de 5 est la somme des cinq premieres cinquiémes puissances, & la cinquiéme puissance de 5 est la somme des cinq premieres quatriémes puissances, & la quatriéme puissance de 5 est

la ſomme des cinq premiers tétraédres, ou troiſiémes puiſſances, & le tétraédre de 5 eſt la ſomme des cinq premiers triangles, comme le cinquiéme triangle, ou le triangle de 5 eſt la ſomme des cinq premiers nombres.

En chaque ſorte on prend pour racine la variété des choſes, & pour expoſant leur multitude : ainſi pour avoir les douze cartes lorſqu'elles peuvent être ſemblables avec l'ordre, on prend la douziéme puiſſance quarrée de 36, parce qu'il y a de trente-ſix ſortes de cartes; mais ſi on prend les mêmes douze cartes ſans y joindre l'ordre, il faudra prendre la douziéme puiſſance triangulaire de 36.

Corollaire troiſiéme.

On pourra tirer de là une régle bien facile pour avoir les puiſſances triangulaires. On demande, par exemple, la ſixiéme puiſſance triangulaire de 5, la racine eſt 5, & l'expoſant eſt 6, on prendra ſix nombres de ſuite dont la racine 5 ſera le moindre, ſçavoir 5, 6, 7, 8, 9, 10; il les faut multiplier l'un par l'autre, & diviſer le produit par l'ordre de la multitude des nombres, qui eſt repréſentée par l'expoſant 6, & cet ordre eſt 720, ou bien, pour éviter la diviſion, on ôtera de ces ſix nombres, les ſix nombres premiers, 1, 2, 3, 4, 5, 6, comme on a vû ci-devant, & il reſtera 7, 3, & 10, dont le produit 210 eſt la puiſſance requiſe, ſçavoir la ſixiéme puiſſance triangulaire de 5.

3.
~~5~~. ~~6~~. 7. ~~8~~. ~~9~~. 10.
~~1~~. ~~2~~. ~~3~~. ~~4~~. ~~5~~. ~~6~~.

Déterminer en combien de façons trois dez peuvent faire leurs points.

POur dire en général combien ils peuvent faire de divers points, il faut cuber 6, & l'on a 216; mais pour ſçavoir en particulier comment chaque point ſe peut faire, nous diſons ainſi. Depuis 3 juſqu'à 18 nous avons ſeize nombres, les huit premiers ſe rapportent aux huit der-

niers, c'eſt-à-dire que 3 & 18 ſont égaux à 4 & 17; 5 & 16 valent 6 & 15; 7 & 14 valent 8 & 13, &c. Or pour avoir en combien de manieres chaque nombre peut venir: pour les ſix premiers, ou pour les ſix derniers, il faut prendre les ſix premiers triangles, ainſi l'on pourra amener 3 ou 18 en une ſorte, car le premier triangle eſt 1 : 4 ou 17 en trois ſortes, car 3 eſt le ſecond triangle: 5 ou 16 en ſix façons, car le troiſiéme triangle eſt 6; 6 ou 15 en dix ſortes, car 10 eſt le quatriéme triangle: 7 ou 14 en quinze ſortes, parce que 15 eſt le cinquiéme triangle: 8 ou 13 en vingt & une ſortes, d'autant que 21 eſt le ſixiéme triangle; & voilà pour les ſix premiers, & pour les ſix derniers. Pour les quatre reſtans, ſçavoir 9, 12, 10, 11. Pour 9 & 12, il faut prendre le quarré de 5, c'eſt-à-dire 25, & pour 10 & 11, il faut prendre le cube de 3, qui eſt 27, & ces deux nombres 25 & 27 déterminent les diverſes manieres dont ſe trouveront ces quatre derniers. Or toutes ces façons differentes, ſçavoir, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, étant jointes enſemble, font 108, & les doublant nous auront 216, qui eſt le cube de 6, que nous avons pris au commencement.

Queſtion ſur la regle d'intereſt.

UN homme met un ducat à la Banque à multiplier pour 32 ans, à la charge d'en avoir les intérêts, & intérêt d'intérêt à raiſon de 5 pour 100. On demande à combien ſe montera le principal & les intérêts au bout de ce temps.

L'intérêt eſt $\frac{1}{20}$ par an; donc au bout de l'an le principal avec l'intérêt ſe montera à $\frac{21}{20}$ de ducat.

Pour les années ſuivantes il faut prendre les puiſſances du numérateur & du dénominateur de cette fraction, & en faire une fraction, & le nombre des années ſera l'expoſant de ces puiſſances: il faudra donc prendre la trente-deuxiéme puiſſance de 21 & de 20 pour le principal & les intérêts de 32 ans. J'ai pris 32 pour la commodité de la

multiplication, à cauſe qu'il n'y aura qu'à prendre le quarré des nombres précédens. Ainſi

Pour 2 ans on aura $\frac{441}{400}$ de ducat.

Pour 4 ans $\frac{194481}{160000}$, qui ſe trouve prenant le quarré de $\frac{441}{400}$.

Pour 8 ans $\frac{37822859361}{25600000000}$.

Pour 16 ans $\frac{1430568690241985328321}{655360000000000000000}$.

Enfin pour 32 ans on aura $\frac{2046526777500669368329342638102622164679041}{429496729600000000000000000000000000000000}$, qui font $4\frac{3}{4}$ ducats peu plus: le profit ſera donc $3\frac{3}{4}$ ducats & un peu plus, & ainſi il ſera preſque quadruple du principal.

Si on vouloit continuer à calculer l'intérêt pour quelques autres années, il faudroit multiplier le numérateur par 21, & le dénominateur par 20 : mais pour éviter la difficulté de ces grands nombres, il faut retrancher une partie de la fraction qui n'apporte pas un profit conſidérable, & prendre ſeulement $\frac{20465267775}{4294967296}$. Donc pour 33 ans on auroit $\frac{429770623275}{85899345920}$, qui eſt un peu plus de 5 ducats, qui feroient 4 ducats de profit. Et ſi on l'y laiſſoit encore une autre année, on auroit $\frac{9025183088775}{1717986918400}$, qui ſont 5 ducats $\frac{1}{4}$ peu plus, c'eſt donc 4 ducats $\frac{1}{4}$ de profit.

Des Combinaiſons multiples.

ON a conſideré de deux ſortes de Combinaiſons; l'une d'ordre, & l'autre de varieté ou changement, chacune deſquelles peut être multipliée: en voici des exemples.

Six choſes ſe peuvent ranger en 720 façons: que ce ſoient par exemple ſix ſoldats à qui je donnerai ſix ſortes d'armes: parce que les armes ſe peuvent encore combiner en 720 façons, il faudra prendre le quarré de 720, & on aura 518400 façons de les ranger & de les armer: mais ſi avec cela on leur donne ſix ſortes de livrées, il faudra prendre le cube de 720 pour la varieté dont on les pourra ranger avec leurs diverſes armes & livrées, ce qui ſe fera en 373248000 façons.

Mais si on n'avoit pas autant de sortes d'armes & de livrées que de soldats; par exemple, si on n'avoit que de quatre sortes d'armes, & que de l'une des sortes on en eût trois, comme si on avoit trois épées, un mousquet, une pique & une hallebarde, & qu'on n'eut que trois sortes de livrées, sçavoir deux de chaque sorte : il faudra prendre pour les armes la combinaison de six choses entre lesquelles il y en auroit trois semblables : or on a fait voir que pour avoir cette combinaison, il faut diviser la combinaison de six, sçavoir 720, par six qui est la combinaison de trois choses semblables, & on aura 120 pour les diverses façons dont on peut armer ces soldats. On multipliera donc 720 par 120, & on aura 86400 manieres de ranger & d'armer ces soldats.

Pour leurs livrées, parce qu'il y en a deux de chaque sorte & de trois sortes en tout, il faudra diviser 720 par la combinaison de deux choses répétées trois fois, qui est huit, parce que deux multipliant deux fait quatre, qui étant encore multiplié par deux donne huit : divisant donc 720 par huit, on aura 90, par lequel il faudra multiplier le produit qu'on vient d'avoir, qui est 86400, & on aura en tout 7776000 manieres d'arranger ces soldats avec leurs armes & leurs livrées differentes.

Que si au contraire on avoit plus de sortes d'armes & de livrées qu'il n'y a de soldats; par exemple, si on avoit sept sortes d'armes & huit sortes de livrées qu'on voulût donner à six soldats en toutes les manieres possibles, on se serviroit de la combinaison de varieté : voici comme se fait cette combinaison.

Pour les armes, parce qu'il y en a de sept sortes, mais qu'on n'en prend que six à chaque fois, on multipliera 7 par les nombres moindres jusqu'à ce qu'on ait 6 nombres, sçavoir jusqu'à 1 : on multipliera donc 7 par 6, le produit 42 par 5, puis le produit par 4, 3, & 2, on aura 5040, qui est le même nombre que celui de la combinaison d'or-

dre de ſept choſes, parce que 1 ne multiplie point.

Pour les livrées, parce qu'il y en a de huit ſortes, & qu'on ne ſe ſert que de ſix, il faudra prendre le changement de ſix choſes priſes dans huit, qui ſe trouve en multipliant l'un par l'autre ſix nombres commençant par 8 en diminuant, ſçavoir 3, 4, 5, 6, 7, 8, dont le produit eſt 20160 y compris l'ordre.

Il faudra donc multiplier 720, qui montre la quantité de façons dont on peut ranger ſix ſoldats, par 5040, qui eſt la varieté de leurs armes, & le produit 3628800 (qui contient l'ordre des ſoldats & des diverſes manieres dont on les peut armer) par 20160, qui eſt la varieté des livrées, & on aura 73156608000, qui montre toutes les façons d'arranger ces ſoldats, & de leur donner diverſes armes & livrées.

La combinaiſon de varieté ſe peut auſſi multiplier par une autre combinaiſon de varieté.

On a ſix Places à pourvoir de Commandans, mais on n'en veut placer d'abord que trois: on demande en combien de manieres on peut placer dans trois de ces Places trois de ces Commandans pris dans ſix qui ſont arrêtez. On prendra l'ordre de trois choſes priſes dans ſix, multipliant ſix par cinq, & le produit par quatre; puis diviſant le produit 120 par ſix, qui eſt la combinaiſon d'ordre de trois choſes, on aura 20 pour le changement de trois choſes priſes dans ſix; ou par abregé on multipliera ſeulement cinq par quatre. La combinaiſon de trois Places priſes dans ſix eſt pareillement 20; on multipliera donc 20 par 20, & on aura 400 façons de placer trois de ces Commandans chacun dans l'une des ſix Places.

Or il n'importe pas qu'il y ait autant de Places que de Commandans: il y en peut avoir plus ou moins, & la régle ſera toujours la même.

Si par exemple, il n'y avoit que cinq Places, il faudroit prendre la varieté de trois choſes priſes dans cinq, qui eſt

60, l'ordre compris, qui étant divisé par six qui est l'ordre de trois choses, on a dix, lequel multiplié par 20, qui est la combinaison de trois Commandans pris dans six, on auroit 200 façons de les placer. De même s'il y avoit huit Places on prendroit la combinaison de trois pris dans huit, qui est 336 compris l'ordre, qui étant divisé par six, qui est l'ordre de trois choses, donne 56, qui multiplié par 20 donneroit 1120 façons de placer ces trois Commandans.

Il y a quelqu'autre chose à considérer dans la combinaison pour l'assemblage des lettres qui forment les dictions : il y en a quelques-unes qui ne se peuvent prononcer quand elles sont ensemble, c'est pourquoi il est nécéssaire de les séparer.

On veut sçavoir, par exemple, combien on peut faire de dictions des huit lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *i*, *o*, *s*, à telle condition que les trois *b*, *c*, *d*, ne se trouvent jamais ensemble. Il faudra considérer ces trois lettres comme une seule, & ainsi il n'y aura que six choses, dont la combinaison est 720 : mais parce que ces trois lettres se peuvent trouver de suite en six façons, il faut multiplier 720 par six ; le produit est 4320, qu'il faut ôter de la combinaison de huit choses qui est 40320, restera 36000 dictions ou anagrammes qu'on pourra faire avec ces huit lettres sans que *b*, *c*, *d*, se trouvent ensemble.

On pourroit encore demander que deux de ces consones ne se trouvassent jamais au commencement ni à la fin des dictions. Pour le trouver il faut voir combien il se fait de changemens pendant que deux de ces lettres sont au commencement ou à la fin ; & parce qu'il reste six lettres, on aura 720 changemens : mais entre ces 720 il y en a 120 ausquels la troisiéme consone se trouve contre les deux autres, & cela est compris dans les 4320 qu'il a fallu ôter de 40320 ; il faut donc ôter 120 de 720, reste 600 qu'il faudra multiplier par 12, parce qu'on peut prendre

les deux lettres dans les trois en trois façons ; & à cause de l'ordre il faudra multiplier trois par deux ; & parce qu'il ne faut pas aussi que les deux lettres se trouvent à la fin, on aura douze variétez, qui multipliées par 600 donnent 7200 qu'il faut ôter de 36000, restera 28800 anagrammes.

Pour sçavoir en quel rang est une diction dans le grand nombre de la combinaison générale à commencer à celles d'une lettre, puis à celles de deux, de trois, & ainsi du reste, jusqu'au nombre des lettres dont notre diction sera composée, comme l'on fait aux chiffres où l'on commence à compter par les nombres qui n'ont qu'un chiffre, puis on vient à ceux qui en ont deux, &c. il faut voir la quantiéme & la premiere lettre à main gauche dans l'alphabet, & de combien de lettres est composée la diction : par exemple, je veux sçavoir le quantiéme est ce mot *Aser*, qui est de quatre lettres ; dont il y en a 234256, & les autres dictions moindres y étant ajoutées, sçavoir celles de 3, 2, & une lettre, il y en aura 245410. Pour sçavoir donc le quantiéme il est dans ce dernier nombre à commencer à compter par *a*, puis *b*, &c. en après *a a*, *a b*, &c. je prens la premiere lettre *A*, qui est la premiere de toutes, & ne vaut qu'un mille, qui vaut 10648 (nombre des mots de trois lettres) puis je viens à *s*, qui est la dix-septiéme centaine, & partant je multiplie 484 par 17, le produit est 8228 ; puis à *e*, qui est la cinquiéme dixaine dont chacune vaut 22, qui multiplié par cinq, font 110 ; la derniere lettre est *r*, qui est la seiziéme, puis j'ajoute ces quatre sommes ensemble, sçavoir 10648, 8228, 110 & 16, le total est 19002 ; de sorte que *Aser* est le 19002 mot dans le nombre de 245410, ou si l'on veut dans le dernier nombre de la combinaison générale de 22, qui est l'addition de tous les autres.

Le lieu de ce mot *Baal* se trouve ainsi : il est composé de quatre lettres, & partant la premiere à gauche est mille,

mille, qui exprime ſon nombre 10648 fois, & cette lettre *B* eſt la deuxiéme lettre, partant il faut multiplier ce nombre par deux, ce ſera 21296; la ſeconde lettre eſt *a*, qui eſt centaine, & qui vaut 484; la troiſiéme eſt encore *a*, qui eſt dixaine, & qui vaut 22; la derniere eſt *l*, qui eſt la dixiéme lettre, partant il faut aſſembler 21296, 484, 22 & 10, & on trouvera que *Baal* ſera le 21812 mot.

Le lieu de *Levi* ſe trouve ainſi; *L* eſt la dixiéme lettre, & partant je multiplie le mille qui eſt 10648 par 10, le produit eſt 106480; *e* eſt la cinquiéme lettre: je multiplie donc 484 par cinq, le produit eſt 2420; *v* eſt la dix-neuviéme lettre que je multiplie par 22, le produit eſt 418; *i* qui eſt la derniere eſt la neuviéme; j'aſſemble donc 106480, 2420, 418 & 9, & je trouve que *Levi* eſt la 109327 diction.

Toutes les autres dictions ſe trouvent de même, ſoit qu'elles ayent plus ou moins de lettres; & il faut remarquer que la premiere choſe qu'il faut faire eſt de voir de combien de lettres la diction eſt compoſée, puis voir la quantiéme lettre eſt la premiere à main gauche, & par le nombre du rang qu'elle tient dans l'alphabet multiplier le nombre de la combinaiſon générale précédent celui des lettres dont eſt compoſée la diction: par exemple, ſi elle avoit huit lettres, & que la premiere lettre fut *G*, qui tient le ſeptiéme lieu dans l'alphabet, il faudroit multiplier le nombre de la combinaiſon de ſept choſes, qui eſt celui qui précéde huit, par ſept, & puis continuer aux autres lettres. Si la diction avoit ſix lettres, & que la premiere fut un *V*, qui tient le dix-neuviéme lieu, il faudroit multiplier la combinaiſon de cinq choſes par dix-neuf, & ainſi des autres: ou bien commencer par la premiere lettre à main droite, qui ne vaut que ſon nombre, & la ſeconde le vaut 22 fois.

Par ce moyen on pourroit écrire des lettres bien obſcu-

res, & qu'il ſeroit bien difficile de déchifrer, ſi l'on n'en ſçavoit la méthode; ſçavoir ſi on mettoit au lieu des mots le rang qu'ils tiennent dans le grand nombre : mais ce n'eſt pas aſſez de ſçavoir écrire, ſi l'on ne ſçait lire ſon écriture, & ce n'eſt pas peu de choſe que de ſçavoir lire celle-ci; car ceux mêmes qui l'auroient écrite ne la pourroient lire, s'ils n'en ſçavoient la méthode, quoiqu'ils ſçuſſent celle de l'écrire.

Ayant donc un nombre donné, il faut prendre à la Table des combinaiſons le plus grand nombre qu'on pourra, qui néanmoins puiſſe ſervir de diviſeur au nombre donné. La diviſion faite il faut prendre ce qui eſt reſté, & le diviſer par la combinaiſon qui précéde, & le quotient montre la quantiéme lettre on doit prendre dans l'alphabet, de ſorte qu'il ne faut pas que le quotient paſſe jamais 22, & il faut continuer à diviſer juſques à ce que l'on diviſe par 22, & cette derniere diviſion faite, il faut voir ce qui reſte & mettre la lettre qui convient à ce nombre pour la derniere. Il faut remarquer que ſi l'on ne pouvoit arriver à la diviſion par 22, ou qu'icelle étant faite il ne reſtât rien, ou que l'on ne put pas diviſer par tous les nombres des combinaiſons moindres que le premier qu'on a pris, & que le reſte de la premiere diviſion fut trop petit pour ce faire, le nombre que l'on auroit pris pour diviſeur ſeroit trop grand, & il faudroit prendre celui de devant, qui eſt moindre, & qui n'eſt que $\frac{1}{22}$ du premier, comme en ce nombre 234299, ſi on prenoit 234256 pour diviſeur, le quotient ſeroit 1, & il ne reſteroit plus que 43, que l'on ne pourroit diviſer par les autres nombres; ainſi il faudroit prendre celui de devant, qui eſt 10648, & cela arrive toujours aux dictions qui commencent par un *z*, & à celles qui commencent par un *y* ſuivi d'un *z*. 2°. Il faut remarquer que la diction aura toujours une lettre plus que le nombre des combinaiſons qui ſervira de diviſeur, comme en cet exemple; où 10648 ſert de diviſeur, qui eſt le

nombre de la combinaiſon de trois choſes, il y aura quatre lettres ; car ayant diviſé 234299 par 10648, le quotient ſera 21 qui vaut *y*, & il reſtera 10691 qu'il faudra diviſer par 484, & le quotient ſera 22, qui eſt un *z*, & il reſtera 43, qu'il faudra diviſer par 22, le quotient eſt 1, qui eſt *a*, & le reſte eſt 21 qui eſt *y* ; de ſorte que ledit nombre vaudra autant que *yzay*. 3°. Il eſt à remarquer qu'il faut diviſer par tous les nombres moindres juſques à 22, & qu'il n'en faut paſſer aucun, & partant ſi le reſte étoit moindre que le nombre par lequel on devroit diviſer après, le quotient ſeroit trop grand, partant il le faudroit diminuer de l'unité. Si le quotient étoit 1, & que le reſte fut trop petit, il faudroit changer de diviſeur, comme en l'exemple ci-deſſous : par exemple, en ce nombre 21600, je prens 10648 pour diviſeur ; le quotient eſt 2, & il reſte 304 qui eſt moindre que 484, partant je prens 1 pour quotient, reſte 10952, que je diviſe par 484, le quotient eſt 22, & il reſte 304 que je diviſe par 22, le quotient eſt 13, & il reſte 18 ; de ſorte que ce nombre ſera *Azot*.

Si on vouloit voir quel rang tient une diction entre celles qui ont même nombre de lettres, comme une de trois lettres entre celles de trois lettres, dont il y en a 10648, il faudroit multiplier la premiere lettre à main gauche, ſçavoir le rang qu'elle tient dans l'alphabet moins un par 484, qui ſont les centaines ; puis la ſeconde lettre auſſi moins un par 22, & puis mettre le lieu de la derniere ſans en rien ôter, comme à ce mot *Aſa* la premiere lettre vaut 1, & partant il la faut paſſer, parce qu'ôtant un d'un, il ne reſte rien ; je viens à *ſ* qui eſt la dix-ſeptiéme lettre dont j'ôte 1, reſte 16 que je multiplie par 22, & au produit j'ajoute 1 à cauſe de la derniere lettre qui eſt *a*, ce ſera 353. Le rang de ce mot *Vaz* ſe trouve ainſi : *V* eſt la dix-neuviéme lettre, partant je multiplie 18 par 484, le produit eſt 8712 ; la ſeconde lettre eſt *a* qui vaut 1, dont

ayant ôté 1 il ne reste rien ; je viens à z qui est la derniere lettre, & qui vaut 22 que j'ajoute à 8712, & je trouve que le rang de ce mot est le 8734 dans le nombre de 10648, & ainsi des autres qui ont plus de lettres ; & remarquez que l'*a* au commencement ou au milieu d'une diction n'est conté pour rien, & qu'étant à la fin il vaut 1.

Ayant un nombre donné dire quelle diction tient ce rang dans le nombre total, pourvû qu'on dise de combien elle est de lettres.

Il faut ajouter au nombre donné le nombre des combinaisons des dictions composées de moins de lettres : par exemple, on me donne 155 contenant le rang d'une diction de trois lettres, j'y ajoute les combinaisons des dictions d'une & de deux lettres, qui sont 484 & 22, la somme se montera à 661, & pour ce nombre j'opére comme si je voulois voir quelle diction tient ce rang dans le nombre total de toutes les dictions je le divise par 484 le quotient est un, reste 177 que je divise par 22, le quotient est 8, reste 1, partant je prens la premiere lettre, puis la huitiéme, puis la premiere, pour avoir *a h a*.

Autrement il faut diviser le nombre par le même diviseur que ci-dessus, & au quotient y ajouter 1, & faire ainsi à tous les quotiens: mais au reste qui se trouve après la division par 22, il ne faut rien ajouter : par exemple, on me donne 587, lequel je divise par 484, le quotient est 1, auquel j'ajoute 1, sont 2, reste 103, que je divise par 22 ; le quotient est 4, auquel j'ajoute 1, sont 5, & reste 15, partant je prens la deuxiéme lettre, la cinquiéme & la quinziéme, & je fais la diction *B e q*.

Si l'on me donnoit le même nombre, & que l'on me dit que ce fut un mot de deux lettres, je dirois qu'il seroit impossible, car il n'y a que 484 dictions de deux lettres : mais si on lui donnoit quatre lettres, il faudroit diviser de la même façon, & mettre un *a* devant, s'il avoit cinq lettres il faudroit mettre deux *a*, & ainsi des autres, comme

en ce nombre 155 qui tient lieu d'une diction de trois lettres ; je le devrois diviser par 484, mais à cause qu'il ne se peut, je mets un *a* comme si c'étoit un zero, sinon qu'il se peut mettre le premier, & qu'étant le dernier il vaut 1 ; puis je prens l'autre diviseur 22, par lequel je divise 155, le quotient est 7, & il reste 1, j'ajoute l'unité à 7, parce que *a* n'a point de valeur s'il n'est à la fin, & que *b* vaut 1, *c* 2, *d* 3, &c. si ce n'est quand ils sont à la fin, de sorte que ce mot sera *Aha* : le premier *a* est à cause que le premier diviseur s'est trouvé plus grand que le nombre à diviser ; *h* à cause de 7 lequel vaut 8 par l'addition de l'unité, & *h* est la huitiéme lettre, & le dernier *a* à cause de 1 qui reste.

Quand une division manque quelque part au commencement, au milieu, ou à la fin, il faut toujours mettre un *a*, comme en ce nombre 500, qui tient lieu d'une diction de trois lettres. Je le divise par 484, il vient 1, qui est un *b*, & il reste 16, & partant je ne puis diviser par 22, de sorte qu'après le *b* il faut mettre un *a*, & puis la seiziéme lettre qui est *r*, & le mot sera *Bar*. Il faut noter ici que l'*a* ne vaut aucun nombre, sinon à la fin qu'il vaut 1, & toutes les autres aussi valent leur nombre quand elles sont les dernieres, mais étant au commencement ou au milieu elles valent 1 moins que le rang où elles sont dans l'alphabet, comme qui commenceroit à conter par *b*, *c*, *d*, 1, 2, 3, &c. & ainsi *z* ne vaut que 21, mais à la fin il vaut 22.

Il faut encore remarquer que comme en faisant les opérations d'une division quand le diviseur est plus grand que le nombre qui lui est au-dessus, on met un zero ou deux, & on avance le diviseur d'une ou de deux places : aussi dans l'opération de toutes ces divisions-ci, si le diviseur se trouve plus grand que le dividende, il faut mettre un *a*, & mettre le diviseur d'après, lequel, s'il est trop grand, il faut encore mettre un *a*, & changer de divi-

ſeur, juſques à ce qu'il ſe trouve plus petit comme en ce nombre 5157999, qui tient rang d'une diction de ſix lettres, il le faut diviſer par 5153632, qui tient lieu de centaine de mille, le quotient eſt 1 qui eſt *B*, & il reſte 4367, qu'on ne peut diviſer par le diviſeur ſuivant 234256, & partant je mets un *a*; ni par celui d'après auſſi qui eſt 10648, & je mets encore un *a*, puis je le diviſe par 484, le quotient eſt 9 qui eſt *l*, & il reſte 11 que je ne puis diviſer par 22, & partant je mets un *a*, & le reſte eſt 11, qui étant le dernier eſt *m*, ce mot donc ſera *Baalam*; pour faire *Balaam* il faudroit 5249475.

On pourroit écrire par ce moyen des lettres bien obſcures, mais il faudroit mettre devant & après chaque nombre un point, & puis un chiffre, qui marqueroit de combien de lettres la diction ſeroit compoſée, & on pourroit ſe ſervir des deux ſortes tout enſemble. L'on peut écrire des airs par le même moyen, de la même façon que des dictions, en nommant les notes *a*, *b*, *c*, au lieu de *ut*, *re*, *mi*, mais il faudroit écrire les temps à part comme les notes.

Hazars.

C'Eſt la coutume à Genes d'élire, ou plutôt de tirer au ſort tous les ans d'entre les cent Sénateurs cinq perſonnes qui doivent avoir les principales Charges de la République.

Cela a donné lieu à des paris qui ſe font tous les ans touchant ceux à qui le ſort arrivera. Il ſe trouve des Banquiers qui promettront juſques à vingt mille piſtoles pour une qu'on leur donnera ſi le ſort tombe ſur 5 qu'on aura nommez; cinq ou ſix mille, s'il n'y a que 4 des 5 qu'on aura nommez; & 5 ou 6 cens, s'il y en a 3. Pour l'ordinaire ils ne donnent rien pour un ni pour deux. On demande quels ſont les hazars pour le Banquier & pour le Pariant, & quel profit le Banquier peut faire ſur ce commerce.

Il faut premierement arrêter ce que doit donner le Banquier, si le sort tombe sur ceux qu'on aura nommez, ou sur quelques-uns d'eux.

Supposons que le Banquier donne 20000 pistoles pour une, si le sort tombe sur les 5 qu'on aura nommez ; 5000 s'il n'y en a que 4 ; 300 s'il y en a 3 ; & 4 s'il n'y en a que 2.

On verra premierement en combien de manieres les 5 qu'on doit tirer au sort peuvent venir.

Il faut multiplier 100 par 99, le produit par 98, par 97 & par 96 ; mais parce que le produit de ces 5 nombres contient aussi l'ordre dans lequel ces cinq personnes sont tirées, il le faut diviser par 120, qui est la combinaison de cinq choses ; ou bien multiplier seulement 80 par 97, 98 & 99, ce qui est la même chose que de multiplier les cinq nombres l'un par l'autre, & diviser le produit par 120. On aura 75287520, qui sont toutes les façons dont cinq Billets peuvent être tirez ou pris dans 100.

Il faut maintenant voir quels sont les hazars du Pariant.

Les cinq qu'il a nommez ne peuvent arriver qu'en une seule maniere : il n'y aura donc qu'un hazar pour lui, & 75287519 pour le Banquier ; & parce que le Banquier donne 2000 pour 1, il faut multiplier 1 par 20000 ; donc pour 20000 de hazar qu'a le Pariant, le Banquier en a 75287519, qui étant divisez par 20000 donnent $3764\frac{3}{4}$, la proportion des hazars est donc comme 1 à $3764\frac{3}{4}$.

Pour avoir les hazars de 4, il faut prendre cinq fois 95, qui sont 475, qu'il faut ôter de tous les hazars, ou plûtôt de ceux qu'a le Banquier sur les hazars de 5. On ôtera donc 475 de 75287519, il restera 75287044 pour les hazars du Banquier : mais parce qu'il donne 5000 pour un, il faut diviser 75287044 par 5000, & on aura $15057\frac{2}{5}$ peu plus pour les hazars du Banquier, & 475 pour ceux du Pariant ; & divisant l'un par l'autre, il viendra $31\frac{7}{10}$ peu moins, pour les hazars du Banquier, & un pour ceux du Pariant.

Pour avoir les hazars de trois perſonnes dans les cinq qu'on a nommées, on multipliera par 10 le triangle de 94, qui eſt 4465 ; on aura donc 44650 pour les hazars du Pariant, qui étant ôtez des hazars que le Banquier a eu ſur quatre, ſçavoir de 75287044, il reſtera 75242394 pour les hazars du Banquier, qu'il faut diviſer par 300, parce qu'il donne 300 pour 1, & on aura 250808 peu moins pour les hazars du Banquier, qui étant diviſez par 44650, on aura la proportion des hazars du Banquier & du Pariant, comme $5\frac{3}{5}$ peu plus à 1.

Reſte à voir les hazars de 2. Pour avoir ceux du Pariant, on multipliera le tétraédre de 93, ſçavoir 138415 par 10, & on aura 1384150, qu'il faut ôter des hazars que le Banquier a eu ſur 3, ſçavoir de 75242394, il reſtera 73858244, qu'il faut diviſer par 4, à cauſe que le Banquier donne 4 pour 1, & on aura 18464561 pour les hazars du Banquier ; & les diviſant par les hazars du Pariant, qui ſont 1384150, on trouvera que les hazars du Banquier & du Pariant ſont entr'eux comme $13\frac{1}{2}$ peu moins à 1.

On peut auſſi conſiderer les hazars de 1, c'eſt-à dire, s'il venoit quelqu'un des cinq qu'on a nommé. Il faudra multiplier par 5 le triangle-triangle ou quatriéme puiſſance triangulaire de 92, qui eſt 3183545, le produit eſt 15917725, qu'il faut ôter des hazars du Banquier ſur 2, ſçavoir de 73858244, il reſtera 57940519, qui ſont les hazars du Banquier: mais parce qu'il ne donne rien, quand il ne vient qu'un des cinq qu'on a nommez, on diviſera 57940519 par 15917725, & le Banquier aura encore $3\frac{16}{25}$ de hazard ſur 1 qu'aura le Pariant ; mais ce hazard n'eſt qu'au profit du Banquier, & le Pariant n'y a rien.

Ayant tous ces hazars, il les faut aſſembler. Et premierement ſi le ſort tombe ſur les cinq qui ont été nommez, le Pariant a 20000. S'il en vient quatre, il y a 475 hazars pour le Pariant, qui étant multipliez par 5000 que le Banquier

quier doit donner, s'il arrive quelqu'un des 475 hazars, ce sera 2375000 hazars pour le Pariant.

Si le sort tombe sur trois de ceux qui ont été nommez, les hazars de trois sont 44650, qui multipliez par 300, que le Banquier doit donner pour chacun de ces hazars, ce sera 13395000 hazars pour le Pariant, s'il en vient trois des cinq qu'il a nommé.

Si le sort ne tombe que sur deux, on a trouvé que les hazars de deux sont 1384150, qui multipliez par quatre donnent 5536600 hazars pour le Pariant. Tous ces hazars ensemble montent à 21326600; & ce sont les hazars du Pariant.

Hazars	
20000	de 5
2375000	de 4
13395000	de 3
5536600	de 2
21326600	Somme des hazars du Pariant.

Pour avoir les hazars du Banquier, il faut assembler tous les hazars du Pariant, qui sont 1, 475, 44650 & 1384150, la somme est 1429276, qui ôtée de tous les hazars qui sont en tout 75287520, il restera 73858244 pour les hazars du Banquier; les hazars du Pariant seront donc à ceux du Banquier comme 21326600 à 73858244, ou dans les moindres termes, comme 183850 à 636709, qui est comme 1 à un peu moins de $3\frac{1}{2}$, ou justement comme 1 à $3\frac{85159}{183850}$.

Hazars	
1384150	de 2
44650	de 3
475	de 4
1	de 5
1429277	Somme des hazars du Banquier.

Ce seroient là les hazars du Banquier & du Pariant, si le Banquier ne recevoit rien de ceux à qui le sort est favorable : mais parce qu'outre l'avantage qu'il a dans les hazars, il a encore une pistole de chacun de ceux à qui les hazars peuvent arriver, il a pour lui tous les hazars de

cinq personnes choisies dans 100, sçavoir 75287520 : la proportion des hazars du Pariant est donc à ceux du Banquier, comme 2132660 à 75287520, ou comme 533165 à 1882188, c'est-à-dire comme 1 à un peu plus de $3\frac{1}{2}$.

Mais parce que d'ordinaire on ne donne rien pour 2, il faut ôter les hazars de 2, qui se montent à 5536600, des hazars du Pariant, le reste sera 15790000, qui sont aux hazars du Banquier, comme 394750 à 1882188, ou comme 1 à un peu plus de $4\frac{3}{4}$.

Voici le fondement & les raisons de cette opération.

Premiérement pour sçavoir en combien de manieres on peut choisir cinq choses dans 100, on multiplie l'un par l'autre les cinq nombres 100, 99, 98, 97, & 96, & on divise le dernier produit par l'ordre de cinq choses.

Si on ne prenoit qu'une chose dans 100, il est certain qu'on ne le pourroit faire qu'en 100 façons. Que si on en prend deux, puisque la premiere se prend en 100 façons, après chacune des 100 on peut mettre laquelle on voudra des 99 restantes; mais on voit ici que l'ordre y est compris, parce que chacune des 100 sera dans tous les choix la premiere & la derniere; il faudra donc diviser par deux, sçavoir par l'ordre de deux choses, le produit de 99 par 100.

Si on choisit trois choses dans 100, parce que deux choses se prennent en 9900 manieres, qui est le produit de 100 par 99, & qu'il en reste 98, on pourra choisir chacune de ces 98 qui restent, & l'ajoûter à chacune de 9900 façons dont on a choisi deux choses : le produit de 9900 par 98 contiendra les diverses manieres de choisir trois choses dans 100, l'ordre compris.

Par la même raison pour choisir quatre choses, il faudra multiplier ce dernier produit, qui est 970200, par 97 qui restent; & pour cinq choses multiplier encore ce dernier produit, qui est 94109400, par 96, & diviser le

produit 9034502400 par 120, qui eſt l'ordre de cinq choſes, parce que par cette conſtruction chacune des 100 choſes tient alternativement chacun des cinq rangs qui ſont dans cinq choſes, ſçavoir le premier, le deuxiéme, troiſiéme, quatriéme & dernier.

Pour les hazars du Pariant on multiplie 95 par 5, pour ſçavoir en combien de façons il peut venir quatre des cinq qu'il a nommez ; car puiſqu'il en manque un, chacun des cinq peut manquer, & en ſa place il peut venir l'un des 95, dont il n'a nommé aucun : il faut donc multiplier 95 par 5. Il eſt vrai que les quatre étant ôtez de 100, il reſteroit 96 : on ne multiplie pas pourtant par 96, parce que le cinquiéme des nommez ſe trouvant au nombre des hazars du Pariant, il ſeroit compté deux fois au Pariant.

S'il vient trois des cinq qui ont été nommez, les hazars ſe trouvent en multipliant par 10 le triangle de 94.

On multiplie par 10, parce que trois choſes ſe peuvent choiſir dans cinq en dix manieres, ainſi qu'il a été expliqué ci-devant, quand on a fait voir en combien de façons on peut choiſir cinq choſes dans 100, car on multipliera 5, 4, 3, l'un par l'autre, & on diviſera le produit 60 par l'ordre de 3, qui eſt 6.

On multiplie par le triangle de 94, parce que dans les cinq qu'on tire au hazard, n'y en ayant que trois des cinq que le Pariant a nommez, les deux autres doivent être des 95 autres. Or dans tous les choix ou hazars, le premier de ces 95 ſe trouvera avec chacun des 94 autres. Aprés le ſecond de ces mêmes 95 ſe trouvera avec chacun des 93 autres. Le troiſiéme avec chacun des 92 ; & ainſi de ſuite juſqu'au 94 qui ſe trouvera avec le dernier des 95 : or ces nombres aſſemblez font le triangle de 94, parce qu'il faudroit ajoûter 94 avec 93, 92, 91, &c. juſqu'à 1.

Par le même raiſonnement on verra pourquoi pour avoir les hazars de deux, on multiplie par 10 le tétraédre de 93.

Question.

On demande à combien de perſonnes ſe montent les ancêtres en trente générations, ſuppoſant que les mariages ne ſe ſoient point faits entre les deſcendans des premieres & plus anciennes générations. Il faut prendre la trentiéme puiſſance de deux, qui eſt 1073741824, & c'eſt le nombre des ancêtres.

Question.

Au jeu des Eſchecs, les huit pions peuvent avancer une ou deux caſes au premier coup. On demande en combien de façons on peut joüer ces huit pions, en ne joüant chacun d'eux qu'une ſeule fois.

S'ils ne pouvoient être joüez que d'une ſeule maniere, on auroit 40320 façons de les joüer, ſçavoir ſelon la combinaiſon de l'ordre de huit choſes : mais parce que chacun ſe peut joüer en deux manieres, il faudra multiplier 40320 par la huitiéme puiſſance de deux, ſçavoir par 256, & on aura 10321920.

En cette ſorte de combinaiſon où chaque choſe ſe place en deux manieres, il faut multiplier tous les nombres pairs l'un par l'autre, au lieu qu'en la combinaiſon ſimple on ne multiplie que tous ces nombres. Ainſi une choſe ſe prend en deux façons, 2 en 8, 3 en 48, 4 en 384, &c.

2	2	1
4	8	2
6	48	3
8	384	4
10	3840	5
12	46080	6
14	645120	7
16	10321920	8

Si chaque choſe ſe prenoit en trois manieres, comme ſi les pions pouvoient avancer une, deux ou trois caſes, il faudroit multiplier l'un par l'autre les nombres

multiples de 3, sçavoir 3, 6, 9, 12, &c. & on auroit 18 pour le changement de deux choses, 162 pour celui de trois, &c. & ainsi les huit pions se joüeroient la premiere fois en 264539520 manieres.

3	3	1
6	18	2
9	162	3
12	1944	4
15	29160	5
18	524880	6
21	11022480	7
24	264539520	8

TRAITÉ DES TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES.

PREMIERE PARTIE.

DEFINITIONS.

I.

LORSQU'UN nombre quarré eſt égal à la ſomme de deux autres nombres quarrez, les trois nombres qui ſont les racines de ces trois quarrez, ſeront appellez un Triangle Rectangle en nombres, ou les trois côtez d'un Triangle Rectangle en nombres: ainſi on dira que 3, 4, 5, eſt un Triangle Rectangle en nombres; parce que 25, quarré de 5, eſt égal à la ſomme de 16, & 9, qui ſont les quarrez des deux autres nombres 3 & 4.

II.

Les deux moindres nombres d'un Triangle Rectangle en nombres, ſeront appellez les côtez ou les moindres

côtez de ce Triangle, la moitié de leur produit sera appellée l'aire de ce Triangle, & le troisiéme nombre sera appellé son hypotenuse, ou son plus grand côté.

III.

Triangle Rectangle primitif en nombres, est celui entre les trois côtez duquel il n'y a point d'autre commune mesure que l'unité.

IV.

Triangle Rectangle composé en nombres, est celui dont les trois côtez sont mesurez par un même nombre.

V.

Un Triangle Rectangle en nombres sera dit double d'un autre, lorsque ses trois côtez sont doubles des trois côtez de l'autre, chacun du sien, & de même à l'égard des autres multiples.

VI.

On appelle ici nombre pairement pair celui qui est mesuré par 4, & nombre impairement pair, celui qui est mesuré par 2, & non par 4.

SUPPOSITIONS.

I.

Si deux nombres quarrez étant joints ensemble ne font point un nombre quarré ; les racines de ces deux quarrez ne seront point les côtez d'un Triangle Rectangle en nombres.

II.

Si les trois côtez d'un Triangle Rectangle en nombres sont multipliez par un même nombre, les trois produits seront

ſeront les trois côtez d'un Triangle Rectangle en nombres ; & ſi les trois côtez d'un Triangle Rectangle en nombres ont une même meſure autre que l'unité, & qu'ils ſoient diviſez par cette commune meſure, les trois quotiens ſeront les trois côtez d'un Triangle Rectangle en nombres.

III.

Tout nombre quarré eſt meſuré par tous les nombres qui meſurent ſa racine : il en eſt de même des nombres cubes, quarrez quarrez, & autres puiſſances : & ſi un quarré eſt meſuré par un nombre premier, ſa racine ſera auſſi meſurée par ce nombre premier, ou ſera ce même nombre premier.

IV.

Un nombre quarré étant multiplié par un autre nombre quarré, le produit eſt un nombre quarré : mais s'il eſt multiplié ou diviſé par un nombre non quarré, le produit ni le quotient ne ſeront point des quarrez.

V.

Tout nombre multiplié par un nombre pair, fait un nombre pair ; & tout nombre impair ajoûté à un nombre pair, ou multiplié par un impair, fait un impair ; & la ſomme de deux impairs eſt un nombre pair.

VI.

Si deux nombres ſont entr'eux comme quarré à quarré, leurs moitiez, ou autres pareilles parties, ſeront auſſi entr'elles comme quarré à quarré.

VII.

Si deux nombres ont entr'eux une commune meſure, la ſomme & la difference de ces nombres, & auſſi leurs doubles, auront la même commune meſure.

VIII.

Le quarré de la ſomme de deux nombres eſt égal au quarré de leur difference, & au quadruple du produit des mêmes nombres.

IX.

Si un même nombre multiplie deux nombres & leur difference, ce dernier produit ſera la difference des deux premiers produits.

X.

Trois nombres étant donnez, le nombre ſolide produit par ces nombres ſera toûjours le même, en quelque ordre qu'on les multiplie; le même arrivera s'il y a plus de trois nombres qui ſe multiplient de ſuite.

XI.

Deux nombres plans ſemblables ne peuvent être premiers entr'eux, ni l'un d'eux premier au double de l'autre; d'où il s'enſuit, que le produit de deux nombres premiers entr'eux ne peut être un nombre quarré, s'ils ne ſont eux-mêmes des quarrez; ni double quarré, ſi l'un d'eux n'eſt un quarré, & l'autre un double quarré.

XII.

On ſuppoſe auſſi que ce qu'on fait voir par le calcul de l'algebre, n'a pas beſoin d'autre preuve; & on l'employe dans ce traité, lorſque les propoſitions ſont faciles, ou que leurs démonſtrations ſont trop obſcures.

REMARQUES.

I.

Ces propoſitions ſont ſuppoſées, comme étant démontrées

par les Auteurs, ou parce qu'elles sont faciles d'elles-mêmes.

I I.

L'unité est ici employée pour nombre, & même pour nombre quarré ou quarré quarré.

I I I.

Lorsqu'on parle ici de Triangles, ou de Triangles Rectangles, on entend parler des Triangles Rectangles en nombres entiers.

LEMME,

PROPOSITION I.

Tout nombre au-dessus de l'unité est ternaire, ou ternaire + ou — 1.

DEMONSTRATION.

LE premier nombre au-dessus de l'unité est 2, qui est moindre d'une unité que 3, & par conséquent est ternaire — 1, & entre deux ternaires de suite comme 3 & 6, ou 6 & 9, &c. il n'y a toûjours que deux nombres, comme entre 3 & 6, il n'y a que 4 & 5, dont le premier excede le premier ternaire d'une unité, & le second est moindre d'une unité que le second ternaire, & par conséquent le premier est ternaire + 1, & le second, ternaire — 1. La même chose arrive nécessairement dans tous les autres nombres: donc tout nombre au-dessus de l'unité est ternaire, ou ternaire + ou — 1; ce qu'il falloit prouver.

LEMME,

PROPOSITION II.

Tout nombre impair au-dessus de l'unité est quaternaire + ou — 1.

DEMONSTRATION.

LE premier impair au-dessus de l'unité est 3, qui est moindre d'une unité que 4, & par conséquent est quaternaire — 1, & entre deux quaternaires de suite, comme 4 & 8, ou 8 & 12, &c. il n'y a toûjours que trois nombres, dont celui du milieu est pair, & les autres deux sont impairs, comme entre 4 & 8, il n'y a que 5, 6 & 7, dont 5 & 7 sont impairs; & il est manifeste que 5 est 4 + 1, c'est-à-dire quaternaire + 1, & que 7 est 8 — 1, c'est-à-dire quaternaire — 1, puisque 8 est quaternaire. La même chose arrive nécessairement dans tous les autres nombres à l'infini. Donc tout nombre impair au-dessus de l'unité est quaternaire + ou — 1; ce qu'il falloit prouver.

LEMME,

PROPOSITION III.

Tout nombre au-dessus du nombre 2 est quinaire, ou quinaire + ou — 1, ou quinaire + ou — 2.

DEMONSTRATION.

LEs deux premiers nombres entre 2 & 5, sont 3 & 4; & il est évident que 3 est 5 — 2, & que 4 est 5 — 1; & par conséquent 3 est quinaire — 2, & 4 est quinaire — 1: & entre deux quinaires de suite, comme 5 & 10, ou 10 & 15, &c. il n'y a toûjours que quatre nombres, comme entre 5 & 10, il n'y a que 6, 7, 8, & 9, dont le premier excede 5 d'une unité, le second de deux unitez; le troisié-

me eſt moindre de deux unitez que le ſecond quinaire, & le quatriéme ſeulement d'une unité, & par conſéquent le premier de ces quatre nombres eſt quinaire + 1, le ſecond eſt quinaire + 2, le troiſiéme quinaire — 2, & le quatriéme quinaire — 1. La même choſe arrive néceſſairement dans tous les autres nombres à l'infini. Donc tout nombre au-deſſus du nombre 2 eſt quinaire, ou quinaire + ou — 1, ou quinaire + ou — 2; ce qu'il falloit prouver.

LEMME,

PROPOSITION IV.

Le quarré de tout nombre pairement pair eſt octonaire, & le quarré de tout nombre pairement impair, au-deſſus de 2, eſt octonaire +4.

DEMONSTRATION.

LE premier nombre pairement pair eſt 4, & d'autant que 4 eſt moyen proportionnel entre 2 & 8, ſon quarré 16 ſera égal à 2 fois 8, & par conſéquent ſera meſuré par 8, c'eſt-à-dire ſera octonaire. Or tout autre nombre pairement pair eſt multiple de 4. Soit donc 4 A, lequel on voudra de ces nombres, ſon quarré ſera $16\,A^2$ qui ſera multiple de 16 par A^2, c'eſt-à-dire de 8 par $2\,A^2$, & par conſéquent ce quarré ſera meſuré par 8, & ſera octonaire. Donc le quarré de tout nombre pairement pair eſt octonaire. Que ſi un nombre au-deſſus de 2 eſt pairement impair, il ſera 4 A + 2, & ſon quarré ſera $16\,A^2 + 8\,A + 4$, c'eſt-à-dire octonaire + 4, puiſque la ſomme de $16\,A^2$ & de 8 A eſt octonaire, donc le quarré de tout nombre pairement pair, &c. Ce qu'il falloit prouver. Def. 6.

LEMME,

PROPOSITION V.

Tout nombre quarré au-dessus de l'unité est ternaire; ou ternaire + 1.

DEMONSTRATION.

Tout nombre au-dessus de l'unité est ternaire, ou ternaire + ou — 1. Or si la racine du quarré est ternaire, son quarré le sera aussi.

Prop. 1. Supp. 3.

Si elle est ternaire + 1, son quarré sera aussi ternaire + 1. Car soit cette racine 3 A + 1, son quarré sera égal au quarré de 3 A, plus deux fois le produit de 3 A par 1; plus le quarré de l'unité; mais les trois premiers nombres étant ternaires, leur somme sera ternaire; si donc on y ajoûte le quatriéme qui est l'unité, le tout qui est le quarré de 3 A + 1 sera ternaire + 1.

Supp. 12.

Que si la racine est ternaire — 1, son quarré sera aussi ternaire + 1. Car soit cette racine 3 A — 1, son quarré sera égal au quarré de l'unité, plus le quarré de 3 A, sçavoir 9 A^2 moins 6 A, qui est deux fois le produit de 3 A par 1; mais 6 A étant ternaire, si on l'ôte de 9 A^2 quarré de 3 A, qui est ternaire, le reste sera ternaire; & par conséquent étant joint au quarré de l'unité, le tout sera ternaire + 1. Donc tout nombre quarré au-dessus de l'unité est ternaire ou ternaire + 1; ce qu'il falloit prouver.

Supp. 12.

LEMME, PROPOSITION VI.

Si un nombre quarré est mesuré par un nombre premier, il le sera aussi par son quarré : & si un nombre est mesuré par un nombre premier, & non par son quarré, il ne sera pas nombre quarré.

DEMONSTRATION.

SOit A un nombre premier qui mesure B^2, je dis que A^2 mesurera aussi B^2; car A mesurera aussi B; soit C le nombre par lequel il le mesure : donc C A sera égal à B, & C^2 A^2 quarré de C A, sera égal à B^2. Donc B^2 sera mesuré par A^2. Ce qu'il falloit prouver. Que si D est un nombre mesuré par A nombre premier, & non par A^2, il ne sera pas quarré : car s'il étoit quarré, il seroit aussi mesuré par A^2 par la premiere partie; ce qui est contre l'hypothese. Donc si un nombre quarré est mesuré, &c. Ce qu'il falloit prouver. On prouvera, de même qu'en la premiere partie, qu'un nombre quarré est mesuré par les quarrez de tous les nombres qui mesurent sa racine.

Supp. 3.
Supp. 12.

LEMME, PROPOSITION VII.

Tout nombre quarré impair au-dessus de l'unité, est octonaire +1.

DEMONSTRATION.

TOut nombre impair au-dessus de l'unité est quaternaire + ou — 1; or si la Racine du quarré impair est 4 A + 1; son quarré sera 16 A^2, plus 8 A, plus l'unité : mais 16 A^2 est mesuré par 8, & 8 A est aussi mesuré par 8; donc leur somme sera mesurée par 8; & y ajoutant le quarré de l'unité, le tout sera octonaire + 1. Que si la

Prop. 2.
Supp. 12.
Prop. 4.

Supp. 12. Racine eſt un quartenaire — 1 ; pour avoir ſon quarré il faudra ôter du quarré du premier nom meſuré par 16, le double produit des deux noms qui eſt octonaire ; & il reſtera un octonaire, auquel ajoutant l'unité quarré du 2ᵉ nom — 1, on aura encore un octonaire + 1, pour le quarré d'un quaternaire — 1. Donc tout nombre quarré impair au-deſſus de l'unité eſt octonaire + 1 ; ce qu'il falloit prouver.

CONSEQUENCE I.

Il s'enſuit que la ſomme de deux quarrez impairs, eſt toujours un nombre impairement pair, & n'eſt point un nombre quarré. Cela eſt évident ; car ſi on aſſemble un octonaire + 1, avec un octonaire + 1, ou avec l'unité priſe pour un nombre quarré, on aura un octonaire + 2, qui étant meſuré par 2, & non par ſon quarré 4, ſera un nombre impairement pair, & ne ſera point quarré : que ſi on aſſemble deux quarrez de l'unité, qui ſont deux quarrez impairs, leur ſomme ſera 2, qui eſt un nombre impairement pair & non quarré.

Def. 6.

Prop. 6.

CONSEQUENCE II.

Il ſuit de cette propoſition, & de la 5ᵉ, que tout quarré impair au-deſſus de l'unité qui n'eſt point meſuré par 3, ſurpaſſe de l'unité un nombre meſuré par 24 ; puiſqu'il ſurpaſſe de l'unité, un multiple de 3, & un multiple de 8, & que le produit de ces deux nombres eſt meſuré par 24.

Prop. 37. du 7. d'Eucl.

LEMME,

LEMME,

PROPOSITION VIII.

Tout quarré au-dessus de l'unité qui n'est point mesuré par 5, est quinaire + ou — 1.

DEMONSTRATION.

Tout nombre plus grand que le binaire qui n'est point mesuré par 5 est quinaire + ou — 1 ou quinaire + ou — 2. S'il est quinaire + ou — 1, son quarré sera quinaire + 1, par un raisonnement semblable à celui de la proposition 5. Prop. 5.

S'il est quinaire + ou — 2, son quarré sera quinaire + 4, par le même raisonnement; ainsi le quarré de 5 A + 2, est 25 A^2 + 20 A + 4, & le quarré de 5 A — 2 est 25 A^2 — 20 A + 4: & il est évident que chacun de ces quarrez est quinaire + 4, mais un quinaire + 4 est quinaire — 1, & parce que 4 quarré du binaire, est aussi quinaire — 1; il s'ensuit que tout quarré au-dessus de l'unité qui n'est point mesuré par 5, est quinaire + ou — 1. Ce qu'il falloit prouver. Supp. 12.

CONSEQUENCE.

De cette proposition il s'ensuit, que tout quarré qui n'est point mesuré par 5, a pour son dernier chiffre ou caractere à main droite, l'un des quatre nombres 1, 4, 6, 9; & que les nombres qui ont pour leur dernier chiffre 2, 3, 7 ou 8 ne sont point quarrez: la raison en est évidente, puisque le chiffre final de tout nombre mesuré par 5, étant 5 ou 0, les nombres qui ont pour dernier chiffre 1, 4, 6, ou 9, sont differens par l'unité d'un nombre mesuré par 5, ce qui est nécéssaire pour faire qu'ils soient quarrez: & que les nombres qui ont pour dernier chiffre l'un des quatre autres nombres, en sont differens par 2, & par conséquent ne sont point quarrez par cette Prop. 8.

LEMME,
PROPOSITION IX.

Tout quarré quarré au-dessus de l'unité, qui n'est point mesuré par 5, est quinaire +1.

DEMONSTRATION.

Puisque le quarré quarré n'est pas mesuré par 5, sa racine quarrée ne le sera pas aussi; & parce que cette racine est un quarré, elle sera quinaire + ou — 1, & son
Supp. 3. quarré, qui est un quarré quarré, sera quinaire +1 par
Prop. 8. un raisonnement semblable à celui de la 5e Proposition.

CONSEQUENCE.

Il s'ensuit, que le dernier chiffre de tout quarré quarré, qui n'est point mesuré par 5, est 1 ou 6: la raison est, que tout nombre mesuré par 5, a pour son dernier chiffre 5 ou 0, à quoi ajoutant l'unité, on aura 1, ou 6, pour le dernier chiffre du quarré quarré, puisqu'il doit être quinaire +1.

PROPOSITION X.

Si on prend deux Nombres inégaux quelconques, le double de leur produit, & la difference de leurs quarrez, seront les deux côtez d'un Triangle rectangle, & la somme des mêmes quarrez en sera l'hypotenuse.

E.	F.	G.
C.	H.	D.
A.		B.

DEMONSTRATION.

Soient A & B deux nombres donnez, dont A soit le plus grand, C le quarré de A; & D le quarré de B; E la somme de ces deux quarrez; G leur difference; F le

double produit de A par B : je dis que les trois nombres E, F, G, sont les trois côtez d'un Triangle rectangle : car soit H, le produit de A par B, d'autant que F est double de H, son quarré sera quadruple du quarré de H, mais H étant moyen proportionnel entre C & D, son quarré sera égal au produit de C par D, donc le quarré de F, sera quadruple du produit de C par D : mais 4 fois le produit de C par D, avec le quarré de G leur difference, est égale au quarré de leur somme E. Donc le quarré de F, avec le quarré de G, sera égal au quarré de E ; & par conséquent les trois nombres E, F, G, seront les trois côtez d'un Triangle rectangle, & E en sera l'hypotenuse. Ce qu'il falloit prouver. Supp. 8. Def. 12 Def. 24

Démonstration Algébrique.

$A^2 + B^2$, $A^2 - B^2$ $2AB$, sont les trois nombres E, G, F, le quarré de $A^2 + B^2$ est $A^4 + B^4 + 2A^2B^2$ le quarré de $A^2 - B^2$ est $A^4 B^4 - 2A^2B^2$, qui étant joint au quarré de $2AB$, sçavoir $4A^2B^2$, fait aussi $A^4 + B^4 + 2A^2B^2$. On appellera ces nombres A & B, les générateurs du Triangle rectangle, qui sera dit être formé ou engendré par ces nombres ; & le double de leur produit, sera appellé le côté pair du Triangle, parce qu'il est toujours un nombre pair. Supp. 12. Definit. 10. Definit. 11.

CONSEQUENCE.

Il s'ensuit que si un nombre est composé de deux quarrez, la difference du quarré de ce nombre composé, & du quarré de la difference des mêmes quarrez, sera le quarré du double produit de leurs racines ; puisque ces racines seront les nombres générateurs d'un Triangle, qui aura pour son hypotenuse, la somme de leurs quarrez.

Exemple.

13 est composé des 2 quarrez 9 & 4, dont les racines

ſont 2 & 3 : la difference de 169 quarré de 13, & de 25 quarré de 5 (difference de 9 & 4) eſt 144, qui eſt le quarré de 12, double produit de 3 par 2.

PROBLEME,
PROPOSITION XI.

Trouver 3 nombres quarrez en progreſſion Arithmetique.

SOient A & B les deux côtez d'un Triangle rectangle trouvé par le moyen de deux nombres, comme il a été enſeigné en la Propoſition précédente ; & que C ſoit l'hypotenuſe de ce Triangle : je dis que ſi on prend les trois nombres A — B, A + B & C ; leurs trois quarrez ſeront en progreſſion Arithmetique. Car le quarré de A—B, ſera
Supp. 12. $A^2 + B^2 - 2AB$, le quarré de C ſera $A^2 + B^2$, puiſque ſon quarré eſt égal à la ſomme des quarrez de A & B, & le quarré de A + B, ſera $A^2 + B^2 + 2AB$: & il eſt évident que ces trois quarrez ont pour difference 2 AB, double produit de A, par B : ainſi le Triangle rectangle 5, 12, 13, étant donné, la difference de 5, & de 12, eſt 7, & leur ſomme 17, dont les quarrez ſont 49, & 289, & le quarré de l'hypotenuſe 13, eſt 169 : Or les trois quarrez 49, 169, 289, ont pour difference commune 120, double produit de 5 par 12 : & par conſéquent ces trois quarrez ſont en progreſſion arithmetique.

CONSEQUENCE.

Il s'enſuit que la difference du quarré de l'hypotenuſe, au quarré de la ſomme des deux côtez, ou au quarré de leur difference, eſt quadruple de l'aire du triangle ; car les
Def. 2. côtez du triangle étant A & B, l'aire ſera $\frac{1}{2}$ AB ; & la difference du quarré de l'hypotenuſe, au quarré, ſoit de la ſomme, ſoit de la difference des deux côtez eſt 2 AB, qui eſt quadruple de $\frac{1}{2}$ AB.

PROPOSITION XII.

Si les nombres générateurs d'un Triangle rectangle sont multipliez par un même nombre, les deux produits seront les générateurs d'un autre Triangle rectangle, qui sera multiple du premier, par le quarré du multipliant.

DEMONSTRATION.

SOient A & B les générateurs d'un triangle rectangle, dont A soit le plus grand, & soient multipliez par quelconque nombre C; les produits seront CA, & CB: Or les trois côtez du triangle qu'ils formeront, seront $C^2 A^2 + C^2 B^2$, $C^2 A^2 - C^2 B^2$, & $2 A B C^2$, qui sont multiples par C^2, des 3 côtez du premier Triangle $A^2 + B$, $A^2 - B^2$, & $2 A B$. Prop. 10.

Exemple.

Soient 2 & 3 les générateurs du triangle 5, 12, 13, & soient multipliez 2, & 3, par 5: les produits seront 10, & 15, qui seront les générateurs du triangle 325, 125, & 300, dont les côtez sont multiples de 13, 5, 12, par 25 quarré du multipliant. Donc ce dernier triangle sera multiple du premier par ce quarré. Prop. 10. Def. 5.

PROPOSITION XIII.

Si en un Triangle rectangle, deux des trois côtez n'ont point de commune mesure autre que l'unité, le troisiéme côté n'en aura point aussi avec aucun des deux autres; & le Triangle sera primitif. Et si deux des trois côtez ont une commune mesure autre que l'unité, tous les trois auront la même mesure, & le Triangle sera composé.

DEMONSTRATION.

LA premiere partie de cette Propoſition ſe démontre ainſi. Si le troiſiéme côté avoit une commune meſure
Supp. 3. avec quelqu'un des autres côtez, leurs quarrez l'auroient
Supp. 7. auſſi, & pareillement la ſomme & la difference des mêmes
Def. 1. quarrez. Or la ſomme ou la difference de ces quarrez, eſt le quarré de l'autre côté : donc ce 3e quarré auroit la même meſure; & par conſéquent les quarrez des deux côtez qu'on a ſuppoſé premiers entr'eux, auroient une commune meſure, & ſeroient compoſez entr'eux; mais lorſque deux quarrez ſont compoſez entr'eux, leurs côtez
Eucl. 29. 7. ſont auſſi compoſez entr'eux; car s'ils étoient premiers entr'eux, leurs quarrez le ſeroient auſſi : d'où il s'enſuit que les deux côtez qu'on a ſuppoſé premiers entr'eux, ſeroient compoſez entr'eux, ce qui eſt abſurde.

Pour la 2e partie, ſi le 3e côté n'avoit pas une commune meſure avec l'un des deux autres; ces deux autres n'en auroient point auſſi entr'eux, par ce qui a été dit en la premiere partie : ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc ſi en un Triangle rectangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

CONSEQUENCE.

Il s'enſuit, que ſi l'un des trois côtez eſt un nombre premier, le Triangle ſera primitif, puiſque ce côté ne peut avoir de commune meſure avec les deux autres.

Que ſi l'on dit que le moindre coté étant premier, il peut être la commune meſure des deux autres, on prouvera qu'il eſt impoſſible : car l'hypotenuſe ſeroit differente de l'autre côté par ce même nombre premier, ou par un multiple de ce premier : & en tous les deux cas, ſon quarré
Supp. 1. ſeroit plus grand que la ſomme des quarrez des deux autres côtez, ce qui eſt abſurde.

PROPOSITION XIV.

Si on prend deux nombres quelconques premiers entr'eux, dont l'un ſoit pair, & l'autre impair; le Triangle dont ils ſeront les générateurs, ſera primitif.

DEMONSTRATION.

Soient A & B premiers entr'eux, dont l'un ſoit pair, & l'autre impair; je dis que le triangle rectangle qu'ils formeront, ſçavoir $A^2 + B^2$, $A^2 - B^2$ & 2 A B, ſera primitif: car A & B étant premiers entr'eux, leurs quarrez A^2 & B^2 ſeront auſſi premiers entr'eux; & leur ſomme $A^2 + B^2$, ſera auſſi nombre premier à chacun d'eux, & par conſéquent à leurs racines A ou B, & à leur produit A B: Mais $A^2 + B^2$ étant la ſomme d'un pair & d'un impair, ſera un impair; donc il ſera premier au nombre 2, & étant premier à A B, il ſera premier à 2 A B côté pair du Triangle, donc il ſera auſſi premier à l'autre côté $A^2 - B^2$, & les trois côtez n'auront point de commune meſure entr'eux, & par conſéquent le Triangle ſera primitif: Ce qu'il falloit prouver.

Prop. 10. Eucl. l. 7. Supp. 5. Eucl. l. 7. Prop. 13. Def. 3.

CONSEQUENCE.

Il s'enſuit que tout nombre composé de deux quarrez premiers entr'eux, dont l'un eſt pair, & l'autre impair, eſt l'hypotenuſe d'un Triangle primitif, qui aura pour ſon côté pair le double produit des 2 racines de ces quarrez, & pour ſon côté impair la difference de ces deux quarrez: car les racines de ces deux quarrez, ſeront deux nombres premiers entr'eux, dont l'un ſera pair, & l'autre impair; & par conſéquent le Triangle qu'ils formeront, ſera primitif, par cette 14e Propoſition.

PROPOSITION XV.

Tout Triangle rectangle est primitif ou multiple d'un primitif.

DEMONSTRATION.

Def. 3. OU les trois côtez du triangle sont premiers entre eux, & en ce cas, il sera primitif; ou ils seront composez entr'eux: soient divisez ces derniers par leur plus grande
Supp. 2. commune mesure: les trois quotiens seront les trois côtez
Eucl. l. 7. d'un Triangle rectangle; & parce qu'ils seront premiers entr'eux, le Triangle sera primitif; & par conséquent l'autre Triangle sera multiple de ce primitif par cette plus grande commune mesure. Donc tout triangle rectangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

LEMME, PROPOSITION XVI.

La moitié de la somme de deux nombres, étant jointe à la moitié de leur difference, fait un nombre égal au plus grand des deux nombres: & la moitié de leur difference étant ôtée de la moitié de leur somme, le reste sera le moindre des deux nombres.

DEMONSTRATION Algebrique.

Supp. 12. A & B sont les deux nombres, A + B est leur somme, & A—B leur difference; $\frac{1}{2}$ A + $\frac{1}{2}$ B joint à $\frac{1}{2}$ A — $\frac{1}{2}$ B, fait le plus grand nombre A; & $\frac{1}{2}$ A — $\frac{1}{2}$ B étant ôté de $\frac{1}{2}$ A + $\frac{1}{2}$ B, fait le plus petit, sçavoir B.

CONSEQUENCE.

De là il s'ensuit que A + B joint à A—B, fait 2 A, & que A—B étant ôté de A + B, le reste est 2 B.

LEMME,

LEMME,

PROPOSITION XVII.

Les quarrez de la somme & de la difference de deux nombres étant joints ensemble, font une somme égale au double de la somme des quarrez des mêmes nombres.

DEMONSTRATION *Algebrique.*

SOit A le plus grand nombre & B le plus petit; leur somme sera A+B, & leur difference A—B; le quarré de A+B, sera $A^2 + B^2 + 2AB$; le quarré de A—B sera $A^2 + B^2 - 2AB$: la somme de ces deux quarrez est $2A^2 + B^2$, qui est double de $A^2 + B^2$. Ce qui étoit à prouver. Supp. 12.

LEMME,

PROPOSITION XVIII.

La difference de deux quarrez est le produit de la somme de leurs racines, par la difference des mêmes racines.

DEMONSTRATION *Algebrique.*

A & B sont les racines, $A^2 - B^2$ est la difference de leurs quarrez, A—B est la difference des racines qui multipliant leur somme A+B fait $A^2 + AB - AB - B^2$, Supp. 13 & par réduction $A^2 - B^2$, nombre égal à la difference des quarrez des racines A & B. Ce qu'il falloit prouver.

CONSEQUENCE I.

Il s'ensuit que la moindre difference de deux quarrez est 3, puisque c'est le produit de la somme des deux moindres nombres 1 & 2, par leur difference 1, qui est le moindre de tous les nombres.

CONSEQUENCE II.

Il s'ensuit que si les nombres générateurs d'un Triangle rectangle, ont l'unité pour difference, leur somme sera le côté impair de ce Triangle.

PROPOSITION XIX.

En tout Triangle rectangle primitif, l'un des deux côtez est pair, & l'autre impair, & l'hypotenuse est aussi un nombre impair.

DEMONSTRATION.

SI l'un des côtez n'est pas pair, & l'autre impair, ils seront tous deux pairs, ou tous deux impairs. Ils ne peuvent être tous deux pairs : car ils auroient 2 pour commune mesure, & le Triangle ne seroit pas primitif contre l'hypothese. Ils ne peuvent être tous deux impairs, parce que chacun de leurs quarrez, seroit un quarré impair, &
Prop. 7. par conséquent octonaire + 1, donc la somme de ces quarrez qui doit être le quarré de l'hypotenuse seroit oc-
2. Conf. Prop. 7. tonaire + 2, & ne seroit pas un nombre quarré : ce qui est absurde. Il reste donc que l'un des côtez soit pair, & l'au-
Supp. 1. tre impair : Or le quarré de l'un de ces côtez sera pair, &
Supp. 5. celui de l'autre impair, & par conséquent leur somme qui est le quarré de l'hypotenuse, sera un quarré impair : d'où il suit que l'hypotenuse sera un nombre impair. Ce qui étoit à prouver.

LEMME,

PROPOSITION XX.

L'hypotenuse de tout triangle primitif est la somme de deux quarrez inégaux, & premiers entr'eux, dont l'un est pair, & l'autre impair : & le côté impair du même triangle est la difference des mêmes quarrez.

DEMONSTRATION.

PUisque l'hypotenuse d'un Triangle primitif est un Prop. 10.
nombre impair, & qu'un des deux côtez est aussi im-
pair, la somme de l'hypotenuse & du côté impair, & leur Supp. 5.
difference seront des nombres pairs : mais parce que la
difference des quarrez de l'hypotenuse & du côté impair, Def. 1.
est un quarré, sçavoir le quarré du côté pair, & que ce & Supp. 1.
quarré est le produit de la somme & de la difference des Prop. 18.
deux autres côtez qui sont impairs : cette somme & cette Supp. 5.
difference, qui seront des nombres pairs, seront entr'elles
comme quarré à quarré : & leurs moitiez qui seront des Supp. 6.
nombres entiers, seront aussi entr'elles comme quarré à
quarré : mais la somme de ces moitiez est l'hypotenuse de
ce Triangle, & la difference en est le même côté impair : Or
si ces deux nombres (c'est-à-dire ces deux moitiez) avoient Prop. 16.
une commune mesure, elle mesureroit aussi leur somme &
leur difference, sçavoir l'hypotenuse, & le côté impair Supp. 7.
de ce Triangle. Donc ces nombres seroient composez
entr'eux, & le Triangle ne seroit pas primitif, contre
l'hypothese. Donc ces deux nombres sont premiers entre
eux, & parce qu'ils sont entr'eux comme quarré à quarré, Def. 5.
ce seront deux quarrez premiers entr'eux : & puisque leur Supp. 11.
somme qui est l'hypotenuse est un impair, l'un sera pair, & Prop. 19.
l'autre impair. Il a été aussi prouvé, que leur difference
étoit le côté impair de ce Triangle : donc l'hypotenuse de
tout Triangle primitif, &c. Ce qu'il falloit prouver.

CONSEQUENCE I.

Il suit de cette proposition, que tout Triangle primitif a deux nombres générateurs premiers entr'eux, dont l'un est pair & l'autre impair : car d'autant que l'hypotenuse de quelconque Triangle primitif, est la somme de deux quarrez premiers entr'eux, dont l'un est pair, & l'autre impair : leurs racines seront aussi des nombres premiers en-

Prop. 14. tr'eux, dont l'un ſera pair, & l'autre impair. Donc ces nombres ſeront les générateurs d'un Triangle primitif, qui ſera le même que celui qui a pour hypotenuſe, la ſomme de leurs quarrez.

CONSEQUENCE II.

Il s'enſuit auſſi que l'hypotenuſe d'un Triangle primitif ſurpaſſe de l'unité un quaternaire. Car puiſqu'elle eſt la
Prop. 20. ſomme d'un quarré pair, & d'un impair, & que le quarré
Prop. 6. pair eſt 4, ou multiple de 4, & l'impair eſt l'unité, ou eſt
Prop. 7. octonaire + 1, cette ſomme ſurpaſſera de l'unité un quaternaire.

CONSEQUENCE III.

Il s'enſuit auſſi qu'il n'y a aucun Triangle rectangle primitif dont le côté impair ſoit moindre que 3, le côté pair moindre que 4, & l'hypotenuſe moindre que 5, puiſque 4, & 1 ſont les moindres nombres quarrez: & leurs racines les deux moindres nombres.

PROPOSITION XXI.

Si on prend deux nombres quelconques impairs & premiers entr'eux, le Triangle dont ils ſeront les générateurs, ſera double d'un primitif, & ces deux nombres ſeront la ſomme & la difference des deux nombres générateurs de ce primitif: & le côté qui eſt la difference des quarrez de ces deux nombres impairs & premiers entr'eux, ſera double du côté pair du primitif, & leur double produit ſera double de ſon côté impair.

DEMONSTRATION.

A . . . . . E . . . . . . D . . . . . . B C

Soient A B & B C, deux nombres impairs & premiers entr'eux, dont A B ſoit le plus grand, & ſoit A D, la
Supp. 5. difference de A B, B C: il eſt évident que A D ſera un

nombre pair, ſoit icelui diviſé en deux également, & ſoient A E, E D, les moitiez de ce nombre.

D'autant que B D eſt égal à B C, & D E, à E A; le nombre B E ſera la moitié du nombre A C; le nombre A B ſera la ſomme des deux nombres B E, & E A (ou E D:) & le nombre D B (ou B C) en ſera la difference: cela étant, je dis que A E, E B ſont premiers entr'eux: car A B & B C étant premiers entr'eux par l'hypotheſe, leur ſomme A C ſera nombre premier à A B & à B C (ou B D,) & E B moitié de A C, ſera auſſi premier à A B, & B D, donc il ſera premier à D E, c'eſt-à-dire A E difference de E B, D B, donc A E, E B, ſont premiers entr'eux. Il eſt encore évident que l'un de ces nombres eſt pair, & l'autre impair: car ils compoſent enſemble A B, qui eſt impair, & étant premiers entr'eux, ils ſeront les générateurs d'un triangle primitif; je dis maintenant que le triangle formé par les deux nombres A B, B C, a ſes trois côtez doubles des trois côtez du triangle formé par les deux nombres A E, E B, ſçavoir l'hypotenuſe de l'hypotenuſe, le côté pair de l'impair du primitif, & l'autre côté de ſon côté pair. Car A B & B C étant la ſomme & la difference des deux nombres A E, E B, la ſomme des quarrez de A B, & de B C, ſera double de la ſomme des quarrez de A E, & E B, & ces deux ſommes ſont les hypotenuſes des deux triangles. Il eſt encore évident, que la difference des quarrez des nombres A B & B C, eſt un nombre égal au produit de leur ſomme A C par leur difference A D; mais A D étant double de A E, & A C de E B, le produit de A C par A D ſera quadruple du produit de A E par E B, c'eſt-à-dire double du double produit de A E par E B qui eſt le côté pair du triangle primitif: & par conſéquent le côté qui eſt la difference des quarrez de A B, B C, ſera double du côté pair du triangle formé par A E, E B: il eſt encore manifeſte que le côté impair de ce triangle primitif, eſt la difference des quarrez de B E, & A E; & par conſéquent eſt égal au pro-

Eucl. 7.

Prop. 24.

Prop. 17.

Prop. 18.

Prop. 14.

duit de A B par D B, (ou B C.) Donc le double produit de A B par B C, qui eſt le côté pair du triangle formé par A B, B C, étant double du ſimple produit de A B par B C, ſera double du côté impair du triangle primitif. Donc ſi on prend deux nombres quelconques, &c. Ce qu'il falloit prouver.

La converſe de cette propoſition eſt aiſée à prouver, ſçavoir que ſi un Triangle Rectangle eſt double d'un primitif, c'eſt-à-dire multiple d'un primitif par 2, la ſomme & la difference des générateurs du primitif ſeront les générateurs de ce triangle double, & ſeront impairs & premiers entr'eux, car A E, E B, étant les générateurs du
Supp. 5. primitif, A B, B C, ſeront leur ſomme & leur difference; or ces derniers nombres ſont impairs: ils ſont auſſi premiers entr'eux; car ſi A B avoit une commune meſure avec B C, ou B D, elle meſureroit auſſi le reſte A D, ce qui eſt abſurde; puiſque A B premier à A E étant impair, il ſera auſſi premier au nombre 2, & par conſéquent il ſera auſſi
Eucl. 7. premier à leur produit A D, égal à deux fois A E, & ſuivant ce qui a été prouvé cy-deſſus, ces deux nombres A B, B C ſeront les générateurs de ce triangle double du primitif; d'où il ſuit auſſi que tout triangle double d'un primitif a ſon hypotenuſe compoſée de deux quarrez, & a deux nombres générateurs.

Demonſtration Algebrique.

Soient A & B les nombres A E & E B; $A+B$ ſera A B, & $A-B$ ſera B C; or les trois côtez du triangle primitif ſeront A^2+B^2, A^2-B^2, & $2AB$, & l'hypotenuſe de l'au-
Supp. 12. tre triangle ſera la ſomme des deux quarrez A^2+B^2+2AB, & A^2+B^2-2AB; laquelle ſomme étant deux fois A^2+B^2, elle ſera double de l'autre hypotenuſe. A^2+B^2, la difference des deux quarrez de $A+B$ & de $A-B$ eſt $4AB$ double du côté pair de l'autre triangle; car le moindre quarré A^2+B^2-2AB étant ôté de A^2+B^2+2AB,

il reste 4 A B ; & enfin le double produit de A + B par A — B sera $2A^2 - 2B^2$, double du côté impair du triangle primitif, sçavoir $A^2 - B^2$.

CONSEQUENCE.

Il s'ensuit que l'hypotenuse d'un triangle double d'un primitif est un nombre pair composé de deux quarrez impairs, & premiers entr'eux.

PROPOSITION XXII.

Aux Triangles multiples d'un primitif par un quarré, l'hypotenuse est la somme de deux quarrez, & le côté qui est la difference de ces quarrez, est multiple du côté impair du primitif, par le même quarré multiplicateur de ses trois côtez.

DEMONSTRATION.

Puisque l'hypotenuse de tout triangle primitif est la somme de deux quarrez, chacun de ces quarrez étant multiplié par un quarré, l'un & l'autre produit sera un quarré, & leur somme qui est l'hypotenuse du triangle multiple, sera la somme de deux quarrez. Mais le côté impair du primitif qui est la difference des deux quarrez qui composent l'hypotenuse du primitif étant multipliée par le même quarré, le produit sera la difference des deux quarrez qui composent l'hypotenuse multiple. Donc aux triangles multiples, &c. ce qu'il falloit prouver.

Prop. 20. Supp. 4. Supp. 9.

Demonstration Algebrique.

Soit $A^2 + B^2$ l'hypotenuse d'un primitif, son côté impair sera $A^2 - B^2$, si on multiplie ces nombres par C^2, l'hypotenuse du triangle multiple sera $A^2C^2 + B^2C^2$, & la difference de ces deux quarrez qui composent l'hypotenuse sera $A^2C^2 - B^2C^2$, produit de $A^2 - B^2$ par C^2, & par conséquent multiple du côté impair du primitif par C^2.

PROPOSITION XXIII.

Aux Triangles multiples d'un primitif par un double quarré, l'hypotenuse est composée de deux quarrez, & la difference de ces deux quarrez, qui est un des côtez de ce Triangle, est multiple par le même double quarré du côté pair du primitif: comme aussi l'autre côté de ce multiple, est multiple du côté impair du primitif par le même double quarré.

DEMONSTRATION.

IL a été démontré en la 21. Proposition que le nombre 2, qui est un double quarré, multipliant les trois côtez d'un primitif, l'hypotenuse de ce multiple sera composée de deux quarrez, & que leur difference qui est un des côtez de ce multiple, sera double du côté pair du primitif. Je dis encore que tout autre double quarré multipliant un primitif, le triangle multiple qui en sera formé, aura son hypotenuse composée de deux quarrez, & que l'un des côtez en sera la difference, & sera multiple du côté pair du primitif par le même double quarré. Car puisque
Prop. 21. l'hypotenuse du primitif étant multipliée par 2, fait un nombre composé de deux quarrez; si la somme de ces deux quarrez est encore multipliée par un quarré, le produit
Supp. 4. sera encore la somme de deux quarrez: Or c'est la même
Supp. 10. chose de multiplier un nombre par 2, & le produit par un quarré, que de multiplier ce nombre par un double quarré, & par conséquent les deux quarrez qui composent l'hypotenuse du primitif étant multipliez par un double quarré, feront une somme composée de deux quarrez qui sera
Prop. 21. l'hypotenuse du multiple, & puisque le nombre 2 ayant multiplié le côté pair du primitif produit la difference des deux quarrez qui composent l'hypotenuse du triangle double du primitif; si cette difference est multipliée par le même quarré qui a multiplié l'hypotenuse double de celle du primitif; le produit sera la difference des deux quarrez

quarrez qui composent l'hypotenuse du triangle multiple de ce primitif par le même double quarré : il est encore évident que si 2 multipliant le côté impair du primitif produit le côté pair du triangle double du primitif, le multiple de ce côté pair par un quarré, sera multiple de l'impair du primitif par un double quarré, & sera aussi le côté pair de ce triangle multiple. Donc aux triangles multiples d'un primitif, &c. Ce qu'il falloit prouver. Pour faciliter l'intelligence de ces Propositions, on donne les exemples suivans en nombres. Supp. 9.

Exemples des Propositions 14, 21, 22, *&* 23.

2 & 5 sont deux nombres premiers entr'eux dont l'un est pair, générateurs du triangle 29, 21, 20; le double de ce triangle est 58, 42, 40; donc les générateurs sont 7 & 3 somme & difference de 5 & 2 : 58 est composé des deux quarrez 49 & 9, 42 double de 21 (qui est la difference des quarrez qui composent 29 hypotenuse du primitif) est le double produit de 7 & 3; & 40, double de 20 côté pair du primitif, est la difference des deux quarrez 49 & 9; mais si on multiplie 58, 42, & 40, par le quarré 9, on aura 522, 378, 360, pour les trois côtez d'un triangle multiple, & ces côtez seront les mêmes que si on avoit multiplié 29, 21, & 20, par le double quarré 18; & ce nombre 522 est la somme des produits de 49 & 9 par 9, dont la somme est 441 + 81, c'est-à-dire 522; & la difference de ces deux quarrez est 360, multiple de 20, côté pair du primitif par le double quarré 18. Que si on avoit multiplié ces trois nombres, 29, 21, & 20, par un quarré comme 9, les produits seroient 261, 189, 180, qui seroient les côtez d'un triangle multiple du primitif 29, 21, 20, par un quarré. Or l'hypotenuse 261, est composée du produit de 25 par 9, & de celui de 4 par 9, qui sont des quarrez, dont la somme est 225 + 36, & leur difference 189 est multiple par le quarré 9 de 21 côté impair du triangle primitif, conformément à la Proposition 22. Prop. 10.

CONSEQUENCE.

Il ſuit des deux Propoſitions précedentes, que les triangles multiples d'un primitif par un quarré ou par un double quarré ont des nombres générateurs ; car puiſqu'un de leurs côtez eſt la difference des deux quarrez qui compoſent l'hypotenuſe, il s'enſuit que le quarré de ce côté
Conſ. Prop. 10. & le quarré de l'hypotenuſe auront pour difference le quarré du double produit des deux nombres, dont les quarrez compoſent l'hypotenuſe, & par conſéquent que
Prop. 10. ce double produit ſera l'autre côté de ce triangle multiple, & que ces deux nombres ſeront les générateurs de ce triangle multiple d'un primitif par un quarré, ou par un double quarré.

PROPOSITION XXIV.

Tout Triangle qui a des nombres generateurs eſt primitif, ou multiple d'un primitif par un quarré ou par un double quarré.

DEMONSTRATION.

LEs générateurs ſont compoſez entr'eux ou premiers entr'eux ; ſi les générateurs ſont premiers entr'eux, ou l'un d'eux ſera pair, & l'autre impair ; ou ils ſeront tous
Prop. 14. deux impairs. Au premier cas, le triangle ſera primitif, & au ſecond cas, il ſera double d'un primitif, c'eſt-à-dire
Prop. 21. multiple d'un primitif par 2, qui eſt un double quarré : mais ſi les générateurs ſont des nombres compoſez entr'eux, ils ne ſeront pas les plus petits de leur raiſon, & ils ſeront également meſurez par deux nombres premiers en-
Eucl. 7. tr'eux, & en la même raiſon, chacun du ſien : c'eſt-à-dire qu'un même nombre multipliant ces deux nombres premiers entr'eux, il produira ces deux compoſez entr'eux : ſoient donc ces deux nombres compoſez entr'eux A C, & B C, & A & B ſoient les nombres premiers entr'eux, dont

l'un soit pair, & l'autre impair, qui étant multipliez par C, Supp. 12.
ont produit A C & B C : le triangle formé par A C & B C,
sera multiple par le quarré de C, du primitif formé par A Prop. 12.
& B. Que si A & B sont impairs, & premiers entr'eux, A C,
& B C en seront aussi également multiples chacun du sien,
& le triangle qui en sera formé sera multiple par C^2, du Prop. 12.
triangle formé par les deux impairs premiers entr'eux. Et
d'autant que ce dernier triangle est double d'un primitif,
l'autre sera multiple par un quarré du double d'un primitif, ou ce qui est la même chose, il sera multiple d'un primitif par un double quarré. Donc tout triangle qui a des nombres générateurs, &c. Ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XXV.

Si un triangle est multiple d'un primitif par un nombre non quarré ni double quarré : il n'aura point de nombres générateurs, & son côté multiple de l'impair du primitif ne sera pas la difference de deux quarrez : mais son hypotenuse sera composée de deux nombres, qui seront entr'eux comme quarré à quarré, dont la difference sera le côté multiple de l'impair du primitif.

DEMONSTRATION.

Si ce triangle avoit des nombres générateurs, il seroit
primitif ou multiple d'un primitif par un quarré, ou Prop. 24.
par un double quarré, ce qui est contre l'hypothese. Pour la seconde partie soit $A^2 + B^2$, $A^2 - B^2$, $2\,A\,B$ un triangle primitif, & soit quelconque nombre C, non quarré ni double quarré, par lequel le primitif soit multiplié. L'hypotenuse de ce multiple sera $C\,A^2 + C\,B^2$, qui seront entr'eux comme quarré à quarré, parce que C multipliant deux quarrez, les produits seront en même raison l'un à l'autre que ces quarrez : il est encore manifeste que le même nombre C, multipliant le côté impair du primitif, qui est
la difference des quarrez A^2 & B^2, produira la difference Supp. 9.

Supp. 4. de C A², & de C B², qui ne sont point des nombres quarrez. Donc si un Triangle Rectangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

PREMIERE REMARQUE.

On peut voir par ce qui est dit cy-dessus, & par ce qui a été dit en la Proposition 20, qu'une même hypotenuse d'un même triangle, peut être composée de deux nombres quarrez, dont la difference sera un des côtez de ce triangle, & de deux autres non quarrez, qui seront entr'eux comme quarré à quarré, & qui auront pour difference l'autre côté du même triangle: comme au triangle 6, 8, 10, double du primitif 3, 4, 5, l'hypotenuse 10 est le produit de 2 par 5 (ou 4 + 1,) & ce produit est égal à la somme de 8 & 2, qui ne sont pas quarrez, mais sont entr'eux comme quarré à quarré, & le même nombre 2 multipliant le côté impair 3, produit 6, qui est l'un des côtez de ce triangle double de l'impair du primitif, & est la difference des deux nombres 8 & 2: mais aussi ce même triangle 6, 8, 10, a deux nombres générateurs 3 & 1, dont les quarrez 9 & 1 composent la même hypotenuse 10, & leur difference est 8, double du côté pair du primitif.

SECONDE REMARQUE.

Il est possible qu'un même nombre soit l'hypotenuse de plusieurs triangles primitifs, & aussi de plusieurs triangles multiples, qui n'ont point de nombres générateurs, comme 65 est l'hypotenuse des triangles primitifs 65, 63, 16; 65, 33, 56, & aussi des triangles multiples 65, 52, 39, & 65, 60, 25, qui n'ont point de nombres générateurs: mais chacun des côtez impairs de ces derniers, ne sont pas la difference de deux nombres quarrez qui composent cette hypotenuse, mais de deux nombres qui sont entr'eux comme quarré à quarré. Les générateurs du premier triangle sont 1 & 8, du second 4 & 7. Mais le troisiéme est multiple de 3, 4, 5, par 13, & le quatriéme multiple de 5, 12, 13, par 5. Les nombres qui composent

l'hypotenuse du troisiéme, sont 52 *&* 13, *qui étant multiples de* 4 *&* 1 *sont entr'eux comme quarré à quarré; & du quatriéme,* 45 *&* 20, *qui sont aussi entr'eux comme quarré à quarré: leurs côtez multiples des impairs des primitifs sont* 39, *difference de* 52 *&* 13; *&* 25, *difference de* 45 *&* 20: *Et parce qu'on voit par induction, que beaucoup de nombres premiers qui excedent de l'unité un nombre mesuré par* 4, *sont les hypotenuses d'un seul triangle primitif, & qu'on n'en trouve point dans une tres-grande suite de nombres qui n'ayent cette proprieté: comme* 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 101, *& que* 21 *&* 57, *qui excedent de l'unité un multiple de* 4, *mais qui ne sont pas nombres premiers, n'ont pas cette proprieté: on peut conjecturer que cette régle est universelle. De même, parce qu'on trouve par induction, que le produit de deux de ces hypotenuses, est l'hypotenuse de deux triangles primitifs, que le produit de trois de ces hypotenuses, est l'hypotenuse de quatre triangles primitifs, que le produit de quatre de ces hypotenuses est l'hypotenuse de huit triangles primitifs, que le produit de cinq de ces hypotenuses est l'hypotenuse de seize triangles primitifs, &c. On peut conjecturer que la progression des nombres de ces triangles sera en raison double à l'infini, en multipliant toûjours la derniere hypotenuse, par un nombre premier qui excede de l'unité un multiple de* 4.

EXEMPLES.

1105 *produit des trois nombres* 5, 13, 17. 8177 *produit de* 13, 17, 37. *Et* 3145 *produit de* 5, 17, 37, *sont chacun l'hypotenuse commune de quatre triangles primitifs, comme on le voit en la table suivante.*

1105		8177		3145	
1104	47	7665	2848	3127	336
817	744	4305	6952	2263	2184
943	576	3375	7448	1463	2784
1073	264	1905	7952	553	3096

32045, *produit de* 5, 13, 17, 29; & 40885, *produit de* 5, 13, 17, 37, *sont chacun l'hypotenuse de huit triangles primitifs, comme on le voit en la table suivante.*

CÔTEZ DES TRIANGLES.

	2277	31964
	30956	8283
	27044	17253
HYP.	24124	21093
32045	23067	22244
	27813	15916
	31323	6764
	32037	716

CÔTEZ DES TRIANGLES.

	40723	2636
	39917	8844
	37523	16236
HYP.	34387	22116
40885	26093	31476
	19667	35844
	14893	38076
	11603	39204

De même 237133, *produit de* 13, 17, 29, 37, *est l'hypotenuse de huit triangles primitifs, dont les générateurs sont en la table suivante.*

Générateurs.		Générateurs.	
62	483	243	422
93	478	258	413
98	477	282	397
138	467	307	378

Et on n'en trouvera point d'autres.

De même 1185665 *produit des nombres premiers*, 5, 13, 17, 29, 37, *est l'hypotenuse de seize triangles primitifs*, *comme on les voit en la table ci-dessous avec leurs nombres générateurs.*

Générateurs.		Côtez des Triangles.	
64	1087	1177473	139136
103	1084	1164447	223304
167	1076	1129887	359384
191	1072	1112703	409504
236	1063	1074273	501736
281	1052	1027743	591224
292	1049	1015137	612616
359	1028	927903	738104
449	992	782463	890816
512	961	661377	984064
568	929	540417	1055344
601	908	463263	1091416
607	904	448767	1097456
664	863	303873	1146064
673	856	279807	1152176
743	796	81567	1182856

Hypotenuse commune
1185665.

Mais on trouvera aussi par induction que le produit de deux de ces nombres premiers qui excedent de l'unité un multiple de 4, *est l'hypotenuse de deux triangles multiples : que le produit de trois de ces nombres, est l'hypotenuse de neuf triangles multiples ; & que le produit de quatre de ces nombres est l'hypotenuse de trente-deux triangles multiples, & non davantage.*

EXEMPLES.

13	Côtez.	
5	60	25
65	52	39
17		
13	171	140
221	220	21

17	Côtez.	
5	77	36
85	84	13
29		
5	116	87
145	105	100

1105 *produit de* 5, 13, 17, *est l'hypotenuse de neuf triangles multiples. Sçavoir :*

1105	1071	272
	561	952
	425	1020
Hyp.	884	663
1105	1001	468
	1092	169
	975	520
	855	700
	1100	105

8177 *produit de* 13, 17, 37, *est l'hypotenuse des neuf triangles multiples suivans.*

	Côtez.	
	6327	2380
	8140	741
	7548	3145
Hyp.	7215	2848
8177	8073	1300
	5577	5980

7735	2652
5423	6120
527	8160

2405 *produit de* 5, 13, 37, *eſt l'hypotenuſe des neuf triangles multiples ſuivans.*

CÔTEZ.

	2220	925
	1924	1443
	2331	592
HYP.	1221	2072
2405	1595	1800
	155	2400
	2275	780
	1989	1352
	2288	741

3145 *produit de* 5, 17, 37, *eſt l'hypotenuſe des neuf triangles multiples ſuivans.*

CÔTEZ.

	2849	1332
	3108	481
	2516	1887
HYP.	2775	1480
3145	2601	1768
	669	2992
	2975	1020
	3105	500
	2145	2300

Table des trente-deux triangles multiples, dont 40885 produit de 5, 13, 17, 37, est l'hypotheſe commune.

CÔTEZ DES TRIANGLES.

40749	3332	37037	17316
24221	22372	40404	6253
31059	26588	36075	19240
8211	40052	40365	6500
37740	15725	27885	29900
32708	24531	40848	1739
39627	10064	30229	27578
20757	35224	34891	21312
27115	30600	39701	9768
2635	40800	31635	25900
33813	22984	40700	3885
12597	38896	38325	14240
40651	4368	21525	34760
29419	28392	16875	37240
19019	36192	9525	39700
7189	40248		

Hypotenuſe commune
40885

Et puiſqu'un de ces nombres premiers comme 5, ou 13, n'eſt l'hypotenuſe que d'un ſeul triangle primitif, & ne l'eſt d'aucun multiple, que le produit de deux de ces nombres eſt l'hypotenuſe de quatre triangles tant primitifs que multiples, que le produit de trois de ces nombres eſt l'hypotenuſe de treize triangles, & celui de quatre de ces nombres de quarante triangles, leſquels nombres 1, 4, 13, 40, ſont l'aggregé des nombres de ſuite en progreſſion triple 1, 3, 9, 27, on peut conjecturer que cette progreſſion peut aller à l'infini, ſelon les nombres en progreſſion triple, ſçavoir 1, 3, 9, 27, 81, 243, &c.

& que par consequent 1185665 sera l'hypotenuse de 121 triangles, y compris les 16 primitifs, lequel nombre est la somme de 1, 3, 9, 27, 81, & que 48612265 produit des six nombres premiers 5, 13, 17, 29, 37, & 41, sera l'hypotenuse de 364 triangles y compris 32 primitifs. On pourra chercher ces triangles si l'on veut, ou même la démonstration de ces proprietez, qui apparemment est très-difficile à trouver; car de même que pour démontrer les propositions précedentes & les suivantes touchant les proprietez des Triangles Rectangles en nombres; il a fallu trouver d'autres theorêmes que ceux des trois Livres des nombres d'Euclide: on peut croire qu'il en faudra encore d'autres pour parvenir à bien démontrer la plûpart des proprietez expliquées en cette remarque, horsmis la proprieté d'un seul de ces nombres premiers, qui est facile à démontrer, car puisque 13, par exemple, est un nombre premier, il ne peut être l'hypotenuse d'un triangle multiple, puisqu'il seroit mesuré par le nombre qui auroit multiplié l'hypotenuse du primitif, & par conséquent ne seroit pas premier contre l'hypothese.

PROPOSITION XXVI.

En tout Triangle Rectangle, un des deux côtez est mesuré par trois.

DEMONSTRATION.

SI aucun des deux côtez n'étoit mesuré par trois, leurs quarrez ne le seroient pas aussi: ces quarrez seroient donc ternaires + 1, & leur somme seroit ternaire + 2; qui par conséquent ne seroit pas un nombre quarré, ce qui est absurde; puisqu'elle doit être le quarré de l'hypotenuse. Donc en tout triangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

Supp. 5. Prop. 5. Def. 1. & Supp. 1.

PROPOSITION XXVII.

L'hypotenuse d'un triangle primitif ne peut ètre mesurée par trois.

DEMONSTRATION.

SI l'hypotenuse étoit mesurée par trois ; l'un des deux côtez étant mesuré par trois par la précedente, l'au-
Prop. 13. tre côté le seroit aussi, & les trois côtez auroient une commune mesure ; & le triangle ne seroit pas primitif, contre l'hypothese. Donc, &c. Ce qui étoit à prouver.

PROPOSITION XXVIII.

En tout Triangle Rectangle un des côtez est mesuré par 4.

DEMONSTRATION.

D'Autant que dans les triangles primitifs le côté pair est le double produit d'un nombre pair & d'un impair ;
Prop. 14. & que le simple produit qui est pair est mesuré par deux : il s'ensuit que le double produit sera mesuré par 4. Or dans les triangles multiples, un de leurs côtez étant multiple du côté pair du primitif ; ce côté multiple sera aussi mesuré par 4 : puisqu'un nombre multiple d'un nombre mesuré par 4, est aussi nécessairement mesuré par 4. Donc en tout triangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

CONSEQUENCE.

Il s'ensuit qu'il n'y a aucun Triangle Rectangle dont chacun des côtez soit un nombre premier.

PROPOSITION XXIX.

Tout Triangle Rectangle a un de ses trois côtez mesuré par 5.

DEMONSTRATION.

SI un des deux moindres côtez est mesuré par 5, la proposition est véritable.

S'il n'y a aucun de ces deux côtez qui soit mesuré par 5, leurs quarrez seront differents de l'unité d'un nombre mesuré par 5, & chacun d'eux sera quinaire + 1, ou quinaire — 1, ou l'un sera quinaire + 1, & l'autre quinaire — 1. Prop. 8.

Ces quarrez ne peuvent être tous deux quinaires + 1, ou tous deux quinaires — 1, parce que leur somme seroit quinaire + 2, ou quinaire — 2, & ainsi elle ne seroit pas un quarré, comme il est requis. Conf. Prop. 8. Supp. 1.

Il reste donc que l'un de ces quarrez soit quinaire + 1, & l'autre quinaire — 1, & en ce cas leur somme qui est le quarré de l'hypotenuse, sera mesurée par 5, parce que 5 + 1 ajoûté à 5 — 1, fait un quinaire; donc sa racine qui est l'hypotenuse, sera mesurée par 5. Il est donc nécessaire qu'un des trois côtez d'un Triangle Rectangle soit mesuré par 5. Ce qui étoit à prouver. Supp. 3.

PROPOSITION XXX.

L'aire de tout Triangle Rectangle est mesuré par six.

DEMONSTRATION.

OU l'un des côtez est mesuré par trois, & l'autre par quatre, ou un seul est mesuré par 3 & par 4; si l'un des côtez est mesuré par 3, & l'autre par 4, leur produit sera mesuré par 12; & par conséquent l'aire du triangle qui en est la moitié, sera mesurée par 6: mais si l'un des côtez est mesuré par 3 & par 4; ce côté sera aussi mesuré par 12: donc son produit par l'autre côté quel qu'il soit, sera mesuré par 12; & l'aire du triangle en ce second cas, sera aussi mesurée par 6. Ce qui étoit à prouver. Prop. 26. & 28.

PROPOSITION XXXI.

L'aire de tout triangle multiple, est multiple de celle de son primitif par un quarré ; & la racine de ce quarré est le nombre par lequel le primitif a été multiplié, pour faire le triangle multiple.

DEMONSTRATION.

Prop. 10. Supp. 2. PArce que le triangle primitif a un nombre pair pour un de ses côtez ; que ce côté soit 2 A, & l'autre soit B, son aire sera A B. Que ces deux côtez soient multipliez par C, on aura un triangle multiple, dont les côtez seront 2 A C, & B C, & l'aire sera A B C^2, qui est multiple de l'aire du primitif, sçavoir A B, par C^2, dont la racine C, est le nombre par lequel le primitif a été multiplié : ce qui procede de ce que deux nombres comme A & B, étant multipliez par un nombre comme C ; les deux produits se multipliant feront un nombre qui sera aussi le produit de A, C, B, C, Supp. 10. se multipliant en quelque ordre que ce soit ; si donc on multiplie C, par C, on aura C^2, qui multipliant A B, produit de A, par B, ce produit sera A B C^2.

CONSEQUENCE I.

Il s'ensuit que si l'aire d'un triangle primitif n'est point un nombre quarré, celle de son multiple ne le sera point aussi : puisque C^2 étant multiplié par A B, aire du triangle Supp. 4. primitif, le produit A B C^2 ne sera pas quarré, si A B n'est pas un quarré.

CONSEQUENCE II.

De même si l'aire d'un triangle primitif n'est pas double d'un nombre quarré ; pas un des multiples de ce triangle, n'aura un double quarré pour son aire ; car soient 4 A & B les côtez du triangle primitif, l'aire sera 2 A B, & les côtez étant multipliez par C, l'aire du multiple sera 2

ABC^2. Or il eſt évident que ſi 2 AB n'eſt pas double quarré, 2 ABC^2 ne le ſera pas auſſi; car AB ne ſera pas un quarré, ni par conſequent ABC^2: donc 2 ABC^2 ne ſera pas un double quarré. Supp. 4.

PROPOSITION XXXII.

En tout triangle primitif la ſomme & la difference de l'hypotenuſe & du côté impair ſont chacun un double quarré.

DEMONSTRATION.

SOit A^2+B^2 l'hypotenuſe d'un triangle primitif, & A^2-B^2 le côté impair, il eſt évident que la ſomme de ces deux nombres eſt 2 A^2, double du quarré A^2, & leur difference 2 B^2, double du quarré B^2. Supp. 12.

CONSEQUENCE.

On fera voir par le même raiſonnement, qu'aux triangles multiples d'un primitif par un quarré, ou par un double quarré; la ſomme de l'hypotenuſe & d'un des côtez ſont enſemble un double quarré, & que leur difference eſt auſſi un double quarré: parce qu'en ces triangles l'hypotenuſe eſt la ſomme de deux quarrez: mais dans tous les autres multiples, la ſomme & la difference de l'hypotenuſe & du côté multiple de l'impair du primitif, ſeront entr'eux comme double quarré à double quarré, parce que deux doubles quarrez étant multipliez par le même nombre qui a multiplié les côtez du primitif, les produits demeureront toûjours en la raiſon de double quarré à double quarré: comme au triangle 9, 12, 15, multiple du primitif 3, 4, 5; 24 & 6, ſomme & difference du côté 9, & de l'hypotenuſe 15, ſont entr'eux comme 8 & 2, deſquels ils ſont multiples par le nombre 3, non quarré ni double quarré. Or 3 multipliant 4 + 1 ou 5, fait l'hypotenuſe 15 compoſée de deux nombres 12 & 3, qui ſont entr'eux comme quarré à quarré, ſçavoir 1 & 4, & le côté

Prop. 22. & 23.

Supp. 9.

9 en eſt la difference. Et la ſomme de l'hypotenuſe 5 & du côté impair 3, étant 8, qui eſt un double quarré, & leur difference étant 2, qui eſt auſſi un double quarré, les produits de ces nombres par 3, ſçavoir 24 & 6 ſeront encore en la même raiſon de 8 à 2, c'eſt-à-dire de double quarré à double quarré : ce qui étoit à prouver.

PROPOSITION XXXIII.

En tout Triangle primitif la ſomme & la difference de l'hypotenuſe, & du côté pair, ſont chacun un nombre quarré : & la racine du plus grand de ces quarrez eſt la ſomme des deux nombres générateurs du triangle, & la racine du moindre en eſt la difference.

Démonſtration Algébrique.

A & B ſoient les nombres générateurs de quelconque triangle primitif, l'hypotenuſe ſera $A^2 + B^2$, & le
Supp. 12. côte pair 2 A B, dont la ſomme eſt égale au quarré de A + B, ſomme des deux générateurs, & leur difference ſçavoir $A^2 + B^2 - 2AB$, ſera le quarré de A — B, difference des générateurs A & B. Ce qu'il falloit prouver.

CONSEQUENCE.

La même choſe arrivera aux triangles multiples d'un primitif par un quarré, & par un double quarré : ſçavoir que la ſomme de l'hypotenuſe & du côté pair, ſera un quarré : parce qu'ils ont deux nombres générateurs, par la conſéquence des 22 & 23 Prop. Mais cette ſomme & cette difference dans les triangles multiples d'un primitif, par un nombre qui n'eſt pas quarré, ni double quarré, ſeront l'une à l'autre comme quarré à quarré ; ce qui ſe prouvera par les mêmes raiſons de la conſéquence de la Propoſition précedente.

PROPOSITION

PROPOSITION XXXIV.

Si le côté pair & l'hypotenuse d'un triangle primitif, sont les générateurs d'un autre triangle : il sera primitif, & son côté impair sera un quarré. Et si le côté impair d'un triangle primitif est un nombre quarré, l'hypotenuse de ce triangle sera composée de deux quarrez, dont l'un aura pour racine l'hypotenuse d'un deuxiéme triangle primitif, l'autre aura pour racine le côté pair du même deuxiéme triangle, & la racine du quarré, qui est le côté impair du premier triangle, sera le côté impair du deuxiéme triangle.

DEMONSTRATION.

PArce que le côté impair de tout triangle primitif, est la difference de deux quarrez premiers entr'eux, dont la somme est l'hypotenuse du même triangle ; si ce côté impair est un nombre quarré, on aura deux quarrez premiers entr'eux, qui joints ensemble feront un troisiéme quarré ; & les racines de ces trois quarrez seront les trois côtez d'un deuxiéme triangle primitif. Prop. 10. Def. 1.

La premiere partie qui est la converse de la deuxiéme se démontre en cette sorte. Les quarrez du côté pair, & de l'hypotenuse, ont pour difference le quarré de l'impair : ce quarré sera donc le côté impair du deuxiéme triangle, qui sera primitif, puisque les générateurs sont un pair, & un impair premiers entr'eux. Prop. 14.

Démonstration Algebrique.

Que le côté impair du triangle soit $A^2 - B^2 = Z^2$, donc $Z^2 + B^2 = A^2$ & on aura un deuxiéme triangle dont les trois côtez seront A, B, Z, duquel A sera l'hypotenuse, & Z en sera le côté impair, puisque son quarré est le côté impair du premier triangle : il restera donc B, pour le côté pair du deuxiéme triangle, donc l'hypotenuse du premier triangle $A^2 + B^2$ est composée de deux quarrez, dont les

racines A & B ſont l'hypotenuſe, & le côté pair d'un deuxiéme triangle, & Z, racine du quarré qui eſt le côté impair du premier triangle par l'hypotheſe, ſera le côté impair du deuxiéme, & il eſt évident que ces deux nombres A & B, ſont premiers entr'eux, & par la 14e Prop. le triangle dont ils ſeront les générateurs, ſera primitif.

Exemple.

Soit le Triangle 9, 40, 41, dont les nombres générateurs ſont 4 & 5, & le côté impair 9 eſt quarré. Parce que l'hypotenuſe 41 eſt la ſomme des deux quarrez 25 & 16, dont 9 côté impair eſt la difference, & que cette difference eſt un quarré, il s'enſuit que ce quarré joint au moindre quarré des deux qui compoſent l'hypotenuſe, ſçavoir 16, fera un autre nombre quarré 25; & par conſéquent les trois racines de ces trois quarrez, ſeront les trois côtez d'un Triangle Rectangle, ſçavoir 3, 4, 5, dont le plus grand 5 ſera l'hypotenuſe.

PROPOSITION XXXV.

Si le côté pair d'un triangle primitif eſt un double quarré, les nombres générateurs de ce triangle ſeront des nombres quarrez, & l'hypotenuſe ſera la ſomme de deux quarrez quarrez.

DEMONSTRATION.

Prop. 10. PArce que le côté pair d'un triangle primitif eſt le double du produit des racines des quarrez qui compoſent l'hypotenuſe, ſi ce double produit eſt un double quarré,
Supp. 4. & 11. ſa moitié ſera un nombre quarré, qui ne peut être produit que par deux nombres quarrez, ou par deux nombres plans ſemblables : mais parce que ces nombres ſont les
Conſ. Prop. 14. générateurs d'un triangle primitif, ils ſeront premiers
Supp. 12. entr'eux, & par conſéquent ils ſeront nombres quarrez, & leurs quarrez dont la ſomme eſt l'hypotenuſe de ce

triangle, seront des quarrez quarrez : ainsi parce que 72 double du quarré 36 est le côté pair du triangle primitif 65, 72, 97, l'hypotenuse 97 doit être composée de deux quarrez quarrez, qui sont 81 & 16 : à cause que 36 moitié du côté pair étant un quarré, il ne peut être produit que par deux quarrez comme 4 & 9, puisque le côté pair est le double du produit des deux nombres générateurs du triangle, qui doivent être premiers entr'eux, & que les quarrez de ces deux quarrez, qui sont les quarrez quarrez 81 & 16, composent l'hypotenuse 97. Supp. 11.

CONSEQUENCE.

Il s'ensuit que tout nombre composé de deux quarrez quarrez, est l'hypotenuse d'un triangle, dont le côté pair est un double quarré : car les racines de ces quarrez quarrez qui sont des quarrez seront les générateurs du triangle : la somme de leurs quarrez qui sont des quarrez quarrez, en sera l'hypotenuse, & le côté pair sera le double de leur produit, lequel produit étant quarré, ce double produit sera double quarré.

Exemple.

Le nombre 97 qui est composé des deux quarrez 16 & 81 est l'hypotenuse du triangle primitif 65, 72, 97, dont les générateurs sont 4 & 9, & le côté pair est 72, double du quarré 36 produit de 4 & 9 ; & quoique 36 soit aussi le produit de deux autres quarrez 36 & 1, il sera facile de connoître quels sont les générateurs du triangle donné, parce que la difference de l'hypotenuse & du côté impair, est toûjours double du moindre des deux quarrez quarrez, & par conséquent 32 étant cette difference, sa moitié 16 sera ce quarré quarré, dont la racine 4 est l'un des générateurs du triangle. Prop. 52.

PROPOSITION XXXVI.

La difference de deux quarrez quarrez est le produit de l'hypotenuse d'un triangle, par l'un des côtez du même triangle.

DEMONSTRATION.

Prop. 18. LE produit de la somme de deux nombres par leur difference est la difference des quarrez de ces nombres: donc si deux nombres sont des quarrez, le produit de leur somme par leur difference, sera la difference de leurs quarrez, qui sont des quarrez quarrez. Mais ces quarrez sont inégaux, puisque leurs quarrez quarrez ont une difference; & par conséquent leur somme sera l'hypote-
Prop. 10. nuse d'un triangle, & leur difference en sera l'un des côtez. Donc la difference de deux quarrez quarrez, &c. Ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XXXVII.

En tout triangle, auquel l'hypotenuse est la somme de deux quarrez, le produit de l'hypotenuse par le côté qui est la difference des quarrez qui la composent, est la difference de deux quarrez quarrez, dont les racines quarrées quarrées sont les générateurs du triangle.

DEMONSTRATION *Algebrique.*

$A^2 + B^2$ est l'hypotenuse d'un Triangle Rectangle, $A^2 - B^2$, le côté qui est la difference de A^2 & B^2; leur produit $A^4 - B^4$ est la difference des quarrez quarrez
Prop. 12. A^4 & B^4 dont les racines quarrées quarrées sont A & B qui sont les générateurs du triangle. Or il est évident que la difference des quarrez de A^2 & B^2, est le produit de
Prop. 18. leur somme $A^2 + B^2$, par leur difference $A^2 - B^2$. Mais les quarrez de A^2 & B^2, sont des quarrez quarrez, dont

les racines quarrées sont A & B ; donc le produit de $A^2 + B^2$ par $A^2 - B^2$, sera la difference de deux quarrez quarrez : dont les racines quarrées quarrées seront les nombres générateurs du triangle. Ce qui étoit à prouver.

PROPOSITION XXXVIII.

Si dans un Triangle primitif, l'hypotenuse étoit un nombre quarré, & pareillement le côté pair un nombre quarré : la racine de cette hypotenuse seroit l'hypotenuse d'un autre Triangle primitif, qui auroit un nombre quarré pour son côté impair, & un double quarré pour son côté pair.

DEMONSTRATION.

PArce que le côté pair d'un triangle primitif, est le double produit des nombres générateurs du triangle ; si ce double produit étoit un nombre quarré, le simple produit seroit un double quarré, qui ne peut être fait que par un quarré, & par un double quarré, ou par deux nombres qui soient entr'eux comme quarré à double quarré : mais parce que le triangle est supposé primitif, le générateur impair sera un quarré, & l'autre générateur un double quarré : car l'impair ne peut être double quarré : & parce que les quarrez de ces nombres qui sont premiers entr'eux, étant joints ensemble font l'hypotenuse ; il s'ensuit que l'hypotenuse seroit la somme d'un quarré quarré, & d'un quarré dont la racine seroit un double quarré ; mais l'hypotenuse étant un quarré par l'hypothese, on auroit deux quarrez qui feroient un quarré, & les racines de ces trois quarrez seroient des nombres premiers entr'eux, & seroient l'hypotenuse & les deux côtez d'un autre triangle, dont le côté impair seroit un quarré, & l'autre un double quarré. Donc si dans un triangle primitif tant l'hypotenuse que le côté pair étoient des quarrez ; il en proviendroit un autre triangle primitif moindre, dont le

Prop. 10.

Supp. 11.

Eucl. 7.

Def. 1.

côté impair seroit un quarré, & le côté pair un double quarré. Ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XXXIX.

Il n'y a aucun Triangle Rectangle en nombres, dont l'aire soit un nombre quarré.

DEMONSTRATION.

SOit premierement quelconque triangle primitif; je dis que son aire ne peut être un quarré. Car afin qu'il eût un quarré pour son aire, il faudroit que de ses deux côtez, l'un fût quarré, sçavoir l'impair; car il ne peut être double quarré & l'autre double quarré. Or dans ce triangle primitif, le côté impair étant quarré, les nombres
Prop. 34. générateurs du triangle seroient l'hypotenuse, & le côté pair d'un deuxiéme triangle primitif, & parce que le côté pair du premier seroit un double quarré, ces mêmes nombres générateurs du premier triangle seroient quarrez.
Prop. 35. Donc l'hypotenuse, & le côté pair de ce deuxiéme triangle seroient des quarrez, & ce triangle seroit moindre que le premier, puisque deux de ses côtez seroient les gé-
Prop. 38. nérateurs de ce premier. Mais par la précedente, la racine de l'hypotenuse de ce deuxiéme triangle, seroit l'hypotenuse d'un troisiéme triangle primitif, qui auroit un nombre quarré pour son côté impair, & un double quarré pour son côté pair; & ce troisiéme triangle seroit encore moindre que le deuxiéme. Or ce troisiéme triangle auroit aussi pour son aire un nombre quarré. D'où il s'ensuit que supposant un Triangle Rectangle primitif, dont l'aire soit un nombre quarré, on en trouvera un troisiéme en nombres entiers par une conséquence infaillible, beaucoup plus petit, qui auroit aussi un quarré pour son aire, & que par les mêmes raisons ce troisiéme en donneroit encore un cinquiéme plus petit, qui seroit aussi primitif, & par conséquent en nombres entiers, & ainsi à l'infini en

diminuant toûjours. Mais cette conséquence est absurde; car les nombres entiers ne vont pas à l'infini en descendant, puisqu'ils commencent par l'unité, & s'y terminent; & par conséquent il est impossible que l'aire d'un Triangle Rectangle primitif, soit un nombre quarré. Il a été aussi prouvé par la conséquence de la proposition 31^e. Que si l'aire d'un primitif n'est pas un nombre quarré, celle de son multiple ne sera pas aussi un quarré. Donc il n'y a aucun triangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XL.

Il n'y a aucun Triangle Rectangle en nombres dont l'aire soit un double quarré.

DEMONSTRATION.

SI un triangle primitif avoit un double quarré pour son aire, il faudroit que chacun de ses moindres côtez Supp. 11. fût un nombre quarré, afin que la moitié de leur produit qui est l'aire du triangle, fût un double quarré : mais chacun de ces côtez ne peut être un quarré : car le côté impair étant un quarré, les nombres générateurs de ce triangle Prop. 34. seroient l'un l'hypotenuse, & l'autre le côté pair d'un deuxiéme triangle primitif moindre que le premier, & parce que le côté pair du premier est aussi supposé être un quarré, & que ce côté pair est le double produit des deux Prop. 10. nombres générateurs du premier triangle : l'un de ces nombres générateurs seroit un quarré, & l'autre un double Supp. 11. quarré, puisqu'ils doivent être premiers entr'eux. Or ces mêmes nombres sont l'hypotenuse & le côté pair Prop. 34. du deuxiéme triangle : donc ce second triangle qui doit être primitif, auroit un quarré pour son hypotenuse, & un double quarré pour son côté pair : puisque l'hypotenuse étant un impair, ne peut être un double quarré, Prop. 20. d'où il s'ensuivroit que l'hypotenuse de ce second triangle seroit la somme de deux quarrez quarrez : & parce que Prop. 35.

cette hypotenuse doit être un nombre quarré, on auroit un quarré, qui seroit la somme de deux quarrez quarrez; & les racines de ces trois quarrez seroient les trois côtez
Def. 1. d'un troisiéme triangle primitif moindre que les précedens, qui auroit un quarré pour chacun de ses moindres côtez, & par conséquent son aire seroit un double quarré, comme du premier triangle qu'on a supposé avoir un double quarré pour son aire : & parce que de ce premier triangle proviendroit ce troisiéme beaucoup moindre, qui seroit aussi primitif, & qui auroit un double quarré pour son aire; de même de ce troisiéme, il en proviendroit un cinquiéme encore moindre, qui seroit aussi primitif, & par consequent en nombres entiers; on conclura par un raisonnement semblable à celui de la proposition précedente, qu'il n'y a aucun Triangle Rectangle primitif en nombres dont l'aire soit un double quarré. Mais par la deuxiéme conséquence de la Proposition 31^{e}, si l'aire d'un primitif n'est pas un double quarré, celle d'aucun des triangles multiples de ce primitif ne sera un double quarré. Donc il n'y a aucun Triangle rectangle en nombres, dont l'aire soit un double quarré. Ce qu'il falloit prouver.

CONSEQUENCES
des deux dernieres Propositions.

Premiere Conséquence de la trente-neuviéme.

IL n'y a point de Triangle rectangle auquel l'un des moindres côtez soit un nombre quarré, & l'autre un double quarré; car son aire seroit un quarré. Ce qui a été prouvé impossible.

I I.

Il n'y a point de Triangle rectangle auquel tant l'hypotenuse, que le côté pair, soit un nombre quarré; parce
Prop. 38. que de ce Triangle il en proviendroit un autre, dont le côté

côté impair ſeroit quarré, & le pair un double quarré, & par conſéquent ſon aire ſeroit un quarré.

III.

Un quarré étant joint à un quarré dont la racine ſoit un double quarré, ne peut faire un quarré; car ſi cette ſomme étoit un quarré, les racines de ces deux quarrez ſeroient les deux côtez d'un triangle, dont l'un ſeroit un quarré, & l'autre un double quarré: ce qui eſt contre la premiere Conſéquence.

IV.

Un quarré quarré impair ne peut être la ſomme d'un quarré quarré pair, & d'un quarré impair: car les trois racines de ces trois quarrez feroient un Triangle rectangle, dont l'hypotenuſe & le côté pair, ſeroient quarrez; ce qui eſt contre la deuxiéme Conſéquence; & par la même deuxiéme Conſéquence un quarré impair ne peut être la difference de deux quarrez quarrez.

V.

Il s'enſuit auſſi que la difference du quarré de l'hypotenuſe d'un triangle, au quarré tant de la ſomme que de la difference des deux côtez du triangle, ne pourra être un nombre quarré: car puiſque cette difference eſt quadruple de l'aire du Triangle, & que cette aire ne peut être un quarré, cette difference ne pourra être un quarré: puiſque le produit de 4 qui eſt un quarré, par un nombre non quarré, ne peut être quarré.

Conſ. Prop. 11.

Supp. 4.

VI.

Il eſt encore manifeſte, qu'il n'y a point de Triangle rectangle primitif dont l'hypotenuſe étant un quarré, le côté impair ſoit auſſi un quarré: car le produit de ces deux quarrez ſeroit la difference de deux quarrez quarrez Prop. 37.

qui composeroient l'hypotenuse d'un Triangle rectangle, dont les générateurs seroient des nombres quarrez, & le côté impair seroit cette difference; or le côté pair
Supp. 4. de ce dernier triangle seroit un double quarré, & le côté impair un quarré, ce qui est contre la premiere Conséquence.

Conséquence de la Proposition 40[e].

I.

Il n'y a aucun Triangle rectangle qui ait un quarré pour chacun de ses moindres côtez; car l'aire seroit un double quarré.

II.

Un quarré ne peut être la somme de deux quarrez quarrez; parce que les racines de ces trois quarrez seroient les trois côtez d'un triangle, auquel chacun des deux moindres côtez seroit un quarré; contre la premiere Conséquence.

III.

Il n'y a aucun Triangle rectangle primitif qui ait un quarré pour son hypotenuse, & un double quarré pour son côté pair; parce que l'hypotenuse seroit la somme de deux quarrez quarrez: ainsi on auroit un quarré, qui seroit la somme de deux quarrez quarrez, contre la deuxiéme Conséquence.

IV.

Un quarré quarré ne peut être la somme de deux quarrez, dont l'un ait pour racine un double quarré; parce que les racines de ces trois quarrez seroient les trois côtez d'un triangle, qui auroit un nombre quarré pour son hypotenuse, & un double quarré pour son côté pair, contre la troisiéme Conséquence.

PROPOSITION XLI.

En tout triangle primitif, la somme des deux côtez est octonaire + ou — 1, & la difference des mêmes côtez est aussi octonaire + ou — 1, ou est l'unité même.

DEMONSTRATION.

SOient A & B les générateurs du triangle, dont A soit le nombre pair, & soit premierement A pairement pair & plus grand que B : d'autant que le quarré de A est octonaire, & le quarré de B octonaire + 1, ou l'unité, leur difference qui est le côté impair du Triangle sera octonaire — 1 ; or le côté pair sera octonaire, puisqu'il est double de A B quaternaire : donc la somme de ces deux côtez en ce premier cas sera octonaire — 1. Que si A est moindre que B, son quarré qui est octonaire, étant ôté du quarré de B qui est octonaire + 1, le reste qui est le côté impair sera octonaire + 1, car cette difference ne peut être l'unité ; & le côté pair étant octonaire, la somme des deux sera octonaire + 1 en ce second cas. Prop. 4. Prop. 5.

Soit maintenant A impairement pair & plus grand que B, son quarré sera 4, ou octonaire + 4, duquel étant ôté le quarré de B qui est l'unité, ou un octonaire + 1, le reste qui est le côté impair sera 3 ou octonaire + 3, mais A étant 2 ou quaternaire + 2, A B sera 2 ou quaternaire + 2, & 2 A B côté pair sera octonaire + 4, donc en ce troisiéme cas la somme de ces deux côtez sera 7 ou octonaire + 7, c'est-à-dire octonaire — 1. Prop. 4. Prop. 5.

Que si A est moindre que B, ayant ôté 4 ou un octonaire + 4 quarré de A, d'un octonaire + 1 quarré de B, le reste sera 5, ou octonaire + 5 pour le côté impair, lequel étant joint au côté pair qui est octonaire + 4, la somme sera octonaire + 9, c'est-à-dire octonaire + 1, en ce quatriéme & dernier cas : donc la somme des deux côtez d'un triangle primitif est octonaire + ou — 1.

Pour la deuxiéme partie, ſoit au premier cas ci-deſſus, le côté impair moindre que le côté pair, d'autant qu'il eſt octonaire — 1; il eſt évident que ſi on l'ôte du côté pair qui eſt octonaire, le reſte ſera octonaire + 1, ou l'unité, & que ſi le côté impair eſt le plus grand, leur difference ſera octonaire — 1.

Au ſecond cas, ſi le côté pair eſt le plus grand, ayant ôté un octonaire + 1 d'un octonaire, le reſte ſera octonaire — 1, & ſi le côté pair eſt le moindre, leur difference ſera octonaire + 1, ou l'unité.

Au troiſiéme cas, ſi le côté pair eſt le plus grand, & qu'on ôte 3, ou un octonaire + 3, de 4 ou d'un octonaire + 4; le reſte ſera octonaire + 1, ou l'unité; & ſi le côté pair eſt le moindre, ôtant un octonaire + 4, d'un octonaire + 3, le reſte ſera octonaire — 1.

Au quatriéme & dernier cas, ſi le côté pair eſt le plus grand, qui eſt octonaire + 4, & qu'on en ôte l'impair qui eſt 5, ou octonaire + 5, le reſte ſera octonaire — 1, & ſi le côté pair eſt le moindre, leur difference ſera octonaire + 1, ou l'unité. Donc en tout Triangle rectangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

TRAITÉ DES TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES.

SECONDE PARTIE.

CETTE ſeconde Partie contient ſeulement deux Problêmes.

Le premier, eſt de trouver une multitude requiſe de Triangles Rectangles en nombres, dont chacun ait pour ſon aire celle d'un Triangle donné.

Le ſecond, eſt de trouver une multitude requiſe de Triangles Rectangles en nombres qui ayent une même aire.

Il eſt manifeſte que la ſolution du premier Problême ne ſe peut donner univerſellement en nombres entiers, comme le nombre 6 ne peut être l'aire que du ſeul Triangle 3, 4, 5. La raiſon eſt que le nombre 12, qui eſt le produit des deux côtez 3 & 4, & qui eſt le double de cette aire 6, ne peut être produit par d'autres nombres entiers, que par 1 & 12, & par 2 & 6, & que chacun de ces nombres 1 & 2 ne peut être le côté d'un Triangle Rectangle par la troiſiéme Conſéquence de la Propoſition vingtiéme : il eſt donc néceſſaire que les autres Triangles Rec-

tangles, dont l'aire sera égale à 6, ayent leurs côtez exprimez par des fractions. Il en est de même du nombre 30, qui ne peut être l'aire en nombres entiers que du seul triangle 5, 12, 13; mais on peut bien trouver un nombre entier qui soit l'aire de tant de Triangles rectangles qu'on voudra, dont les trois côtez soient des nombres entiers.

PREMIERE PROPOSITION.

LEMME,

Si le produit de deux nombres est mesuré par un quarré, & que chacun de ces nombres soit divisé par la racine de ce quarré, le produit des deux quotiens sera égal au premier produit divisé par le même quarré.

DEMONSTRATION.

SOient les deux nombres A C & B C, leur produit sera A B C^2; il est évident que si on divise chacun de ces nombres par C, on aura A & B, dont le produit A B est égal à A B C^2 divisé par C^2; ou bien si les deux nombres sont A & B C^2, leur produit sera comme devant A B C^2; & si on divise chacun de ces nombres A & B C^2 par C, sçavoir par la racine du quarré qui mesure leur produit, on aura $\frac{A}{C}$ & B C, dont le produit est A B comme devant.

PROPOSITION II.

Trouver une multitude requise de Triangles Rectangles en nombres, dont chacun ait pour son aire celle d'un Triangle donné.

SOit un Triangle Rectangle quelconque A, B, C, dont les moindres côtez soient A & B, son aire sera $\frac{1}{2}$ A B. On demande d'autres Triangles en telle multitude qu'on voudra, dont chacun ait $\frac{1}{2}$ A B pour son aire.

PREPARATION.

Ce Problême ſe réduit à trouver d'autres Triangles rectangles qui ne gardent pas la même proportion entre leurs côtez, & dont l'aire ſoit multiple de $\frac{1}{2}$ A B par un quarré.

La raiſon eſt que ſi on diviſe les côtez de chacun de ces Triangles par la racine du quarré, par lequel ſon aire eſt multiple de l'aire $\frac{1}{2}$ A B, le Triangle qui en proviendra aura $\frac{1}{2}$ A B pour ſon aire, puiſqu'elle eſt le produit d'un des cotez du Triangle par la moitié de l'autre.

On obſervera qu'aux Triangles ſuivans qui ſervent à la ſolution du Problême, on met au premier lieu le côté qui eſt la difference des deux quarrez qui compoſent l'hypotenuſe, ou qui eſt multiple de l'impair du primitif, quand le Triangle multiple n'a point de nombres générateurs, & on l'appelle toûjours le premier côté en cette deuxiéme Partie; on met enſuite le côté pair & l'hypotenuſe après. Et parce que l'operation ne fait pas voir ſi le premier côté eſt moindre que le ſecond, ou s'il eſt plus grand, c'eſt-à-dire ſi le côté A *eſt plus grand que* B, *ou s'il eſt moindre, on ſe ſert de la marque* $=$ *qui ſignifie difference. Ainſi les moindres côtez du Triangle donné étant* A B, *le côté impair du premier Triangle trouvé ſera* $A^2 = B^2$, *ſçavoir la difference entre* A^2 *&* B^2 *: de maniere que ſi* B *eſt plus grand que* A, *ce côté impair ſera* $B^2 - A^2$; *mais ſi* A *eſt plus grand que* B, *ce côté ſera* $A^2 - B^2$.

Et pour éviter la confuſion des caracteres, lorſque le premier côté ſe doit exprimer par le ſigne $=$ *ou l'hypotenuſe par le ſigne* $+$, *on ſe ſert d'un caractere nouveau pour les exprimer, & on met au-deſſous la valeur de ce caractere en petites lettres, comme on verra dans la ſuite.*

SOLUTION DU PROBLEME.

PREMIERE CONSTRUCTION.

QUE A, B, C soient les côtez d'un Triangle rectangle quelconque, je prens les deux côtez A & B pour les nombres générateurs d'un autre Triangle, qui sera $A^2 = B^2$, $2\,A\,B$, $A^2 + B^2$: & afin de ne point augmenter la multitude des caractéres, je mets D au lieu de $A^2 = B^2$; & parce que la somme des quarrez des deux côtez d'un Triangle rectangle est le quarré de l'hypotenuse, on prendra C^2 pour l'hypotenuse de ce Triangle qu'on mettra au lieu de $A^2 + B^2$, & le Triangle sera D, $2\,A\,B\,C^2$, & c'est le premier Triangle trouvé; & au-dessous de D on mettra $a^2 = b^2$, qui est la valeur de D.

Premier Triangle trouvé.

SECONDE CONSTRUCTION.

QUE l'hypotenuse C^2 & le côté pair de ce premier Triangle trouvé, sçavoir $2\,A\,B$, soient pris pour les nombres générateurs d'un second Triangle, ils formeront le Triangle $C^4 = 4\,A^2\,B^2$, $4\,A\,B\,C^2$, $4\,A^2\,B + C^4$.

Que l'hypotenuse $4\,A^2\,B^2 + C^4$ soit nommée E, à cause qu'elle a le signe +, suivant ce qui a été remarqué ci-devant.

Et parce qu'en tout Triangle rectangle la difference des quarrez de l'hypotenuse, & d'un des côtez est le quarré de l'autre côté, il s'ensuit que cet autre côté étant $C^4 = 4\,A^2\,B^2$, il sera égal à D^2, qui est le quarré du premier côté du premier Triangle trouvé. Le deuxiéme Triangle sera donc,

Deuxiéme Triangle trouvé.

D^2, $4\,A\,B\,C^2$, E
$4\,a^2\,b^2 + c^4$

Les caractéres $4\,a^2\,b^2 + c^4$ *qui sont au-dessous de* E, *marquent sa valeur.*

L'aire de ce second Triangle est $2\,A\,B\,C^2\,D^2$, qui étant divisée

divisée par $\frac{1}{2}$ A B aire du Triangle donné, on aura pour quotient 4 C^2 D^2 qui est un quarré ; sa racine est 2 C D, par laquelle le second Triangle D^2, 4 A B C^2, E étant divisé, on aura le Triangle $\frac{D}{2C}$, $\frac{2ABC}{D}$, $\frac{E}{2CD}$, dont l'aire est $\frac{1}{2}$ A B, sçavoir la moitié du produit de $\frac{D}{2C}$ par $\frac{2ABC}{D}$, qui est la même que celle du Triangle donné.

Or avec ce second Triangle on en fera un troisiéme par la premiere Construction, prenant pour ses générateurs les deux côtez de ce second, qui sont D^2 & 4 A B C^2 ; & si on prend le côté pair & l'hypotenuse de ce troisiéme Triangle pour les générateurs d'un autre Triangle, suivant la seconde Construction, on aura un quatriéme Triangle, & ainsi de suite.

Pour éclaircir cela davantage.

Que les trois côtez du second Triangle soient nommez F, G, E : si on prend les deux côtez F, G, pour les générateurs d'un troisiéme Triangle, suivant la premiere Construction, ce troisiéme Triangle sera $F^2 = G^2$, 2 F G, E^2, dont l'hypotenuse doit être un nombre quarré, parce que le Triangle F, G, E, tient ici lieu d'un Triangle donné, & ce troisiéme tiendra lieu d'un premier Triangle trouvé. De maniere que si on prend l'hypotenuse E^2, & le côté pair 2 F G de ce premier Triangle trouvé pour les générateurs d'un autre Triangle, il en viendra un quatriéme, dont le premier côté sera un nombre quarré, comme au deuxiéme Triangle ; & l'aire de ce quatriéme sera multiple par un quarré de 2 A B C^2 D^2, qui est l'aire du second Triangle, comme cette aire est multiple par un quarré de $\frac{1}{2}$ A B, aire du Triangle donné. Et par conséquent l'aire de ce quatriéme Triangle sera aussi multiple par un quarré de $\frac{1}{2}$ A B, & ainsi consécutivement on fera tant de Triangles qu'on voudra, dont l'aire sera multiple par un quarré de $\frac{1}{2}$ A B ; & les côtez de ces Triangles étant divisez par la racine de ce quarré, on aura des Triangles qui auront $\frac{1}{2}$ A B pour leur aire. Prop. 21

Voici huit Triangles, qui viennent du Triangle donné A, B, C, entre lesquels il y en a quatre, dont l'aire est multiple par un quarré de $\frac{1}{2}$ A B, sçavoir de l'aire du Triangle donné; & ces Triangles sont le deuxiéme, le quatriéme, le sixiéme, & le huitiéme, qui ont leur rang marqué par un nombre pair.

PREMIERE TABLE.

	Premier côté	Côté pair	Hypot.	
Triangle donné,	A,	B,	C,	aire $\frac{1}{2}$ A B
1er Triangle trouvé	D,	2 A B,	C^2	
	$a^2 = b^2$.			
2e Triangle	D^2,	$4\,ABC^2$,	E	aire $2\,ABC^2D^2$.
		$4a^2b^2 + c^4$		
3e Triangle	F,	$8\,ABC^2D^2$,	E^2.	
	$d^4 = 16a^2b^2c^4$.			
4e Triangle	F^2,	$16\,ABC^2D^2E^2$,	G	aire $8\,ABC^2D^2E^2F^2$.
		$64a^2b^2c^4d^4 + e^4$.		
5e Triangle	H,	$32\,ABC^2D^2E^2F^2$,	G^2.	
	$f^4 = 256a^2b^2c^4d^4e^4$.			
6e Triangle	H^2,	$64\,ABC^2D^2E^2F^2G^2$,	I	
			$1024a^2b^2c^4d^4e^4f^4 + g^4$.	
	aire $32\,ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2$.			
7e Triangle	K,	$128\,ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2$	I^2.	
	$h^4 = 4096a^2b^2c^4d^4e^4f^4g^4$.			

8e Triangle K^2, 256 $ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2$, L
$16384 a^2 b^2 c^4 d^4 e^4 f^4 g^4 h^4 + i^4$.
aire 128 $ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2K^2$,

On observera en ces huit Triangles, que l'hypotenuse & le premier côté sont alternativement marquez d'un seul caractére non quarré; & alors on met au-dessous de ce caractére sa valeur, exprimée en petites lettres, qui sont les mêmes que celles du côté pair du même Triangle, & qui viennent du Triangle précédent.

De même l'hypotenuse & le premier côté sont alternativement exprimez par un caractére quarré, où on remarquera que lorsque le premier côté est un nombre quarré, l'hypotenuse ne l'est pas; & alors ce Triangle a son aire multiple par un quarré de $\frac{1}{2}$ AB, *& on écrit cette aire après le Triangle. On pourroit obmettre les Triangles dont l'ordre est marqué par un nombre impair; sçavoir, le premier, le troisiéme, le cinquiéme, & le septiéme, dont l'aire n'est pas multiple par un quarré de l'aire* $\frac{1}{2}$ AB: *mais pour la facilité de la démonstration on les a compris dans cette Table.*

On voit assez par l'inspection de la Table qu'on la peut aisément continuer tant qu'on voudra, puisque le côté pair n'augmente à chaque Triangle que d'un caractere, à commencer au second Triangle trouvé, & mettant au devant des caracteres le double du nombre qui est devant le côté pair du Triangle précédent.

Pour ce qui est de l'aire, elle augmente de deux caractéres, qui ont la marque de quarré, à cause qu'on ne la met que de deux en deux Triangles, sçavoir à ceux dont l'ordre est marqué par un nombre pair. Ces deux caractéres sont ceux qui marquent le premier côté du même Triangle, & l'hypotenuse du Triangle précédent: chacun de ces caractéres a la marque de quarré; & on met au devant de tous les caractéres le quadruple du nombre qui est devant les caractéres de l'aire précédente.

Pour l'hypotenuse & le premier côté, on les marque aisément, mettant en leur lieu un caractére nouveau, en la façon qu'on le peut remarquer dans la Table précédente.

DEMONSTRATION.

Il est évident, par la premiere construction, que l'hypotenuse du premier Triangle trouvé est toujours le quarré de l'hypotenuse du Triangle précédent, qui est le Triangle donné ; que le côté pair de ce premier Triangle trouve est quadruple de l'aire du Triangle donné, puisqu'il est double du produit de ces côtez, & que l'aire n'est que la moitié de ce produit.

Et parce que le second Triangle est formé par l'hypotenuse du premier Triangle trouvé qui est toujours un nombre quarré & par le côté pair du même premier Triangle, qui est multiple par un quarré ; sçavoir par quatre de l'aire du Triangle donné, le côté pair de ce second Triangle sera multiple par un double quarré de l'aire du Triangle donné.

Premiere Construction.

Or le premier côté de ce second Triangle est toujours un nombre quarré. Donc l'aire de ce second Triangle, qui est la moitié du produit des deux côtez de ce Triangle, est multiple par un quarré de l'aire du Triangle donné.

Deuxiéme Construction.

Or tout ce qui arrive au premier & au second Triangle, ensuite & par le moyen du Triangle donné, arrive aussi au troisiéme & au quatriéme ensuite du second, parce que ce second Triangle pouvant être pris pour le Triangle donné, le troisiéme se forme de ce second, & le quatriéme du troisiéme en la même façon que le premier Triangle trouvé se forme du Triangle donné, & le second du même premier.

On doit faire le même jugement du cinquiéme & du sixiéme Triangle, qui se font par le moyen du quatriéme, & du septiéme & huitiéme qui viennent du sixiéme, & ainsi des autres suivans à l'infini.

De là s'ensuit que comme on a fait voir que l'aire du second Triangle est multiple par un quarré de l'aire du Triangle donné, aussi l'aire du quatriéme sera multiple par un quarré de l'aire du second, & l'aire du sixiéme de celle du quatriéme, & ainsi de suite.

Donc l'aire de tous ces Triangles, dont l'ordre est côté par un nombre pair, sçavoir le deuxiéme, le quatriéme, le sixiéme & les autres ensuite ont leur aire multiple par un quarré de l'aire du Triangle donné, ce qui étoit à démontrer.

Il est aisé de faire voir aussi que les Triangles qui viennent du Triangle donné par la méthode précédente ne gardent pas une même proportion ou raison entre leurs côtez, c'est-à-dire, que leurs côtez ne sont pas multiples des côtez du Triangle donné, ni de ceux qui viennent ensuite; car si on suppose que le Triangle donné soit primitif, le premier Triangle qu'il faut trouver ayant pour ces générateurs les côtez du Triangle donné, qui sont premiers entre eux, la difference de leurs quarrez n'aura point de commune mesure avec aucun d'eux, ni avec le double de leur produit. Or cette difference est le premier côté de ce premier Triangle, & le double du produit des côtez en est le côté pair: donc les côtez de ce premier Triangle seront aussi premiers entr'eux, & par conséquent Prop. 13. avec l'hypotenuse. De même, parce que l'hypotenuse & le I. Partie. côté pair du premier Triangle trouvé sont les générateurs du second Triangle, puisque ces nombres sont premiers entre eux, & l'un pair & l'autre impair; la somme de leurs quarrez, qui est l'hypotenuse de ce second Triangle, n'aura point de commune mesure avec aucun de ces nombres générateurs ni avec leur produit, ni le double de ce produit, cette somme étant un nombre impair. Prop. 13. Donc l'hypotenuse de ce second Triangle n'aura point I. Partie. de commune mesure avec le côté pair, qui est ce double produit, ni par conséquent avec le premier côté.

Donc ce second Triangle sera encore primitif ; & ainsi ses côtez ne garderont pas entre eux la même proportion que ceux du Triangle donné, ni les autres Triangles qui seront formez de ce second, qui peut tenir lieu du Triangle donné.

Or si les côtez de ces Triangles formez par celui qui a été donné, ne gardent pas entre eux la même proportion que les côtez du donné, leurs multiples ne la garderont pas aussi, parce que les Triangles multiples gardent toujours la même proportion entre leurs côtez que leurs primitifs. Et ainsi cela se trouvera véritable, tant aux primitifs qu'aux multiples, quoique les côtez des multiples ayent une commune mesure.

Il a été nécéssaire de mettre cette condition aux Triangles pour faire qu'un même nombre soit l'aire de plusieurs Triangles ; parce que comme tout Triangle multiple a son aire multiple par un quarré de celle de son primitif, & que la racine de ce quarré est le nombre par lequel le Triangle primitif a été multiplié ; si les Triangles étoient multiples d'un même Triangle, lorsqu'on viendroit à diviser le Triangle multiple par cette racine, le Triangle qui en viendroit seroit le primitif donné, & ainsi on n'auroit que ce même Triangle, & on ne satisferoit pas à la proposition. Ainsi le Triangle donné étant 3, 4, 5, ce ne seroit pas assez de prendre les Triangles 6, 8, 10, ou 9, 12, 15, pour faire des Triangles qui eussent une même aire, quoique l'aire de chacun de ces deux Triangles soit multiple par un quarré de celle de 3, 4, 5, parce que leurs côtez gardent entre eux la même proportion que les côtez du Triangle donné, 3, 4, 5.

Prop. 31. I. Partie.

Mais pour revenir au Problême principal, puisque chacune des aires trouvées par la Méthode précédente est multiple par un quarré de celle du Triangle donné, si on divise chacune d'elles par l'aire du Triangle donné, on aura un quarré par la racine duquel divisant le Triangle

dont on considére l'aire, on aura un Triangle qui aura une même aire que le Triangle donné A, B, C, & c'est ce qui étoit requis. En voici l'opération. Prop. 1.

L'aire du second Triangle trouvé, qui est en la premiere Table, est $2\ A B C^2 D^2$; qu'elle soit divisée par $\frac{1}{2}$ A B, aire du Triangle donné, le quotient sera $4\ C^2 D^2$ qui est un quarré; sa racine est 2 C D, par laquelle on divisera le second Triangle D^2, $4\ A B C^2$, E, & on aura le Triangle $\frac{D}{2C}$, $\frac{2ABC}{D}$, $\frac{E}{2CD}$, dont l'aire est $\frac{1}{2}$ A B, comme au Triangle donné.

L'aire du quatriéme Triangle est $8\ A B C^2 D^2 E^2 F^2$, qui étant divisée par $\frac{1}{2}$ A B, donne $16\ C^2 D^2 E^2 F^2$ quarré de 4 C D E F, qui divisant le quatriéme Triangle, il en viendra le Triangle $\frac{F}{4CDE}$, $\frac{4ABCDE}{F}$, $\frac{G}{4CDEF}$, dont l'aire est aussi $\frac{1}{2}$ A B.

L'aire du sixiéme Triangle étant divisée par $\frac{1}{2}$ A B donne $64\ C^2 D^2 E^2 F^2 G^2 H^2$, quarré de 8 C D E F G H, qui divisant le sixiéme Triangle, donne le Triangle $\frac{H}{8CDEFG}$, $\frac{8ABCDEFG}{H}$, $\frac{I}{8CDEFGH}$, dont l'aire est $\frac{1}{2}$ A B, comme au Triangle donné.

Enfin l'aire du huitiéme Triangle étant divisé par $\frac{1}{2}$ A B, donne $256\ C^2 D^2 E^2 F^2 G^2 H^2 I^2 K^2$, dont la racine est 16 C D E F G H I K, qui divisant le huitiéme Triangle donne le Triangle $\frac{K}{16CDEFGHI}$, $\frac{16ABCDEFGHI}{K}$, $\frac{L}{16CDEFGHIK}$ dont l'aire est aussi $\frac{1}{2}$ A B.

On a donc cinq Triangles, compris le Triangle donné, dont l'aire est $\frac{1}{2}$ A B, qui est celle qui avoit été proposée. Voici les cinq Triangles en la Table suivante.

SECONDE TABLE

Qui ne contient que des Triangles dont l'aire est aussi égale à celle du Triangle donné, qui y est aussi compris.

1er Triangle,	A,	B,	C.
2e	$\frac{D}{2C}$,	$\frac{2ABC}{D}$,	$\frac{E}{2CD}$,
3e	$\frac{F}{4CDE}$,	$\frac{4ABCDE}{F}$,	$\frac{G}{4CDEF}$.
4e	$\frac{H}{8CDEFG}$,	$\frac{8ABCDEFG}{H}$,	$\frac{I}{8CDEFGH}$.
5e	$\frac{K}{16CDEFGHI}$,	$\frac{16ABCDEFGHI}{K}$	$\frac{L}{16CDEFGHIK}$

Aire commune $\frac{1}{2}$ A B.

Et pour réduire ces caractéres en nombres, si on prend le Triangle 3, 4, 5, pour A, B, C, le second Triangle de cette seconde Table sera $\frac{7}{10}$, $\frac{120}{7}$, $\frac{1201}{70}$, & les deux moindres côtez du troisiéme Triangle de la même seconde Table seront $\frac{1437599}{168140}$, & $\frac{2017680}{1437599}$.

Cela sera facile à calculer, si on prend la valeur de chaque caractére, & par ce moyen on trouvera que le second Triangle de la premiere Table, sçavoir D^2, 4 ABC^2, E, est 49, 1200, 1201, dont l'aire 29400 étant divisée par 6, sçavoir par l'aire du Triangle donné, 3, 4, 5, on

on aura 4900, quarré de 70, qui eſt le nombre par lequel doit être diviſé le Triangle 49, 1200, 1201, & le quotient ſera le Triangle $\frac{7}{10}$, $\frac{120}{7}$, $\frac{1201}{70}$, qui eſt la valeur du Triangle $\frac{D}{2C}$, $\frac{2ABC}{D}$, $\frac{E}{2CD}$, & l'aire de ce Triangle eſt 6.

De même on aura la valeur du troiſiéme Triangle de la ſeconde Table, ſçavoir de $\frac{F}{4CDE}$, $\frac{4ABCDE}{F}$, $\frac{G}{4CDEF}$, correſpondant au quatriéme de la premiere Table qui eſt F^2, $16\,A\,B\,C^2\,D^2\,E^2$, G, dont les côtez vaillent 206669088480I, 339252715200, 2094350404801, ſon aire eſt $8\,A\,B\,C^2\,D^2\,E^2\,F^2$, qui vaut 350565247073914830837600, qui étant diviſée par 6, qui eſt l'aire du Triangle donné, on aura 58427541178985805139600, quarré de 241717895860, qui eſt le diviſeur ; & ce nombre étant pris ſuivant ce qui ſe pratique ordinairement en Algebre, pour le dénominateur commun des trois côtez du Triangle 206669088 &c. qui eſt le quatriéme de la premiere Table, on aura $\frac{2066690884801,\ 339252715200,\ 2094350404801}{241717895860}$, qui eſt la valeur du troiſiéme Triangle de la ſeconde Table marquée par les caractéres $\frac{F}{4CDE}$, $\frac{4ABCDE}{F}$, $\frac{G}{4CDEF}$, & diviſant ce Triangle, ſçavoir le quatriéme de la premiere Table par 241717895860, on trouvera la valeur en fractions, qui réduites aux moindres termes, donnent le Triangle $\frac{1437599}{168140}$, $\frac{2017680}{1437599}$, $\frac{2094350404801}{241717895860}$.

On pourroit trouver quelque difficulté à réduire ces fractions, parce que le nombre par lequel le Triangle doit être diviſé, ne meſure aucun des côtez du Triangle, encore que ce diviſeur ait une commune meſure avec chacun des deux moindres côtez du même Triangle, quoique ce ne ſoit pas la même en chacun d'eux ; car la meſure commune de ce diviſeur avec le premier côté eſt 1437599 ; mais la meſure avec le côté pair eſt 168140, & ces deux nombres 1437599 & 168140 ſont premiers entre eux.

On trouvera aiſément ces communes meſures, en

considérant que le premier côté du Triangle, sçavoir 2066690884801 est F^2, dont la racine est 1437599. Donc pour mettre aux moindres termes la fraction $\frac{2066690884801}{241717895860}$, qui est le premier côté du quatriéme Triangle de la premiere Table, divisé par 241717895860, qui est le diviseur commun de ce Triangle, on divisera le numérateur & le dénominateur de cette fraction par 1437599, racine de son numérateur, & on aura $\frac{1437599}{168140}$ pour le premier côté réduit aux moindres termes; & divisant le côté pair $\frac{339252715200}{241717895860}$ du même quatriéme Triangle de la premiere Table, divisé par le diviseur commun 241717895860, par 168140, qui est le dénominateur de la fraction $\frac{1437599}{168140}$, qui exprime le premier côté, on aura $\frac{2017680}{1437599}$ pour le côté pair du même Triangle réduit à ses moindres termes.

Pour ce qui est de l'hypotenuse, elle n'a point de commune mesure avec le nombre par lequel on doit diviser le Triangle.

Or pour plus grande facilité, on reprend ici la premiere Table, & on y exprime la valeur de chaque côté des Triangles, par les nombres qui sont au-dessus, & même la valeur de chaque petit caractére par un nombre qu'on met au-dessous, comme on le voit en la Table suivante.

TROISIE'ME TABLE.

	3	4	5
Triangle donné	A,	B,	C.
	7,	24,	25,
1er Triangle trouvé	D,	2 A B,	C^2,
	$a^2 - b^2$	3, 4,	
	9, 16.		

49, 1200, 1201, 29400,
2^e D^2, $4ABC^2$, E, aire $2ABC^2D^2$,
3, 4, 25, $4a^2b^2+c^4$, 3, 4, 25, 49.
9, 16, 625.

1437599, 117600, 1442401,
3^e F $8ABC^2D^2$, E^2,
$d^4 = 16a^2b^2c^4$, 3, 4, 25, 49,
2401, 9, 16, 625,
1440000.

2066690884801, 339252715200, 2094350404801,
4^e F^2, $16ABC^2D^2E^2$, G,
3, 4, 25, 49, 1442401, $64a^2b^2c^4d^4+e^4$,
9, 16, 625, 240, 120805206448 01,
13829760000
aire 3505652470739148308376 00,
$8ABC^2D^2E^2F^2$
3, 4, 25, 49, 1442401, 2066690884801.

On a obmis les autres Triangles, parce que ceux-ci suffisent pour faire voir la forme du calcul.

Le nombre 1440000, qu'on a mis au-dessous de $16a^2b^2c^4$, est le produit de ces quatre nombres, c'est-à-dire, de 16, 9, 16, 625; duquel produit si on ôte d^4, ou 2401, il reste 1437599 pour la valeur du caractére F. On a fait de même à l'égard du dernier côté G, car le nombre 13829760000 est le produit des cinq nombres 64, 9, 16, 625, 2401, lequel ajoûté à e^4, ou 2080520644801, fait la valeur de G, sçavoir 2094350404801.

La maniere de ce calcul sera facile à ceux qui feront ré-

flexion ſur les deux Conſtructions de ce Triangle : car puis qu'on prend les deux moindres côtez du Triangle donné pour les générateurs du premier Triangle qu'il faut trouver, le premier côté de ce premier Triangle ſera 7 (ſuppoſant que le Triangle donné ſoit 3, 4, 5,) ſçavoir la difference de 9 & de 16, quarrez des côtez 3 & 4, & l'hypotenuſe du même Triangle ſera 25, puiſque c'eſt le quarré de l'hypotenuſe du Triangle donné. De même au ſecond Triangle 49, 1200, 1201, on voit par la ſeconde Conſtruction qu'il faut prendre l'hypotenuſe & le côté pair du premier Triangle trouvé pour les générateurs du ſecond, & ainſi que le premier côté de ce ſecond Triangle eſt toûjours le quarré du premier côté du premier Triangle ; & parce que D, qui eſt ce côté, eſt 7, D^2 ſera 49.

Pour ce qui eſt de l'hypotenuſe E, comme elle eſt la ſomme des quarrez de C (25) & de 2 A B (24) leſquels quarrez ſont 625 & 576, ce ſera 1201.

De même, on trouvera que le côté pair du même Triangle, ſçavoir $4 A B C^2$ eſt 1200, puiſqu'il eſt le double du produit de 24 par 25, côtez du premier Triangle.

On trouvera en la même ſorte les côtez du troiſiéme

2. *Conſtruction.* Triangle F, $8 ABC^2 D^2$, E^2 : car les nombres générateurs de ce Triangle étant D^2 (49) & $4 A B C^2$ (1200) ſçavoir les deux moindres côtez du ſecond Triangle, la difference des quarrez de ces deux nombres 49 & 1200, qui ſont 2401, & 1440000, eſt le premier côté F, dont la valeur eſt 1437599, & l'hypotenuſe E^2 étant la ſomme des mêmes quarrez, ſera 1442401, qui eſt auſſi le quarré de E (1201) hypotenuſe du Triangle précedent, ſçavoir du deuxiéme.

Le côté pair $8 A B C^2 D^2$, étant le double du produit de D^2 (49) par $4 A B C^2$ (1200) ſera 117600.

Enfin, pour avoir le quatriéme Triangle, on prendra

3. *Conſtruction.* pour générateurs les nombres 117600, & 1442401, ſçavoir le côté pair, & l'hypotenuſe du troiſiéme Triangle ;

les quarrez de ces nombres ſont 13829760000, & 2080520644801, dont la ſomme eſt l'hypotenuſe G (2094350404801); & la difference des mêmes quarrez eſt le premier côté 2066690884801, qui eſt auſſi le quarré de 1437599, premier côté du Triangle précedent, ſçavoir F^2, & le côté pair eſt 339252715200, ſçavoir le double du produit des deux nombres générateurs 117600, & 1442401.

Les aires ſe trouvent par la voye ordinaire.

PROPOSITION III.

PROBLEME II.

Trouver une multitude requiſe de Triangles Rectangles en nombres entiers qui ayent une même aire.

ON demande, par exemple, cinq Triangles en nombres entiers, chacun deſquels ait un même nombre pour ſon aire.

CONSTRUCTION.

Soit pris un Triangle rectangle quelconque A, B, C; & ſoient faits des Triangles en la multitude requiſe, dont l'aire ſoit multiple par un quarré de l'aire de ce Triangle, par la maniere dont on s'eſt ſervi pour faire ceux de la premiere Table ci-devant. Or on n'a beſoin d'en faire qu'un moins de ce qui eſt requis, à cauſe de celui dont on ſe ſert pour faire les autres: ainſi, pour avoir cinq Triangles qui ayent une même aire, il ſuffira d'en faire quatre, parce que le Triangle donné fait le cinquiéme.

SOLUTION.

Soient faits par la méthode précedente quatre Triangles, dont l'aire ſoit multiple par un quarré de celle du Triangle qu'on aura choiſi pour faire les autres, comme ceux de la premiere Table; on en fera comme s'enſuit

cinq, dont chacun aura pour ſon aire celle du plus grand Triangle. On diviſera la plus grande aire de tous ces Triangles, qui eſt celle du dernier, par l'aire de chacun des quatre autres, y compris le Triangle qui a ſervi à faire tous les autres; & on aura quatre quotiens, chacun deſquels ſera un nombre quarré, par la concluſion de la démonſtration de la Propoſition précedente : on prendra la racine de chacun de ces quarrez, & chacune de ces racines eſt le nombre par lequel on doit multiplier le Triangle, dont eſt venu le quarré de cette racine par la diviſion qu'on a faite.

La Table ſuivante contient les cinq Triangles, dont l'aire eſt multiple de $\frac{1}{2}$ A B (6) par un quarré, y compris le premier, A, B, C, dont l'aire eſt $\frac{1}{2}$ A B.

QUATRIÉME TABLE.

1er Tr.	A,	B,	C,	aire $\frac{1}{2}$ A B.
2e	D^2,	4 ABC^2,	E,	aire 2 ABC^2D^2.
3e	F^2,	16 $ABC^2D^2E^2$,	G,	aire 8 $ABC^2D^2E^2F^2$.
4e	H^2,	64 $ABC^2D^2E^2F^2G^2$,	I,	aire 32 $ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2$.
5e	K^2,	256 $ABG^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2$,	L,	aire 128 $ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2K^2$.

Et ces Triangles ſont le deuxiéme, le quatriéme, le ſixiéme, & le huitiéme de la premiere Table, avec le Triangle donné; & de ces quatre Triangles on en fera comme s'enſuit quatre autres, dont chacun aura pour ſon aire celle du dernier & plus grand de ces Triangles.

Pour faire qu'un multiple du Triangle A, B, C, ait la même aire que le cinquiéme & dernier de la Table précedente, ſçavoir de la quatriéme, laquelle aire eſt 128 $ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2K^2$, on diviſera cette aire par $\frac{1}{2}$ AB, qui eſt l'aire du Triangle donné A, B, C; le quotient eſt 256 $C^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2K^2$, qui eſt un quarré; ſa racine eſt 16 CDEFGHIK, par laquelle multipliant le
I. Triangle. Triangle A, B, C, on aura le Triangle 16 ACDEFGHIK, 16 BCDEFGHIK, 16 C^2DEFGHIK, dont l'aire eſt 128 $ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2K^2$ égale à celle

du cinquiéme & dernier Triangle de la quatriéme Table.

Cette même aire du cinquiéme Triangle de la quatriéme Table étant divisée par 2 A B C^2D^2, qui est l'aire du deuxiéme Triangle de la quatriéme Table, donne 64 $E^2F^2G^2H^2I^2K^2$, dont la racine est 8 E F G H I K, par laquelle multipliant le deuxiéme Triangle D^2, 4 ABC^2, E, on aura le Triangle 8 D^2EFGHIK, 32 ABC^2EFGHIK, 8 E^2 F G H I K, qui est le deuxiéme Triangle, dont l'aire est la même que celle du cinquiéme & dernier Triangle. 2. *Triangle.*

Cette même aire du cinquiéme Triangle étant divisée par 8 $ABC^2D^2E^2F^2$, qui est l'aire du troisiéme Triangle de la quatriéme Table, donne 16 $G^2H^2I^2K^2$, dont la racine est 4 G H I K, par laquelle multipliant ce troisiéme Triangle F^2, 16 A B $C^2D^2E^2$, G, on aura le troisiéme Triangle, qui a la même aire que le cinquiéme, ce Triangle est 4 F^2 G H I K, 64 $ABC^2D^2E^2$ G H I K, 4G^2HIK. 3. *Triangle.*

Enfin, la même aire du cinquiéme Triangle étant divisée par 32 $ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2$, qui est l'aire du quatriéme Triangle de la quatriéme Table, sçavoir du Triangle H^2, 64 $ABC^2D^2E^2F^2G^2$, I, on aura 4 I^2K^2, dont la racine est 2 I K, par laquelle multipliant ce quatriéme Triangle, on aura le quatriéme Triangle requis, 2 H^2I K, 128 $ABC^2D^2E^2F^2G^2$I K, 2 I^2K, dont l'aire est la même qu'aux précedens. 4. *Triangle.*

Cette aire est 128 $ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2K^2$, qui est la même que celle du cinquiéme & dernier Triangle de la quatriéme Table. Ce dernier Triangle est K^2, 256 $ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2$, L, qui est le cinquiéme de ceux qui ont une même aire. 5. *Triangle.*

Voici quelques Triangles en nombres entiers, qui ont une même aire. On n'a calculé que les trois premiers, pour éviter le calcul de si grands nombres, qui n'apporteroit aucune utilité; & l'aire commune de ces Triangles est celle du troisiéme de la quatriéme Table, & non pas celle du cinquiéme Triangle de la même quatriéme Table.

1er Triangle	72515368758o,	966871583440,	1208589479300.
2e	169202527102,	414373535760o,	4147188470398.
3e	2066690884801,	339252715200,	2094350404801.

Aire commune 35056524707391483083760o.

Pour faire qu'un Triangle multiple de 3, 4, 5, ait la même aire, que celle du troisiéme, ſçavoir 350565, &c. je diviſe cette aire par 6, qui eſt celle de 3, 4, 5; le quotient eſt 5842754117898580513960o, quarré de 24171789586o, par lequel nombre on multiplie le Triangle 3, 4, 5, pour avoir le premier Triangle 72515 &c. qui a la même aire que le troiſiéme Triangle, ſçavoir 35056, &c.

Cette même aire du troiſiéme Triangle étant diviſée par 29400, aire du deuxiéme Triangle D², 4 A B C², E, dont la valeur eſt 49, 1200, 1201, donne 1192398799571138804, qui eſt un quarré, dont la racine eſt 3453112798, par laquelle multipliant le deuxiéme Triangle 49, 1200, 1201, on aura le deuxiéme Triangle ci-deſſus 169202, &c. qui a la même aire que le troiſiéme 2066690, &c. dont le calcul eſt ci-devant à la fin de la deuxiéme Propoſition de cette ſeconde Partie.

REMARQUE.

Cette méthode eſt bien facile : toutefois elle a une incommodité, qui eſt qu'on paſſe incontinent à de fort grands nombres, comme on le voit en l'exemple précedent, auquel, quoiqu'on ait choiſi le moindre de tous les Triangles, ſçavoir 3, 4, 5, pour fondement du calcul; néanmoins dès qu'on vient à trois Triangles qui ont une même aire, ils ont déja leurs côtez de douze ou treize chiffres, & l'aire en a juſques à vingt-quatre; & ſi on avoit beſoin d'une plus grande multitude de Triangles, qu'on voulût exprimer par des nombres, & non point par des caractéres qui ſignifiaſſent ces nombres, leur grandeur

en

en rendroit le calcul si laborieux & si ennuyeux, que cela feroit perdre l'envie de s'y appliquer.

Or pour éviter ce travail, on peut se servir d'une autre méthode, qui donne la même quantité de Triangles qui ont une même aire, mais qui sont beaucoup moindres que ceux qu'on trouveroit par la méthode ci-dessus. Il est vrai qu'il faut se servir de quelque adresse pour les trouver, parce que comme leur recherche ne dépend pas d'une suite nécessaire, qui soit connuë, il les faut découvrir par induction, en examinant quelquefois par le calcul si quelques-uns des nombres qu'on trouve sont les aires d'un ou de plusieurs Triangles. Voici quelques régles de cette méthode, & quelques exemples de Triangles ayant une même aire, qui ont été trouvez par son moyen.

I. REGLE.

Si l'aire d'un Triangle primitif est mesurée par un quarré, & qu'étant divisée par ce quarré, le quotient soit l'aire d'un Triangle primitif, on pourra par ce quotient faire deux Triangles rectangles qui auront une même aire : ainsi 1320, aire du Triangle 48, 55, 73, étant divisé par 4, donne 330, aire du Triangle 11, 60, 61, & ce nombre 330, étant multiplié par 2, racine de 4, donne le Triangle 22, 120, 122, dont l'aire est aussi 1320.

II. REGLE

Si on multiplie par un quarré l'aire d'un Triangle, & que le produit soit l'aire d'un Triangle primitif, on en fera deux Triangles qui auront une même aire; comme si 546, aire du Triangle 13, 84, 85, est multiplié par 9, on aura 4914, qui est l'aire du Triangle primitif 27, 364, 365; & multipliant le premier Triangle 13, 84, 85, par 3 racine de 9, on aura le Triangle 39, 252, 255, dont l'aire est aussi 4914.

TABLE DE PLUSIEURS COUPLES de Triangles qui ont une même aire.

210 est l'aire des deux Triangles primitifs 20, 21, 29, & 12, 35, 37.

2730 est l'aire des deux primitifs 28, 195, 197, & 60, 91, 109.

7980, des deux primitifs 40, 399, 401, & 95, 168, 193.

71610, des deux 132, 1085, 1093, & 341, 420, 541.

85470, des deux 140, 1221, 1229, & 259, 660, 709.

106260, des deux 280, 759, 809, & 385, 552, 673.

114114, des deux 77, 2964, 2965, & 364, 627, 725.

2042040, des deux primitifs 528, 7735, 7753, & 1001, 4080, 4201.

Par des opérations à peu près semblables, on trouvera trois Triangles qui auront une même aire en nombres entiers, par le moyen de deux qu'on aura déja trouvez : car en multipliant par un quarré une aire qui est commune à deux Triangles primitifs, s'il se rencontre que le produit soit l'aire d'un Triangle primitif, on en fera trois Triangles qui auront une même aire, ou bien si on multiplie l'aire d'un primitif, & que le produit soit l'aire de deux Triangles.

EXEMPLE.

210, aire des deux Triangles 20, 21, 29; 12, 35, 37, multiplié par quatre, donne 840, aire du primitif 15, 112, 113 : & multipliant ces deux mêmes Triangles par 2, racine de 4, on aura 40, 42, 58, & 24, 70, 74, dont l'aire est aussi 840.

Que si l'aire d'un Triangle primitif est divisée par un quarré, & que le quotient soit l'aire d'un Triangle primitif, & que cette aire étant multipliée par un quarré, le produit soit aussi l'aire d'un Triangle primitif, on en fera trois Triangles qui auront une même aire; & s'il se

rencontre que l'une de ces aires serve à deux Triangles primitifs, la plus grande servira à quatre Triangles.

TABLE DE PLUSIEURS TERNAIRES de Triangles qui ont une même aire.

56,	390,	394,		80,	798,	802,	
105,	208,	233,	aire 10920.	105,	608,	617,	aire 31920.
120,	182,	218,		190,	336,	386,	
385,	1488,	1537,		855,	2640,	2775,	
264,	2170,	2186,	aire 286440	792,	2850,	2958,	aire 1128600
682,	840,	1082,		1485,	1520,	2125,	
455,	4128,	4153,		462,	2520,	2562,	
624,	3010,	3074,	aire 939120	490,	2376,	2426,	aire 582120
1118,	1680,	2018,		1008,	1155,	1533,	
1380,	19019,	19069,		528,	7735,	7753,	
3059,	8580,	9109,	aire 13123110	1001,	4080,	4201,	aire 2042040
4485,	5852,	7373,		1430,	2856,	3194,	

Ces trois, dont l'aire est 13123110, sont les moindres entre les primitifs qui ayent une même aire.

Pour trouver plus de trois Triangles qui ayent une même aire comme 4, 5, 6, &c. on peut se servir de quelques regles concernant les parties aliquotes, les combinaisons, &c. par le moyen desquelles on pourra connoître si un nombre est l'aire de quelque Triangle rectangle : mais comme les opérations en sont longues & difficiles, on s'est restraint à ne donner ici que quelques uns de ces Triangles, qu'on a trouvez en se servant de ces regles.

TABLE DE TROIS QUATERNAIRES
de Triangles qui ont une même aire.

111,	6160,	6161,	
231,	2960,	2969,	aire 341880
280,	2442,	2458,	
518,	1320,	1418,	

Ces quatre Triangles sont les moindres de tous ceux qui ont une même aire en nombre entier.

3289,	31920,	32089,	
2760,	38038,	38138,	aire 52492440
6118,	17160,	18218,	
8970,	11704,	14746,	

935,	17472,	17497,	
1056,	15470,	15506,	aire 8168160
2002,	8160,	8402,	
2860,	5712,	6388,	

Pour faire ces quatre derniers Triangles on a pris 2042040, qui est l'aire des deux Triangles primitifs 528, 7735, 7753, & 1001, 4080, 4201, laquelle divisée par quatre, donne 510510, aire du primitif 715, 1428, 1597, qui étant multipliée par 2, racine de 4, donne 1430, 2856, 3194, qui a pour son aire 2042040, quadruple de 510510; & multipliant par 4 cette aire 2042040, on a 8168160, aire du primitif 935, 17472, 17497; & multipliant par 2 les trois Triangles cy-dessus, qui ont 2042040 pour leur aire, on aura les quatre cy-dessus, qui ont 8168160 pour leur aire.

TABLE DE QUATRE QUINAIRES de Triangles qui ont une même aire.

2805,	52416,	52491,	
3168,	46410,	46518,	
6006,	24480,	25206,	aire 73513440
5236,	28080,	28564,	
8580,	17136,	19164,	

Si cette aire servoit à quelque Triangle primitif, elle seroit l'aire de six Triangles.

On ne met point les hypotenuses aux quinze Triangles suivans.

67234957,	56510961360,	
713346495,	5326320496,	
1141354392,	3328950310,	aire 18997560285341307 60.
1902257320,	1997370186,	
1389419029,	2734604880,	

46800620 14,	39335907307 20,	
496543 16490,	370752229792,	
79446906384,	231720143620,	aire 92047242787325874350 40.
132411510540,	139032086172,	
180439977829,	102025331520,	

3253383668734,	6403193472480,	
4454216308720,	4676927124156,	
2672529785232,	7794878540260,	aire 104160225355552917327201 60.
1670331115770,	1247180566 4416,	
6069855166717,	3432049776960,	

EXEMPLE DE SIX TRIANGLES qui ont une même aire.

3868273182124726,	7613397038778720,	8539751277503926,
3177637914640848,	9268110584369140,	9797716903475948,
7217057793226513,	4080707184805440,	8290844005220113,
1986023696650530,	1482987693490624,	1496137851476 7326,
1871884403739 58,	15733182845 6607840,	15733193981201 5558,
5296063191068080,	5560866350621484,	7679291627048716,

Aire commune 1472534979498776258367287731 5360.

Tous ces Triangles ſont premiers entr'eux, c'eſt-à-dire, qu'ils ne ſont point multiples de quatre, de cinq, ou de ſix autres Triangles ; & ſi on les multiplie par quelque nombre que ce ſoit, on aura d'autres Triangles qui auront auſſi une même aire.

DES
QUARREZ
OU
TABLES MAGIQUES.

DES

QUARREZ

OU

TABLES MAGIQUES.

ON appelle Quarré Magique celui qui étant divisé par cellules en quantité répréſentée par un nombre quarré, & les cellules étant remplies de nombres conſécutifs, ou qui ſoient en même progreſſion arithmétique, contient pareille ſomme en chacune de ſes lignes, de quelque façon qu'on les puiſſe prendre. Exemple :

Le quarré A, B, C, D, 16, eſt diviſé en 16 cellules, & ces cellules ſont remplies des nombres conſécutifs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. jusqu'à 16 : & ces nombres ſont diſpoſez d'un tel ordre dans les cellules, que les nombres de chaque ligne étant aſſemblez, font une ſomme égale ; ſoit qu'on

A | | | B

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

C | | | D

prenne les lignes en long, comme 1, 15, 14, 4, | 12, 6, 7, 9, | 8, 10, 11, 5, | & 13, 3, 2, 16, | ou qu'on les prenne de haut en bas, pour avoir 1, 12, 8, 13, | 15, 6, 10, 3, | 14, 7, 11, 2, | 4, 9, 5, 16, | ou enfin ſi on conſidere les deux diagonales ou lignes tranſverſales, 1, 6, 11, 16, & 4, 7, 10, 13, la & ſomme de chacune de ces lignes eſt 34.

La ſomme des nombres qui ſont en chaque ligne ne

ſe peut pas prendre à diſcrétion ; mais elle eſt neceſſaire à chaque figure : & voici le moyen de ſçavoir quelle elle eſt.

La ſomme du plus grand & du moindre nombre de ceux qu'on veut employer dans les cellules du quarré magique étant multipliée par la moitié du côté du quarré, donne la ſomme de chaque ligne. Ainſi au quarré qui a 16 cellules, ſi le moindre nombre eſt 1, & le plus grand 16, & qu'on multiplie leur ſomme 17 par 2, qui eſt la moitié de 4, côté de 16, on aura 34 pour le nombre requis.

Que ſi le quarré magique eſt impair, on multipliera la moitié de la ſomme des deux nombres extrêmes par le côté du quarré. Ainſi quand on aura rempli le quarré qui a 25 cellules, ſi le moindre des nombres eſt 1, & le plus grand 25, chaque ligne contiendra 65 ; qui ſe trouve ajoutant les termes extrêmes 25 & 1 ; & prenant la moitié de 26, qui eſt leur ſomme, & on aura 13, qui étant multiplié par 5, côté du quarré 25, donnera 65.

Si les nombres dont on ſe ſert pour remplir les cellules ne commençoient pas par l'unité, ou qu'ils euſſent autre difference entre eux que l'unité ; on ne laiſſeroit pas de ſe ſervir des regles cy-deſſus pour trouver la ſomme des nombres de chaque ligne. Exemple : Que les nombres dont on veut remplir les cellules du quarré de 4, qui eſt 16, ſoient 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31 ; 33. J'aſſemble les extrêmes 3, & 33, pour avoir 36, qui multiplié par 2, moitié de 4, côté du quarré 16, donnera 72 pour la ſomme des nombres de chaque ligne.

Si les extrêmes des nombres qu'on employe au quarré 16, étoient 1, & 31, je prendrois de même la ſomme qui eſt 32 ; qui étant multipliée par le même 2, donneroit 64 pour la ſomme des nombres de chaque ligne.

De même ſi pour remplir les cellules du quarré 9, qui a trois de côté, on ſe ſervoit de 4, 7, 10, 13, 16, 19,

22, 25, 28, je prendrois la ſomme des extrêmes 4 & 28, qui eſt 32, (laquelle ſomme eſt toujours un nombre pair, lors qu'il s'agit des quarrez impairs) la moitié de 32 eſt 16, qui multiplié par le côté 3, donne 48 pour la ſomme des nombres qui ſont en chaque ligne.

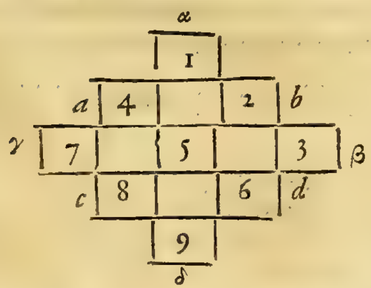
Il faut maintenant voir la maniere dont on ſe ſert pour diſpoſer les nombres en telle ſorte que chaque ligne faſſe une ſomme égale.

Il y a entr'autres deux méthodes qui ſervent à cet effet. L'une eſt pour les ſeuls impairs, & l'autre peut ſervir tant aux quarrez pairs qu'aux impairs.

On donnera ici premierement celle qui appartient aux ſeuls impairs, puis on parlera de la generale.

Auſquelles méthodes on ſuppoſera toujours pour plus grande facilité, que les nombres dont les cellules doivent être remplies, commencent par l'unité, & qu'elles s'entreſuivent avec la difference de la même unité, comme ſont 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. Car en ce qui dépend de placer & ranger les nombres dans les cellules, il n'importe pas quel ſoit le moindre nombre, ni quelle difference ils ayent entre eux. Il ſuffit qu'ils ſoient en progreſſion Arithmétique, & qu'ils ſe ſurmontent l'un l'autre d'un excès toujours égal, comme 2, 5, 8, 11, 14, 17, &c. ou 4, 9, 14, 19, 24, 29, &c.

Pour remplir les cellules d'un quarré impair, par exem-



A B

4	9	2
3	5	7
8	1	6

C D

ple du quarré A B C D qui a 9 cellules, je décris un autre quarré *a b c d* qui a pareillement 9 cellules, comme on voit ici : & sur chacune des faces du quarré, j'étens une autre cellule vis-à-vis de la cellule qui est au milieu de chaque côté : lesquelles cellules sont marquées α β γ δ.

Cela fait, j'écris les nombres de suite, commençant par une des cellules qui sont hors du quarré & par la plus éloignée du milieu.

On écrira donc 1, 2, 3, dans les cellules α, *b*, β, puis revenant à la cellule *a*, tirant vers *d*, on écrira 4, 5, 6, & enfin aux cellules γ, *c*, δ, on mettra 7, 8, 9.

Ces nombres étant ainsi disposez, je considere ceux qui se rencontrent dans le quarré *a*, *b*, *c*, *d*, qui sont 4, 2, 5, 8, 6, lesquels je mets aux mêmes places dans le quarré A, B, C, D, apprêté pour cet effet.

Il reste donc à remplir les autres places vuides du quarré, ce qui se fera mettant le nombre qui est en δ, en la cellule qui est au-dessous de α, sçavoir entre 4, & 2 ; & en échange, le nombre qui est en α, en celle qui est au-dessus de δ, entre 8, & 6.

Et semblablement on mettra 7, qui est en γ, vers β, entre 2, & 6 : & 3, qui est en β, on le mettra près de γ, entre 4, & 8, comme on peut voir en la figure. On aura donc la figure complette A B C D qui a 15, pour la somme des nombres de chacune de ses lignes, & diagonales.

Mais parce que le quarré de 3, pour être trop petit ne donnera pas peut-être une entiere connoissance de la façon dont on fabrique ces quarrez impairs, on en apportera un plus grand pour l'exemple, sçavoir celui de 49, qui a 7 de côté.

A

4		12		20		28
	11		19		27	
10		18		26		34
	17		25		33	
16		24		32		40
	23		31		39	
22		30		38		46

B

4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	27	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38	21	46

C

D

						a	7							
					g	6		14	h					
				e	5		13		21	f				
			a	4		12		20		28	b			
			3		11		19		27		35			
		2		10		18		26		34		42		
γ	1		9		17		25		33		41		49	
		8		16		24		32		40		48		
			15		23		31		39		47			
			c	22		30		38		46	d			
					29		37		45					
						36		44						
							43							

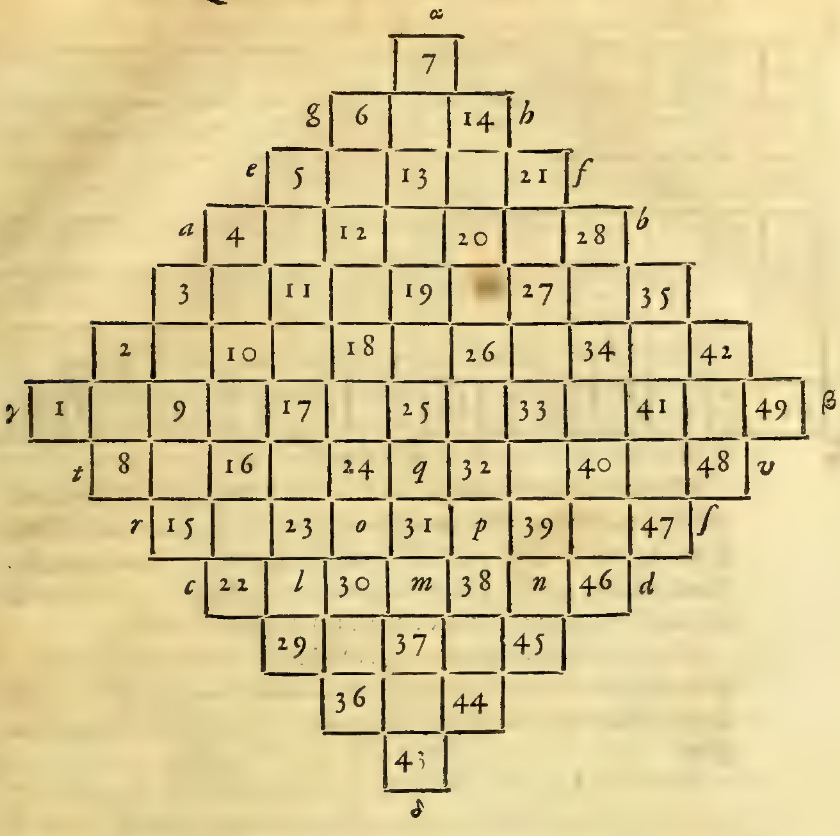
Ayant fait le quarré *a b c d*, qui a ſept cellules à chacun de ſes côtez, j'éleve ſur le côté *ab*, les cinq cellules *ef*, ſçavoir deux moins que celles du quarré ; puis ſur ces cinq je mets les trois marquées *gh*; puis ſur ces trois j'en poſe une marquée α : car leur nombre doit toujours diminuer de deux.

Semblablement ſur chacun des autres côtez, comme ſur *a c*, ſur *cd*, & ſur *db*, je place cinq cellules, puis trois & une. J'écris après les nombres de ſuite dans ces cellules, commençant par laquelle on voudra des quatre, qui ſont comme la pointe, & qui ſont les plus éloignées du quarré *a b c d*, comme par γ ; & de là tournant vers quelque côté qu'on voudra, ainſi qu'on voit en cette figure, (car il n'importe point par où on commence) en laquelle les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, vont de γ vers α. Puis on revient à la cellule exterieure voiſine de γ, & tirant vers le même côté, on écrit les nombres ſuivans 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, & les autres nombres enſuite, comme la figure le pourra mieux repreſenter que le diſcours.

Les nombres étant ainſi placez, je conſidere ceux qui ſe rencontrent dans les cellules du quarré *a b c d*, & les écris en la même diſpoſition & ſituation dans les cellules du quarré A B C D, apprêté pour cet effet, ainſi qu'on peut voir ici.

Cela fait, on remplira les places vuides avec les nombres des cellules qui ſont hors du quarré *a b c d*, en prenant tout ce qui eſt dehors, ſçavoir *e*, *g*, α, *h*, *f*, dans leſquelles cellules ſont les nombres 5, 13, 21, 6, 14, 7 ; & les plaçant, ainſi diſpoſez & tournez comme ils ſont, ſur le coté oppoſé *c d*, ſçavoir les trois cellules de la ligne *ef*, où ſont les nombres 5, 13, 21, ſur les trois cellules vuides du côté *c*, *d*, marquées *l*, *m*, *n*.

Puis on mettra les deux cellules de *g*, *h*, où ſont 6, 14, ſur les deux vuides de *r*, *ſ*, marquées *o*, *p*, &c.



Enfin on mettra 7, qui eſt en la cellule α, en la cellule vuide, qui eſt au milieu de *t v*, marquée *q*, & ainſi les ſix nombres 5, 13, 21, 6, 14, 7, ſe trouveront dans le quarré en la même diſpoſition, & tournez du même côté qu'ils étoient hors du quarré. Les autres côtez ſe rempliront de la même ſorte; car on mettra les ſix nombres qui ſont hors du quarré aux cellules *b*, β, *d*, ſur le côté oppoſé *a c*, & ſur les deux côtez prochains, tirant vers β, en ſorte que 49, qui eſt en β, ſoit plus près du β que tous les autres, quand il ſera placé.

A B

4		12		20		28
	11		19		27	
10		18		26		34
	17		25		33	
16		24		32		40
	23		31		39	
22		30		38		46

C D

A B

4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	17	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38	21	46

C D

De même les nombres de *d*, *δ*, *c*, seront placez du côté de *a b*, tournans leur pointe en bas vers *δ*, comme ils sont hors du quarré ; & pareillement les nombres de *a*, *γ*, *c*, seront placez en la même façon sur *b*, *β*, *d*, & on aura le quarré magique parfait, ainsi qu'on peut voir ici.

On pourra user d'un autre moyen si on a peur de se méprendre, en voulant remplir les cellules vuides du quarré avec celles qui sont hors du quarré, qui sera comme s'ensuit.

Depuis chaque cellule remplie qui est hors du quarré, on comptera en tirant vers le quarré autant de cellules tant pleines que vuides, que le quarré a de cellules à chaque côté, sçavoir 7 au quarré que nous avons pris pour exemple : ainsi comptant sept cellules depuis *e* où 5 est écrit, sans l'y comprendre, on rencontrera la cellule marquée *l* : & comptant de même sept cellules depuis celle où est le nombre 13, on rencontrera *m*, & comptant depuis *f*, on trouvera *n*. Il faudra donc remplir les trois cellules *l*, *m*, *n*, des nombres 5, 13, 21. Par la même raison le nombre de la cellule *g* viendra en *o*, & celui de *h* en *p*, & enfin celui de *α* en *q*.

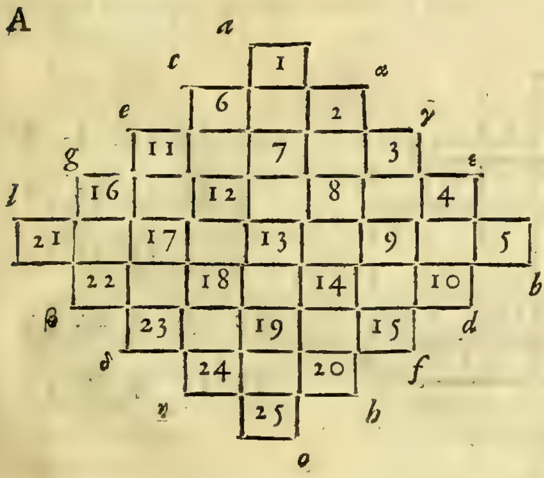
Les

Les autres côtez se feront de même, car depuis chacune des cellules remplies de la figure *bβd*, qui sont hors du quarré, comptant sept cellules vers le quarré, & le côté *ac*, opposé au côté *bd*, on trouvera une cellule vuide, qu'on remplira du nombre qui est dans la cellule depuis laquelle on a compté 7, & on fera le même des cellules qui sont aux deux autres côtez du quarré.

Variation des quarrez impairs, & particulierement du quarré qui a 5 de côté.

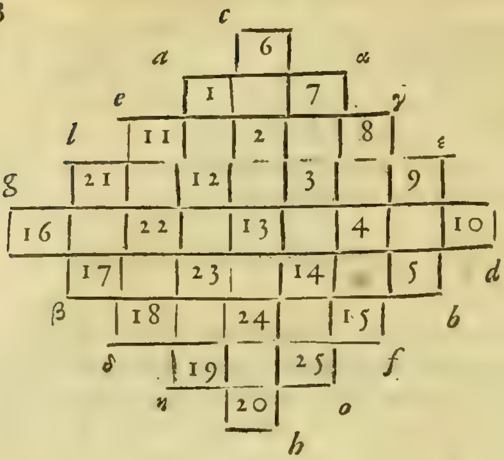
Les Tables des quarrez impairs se peuvent varier en diverses manieres selon qu'on disposera les rangs des nombres. Par exemple en la figure de 5, au lieu de ranger les nombres, ainsi qu'on peut voir en A, on les pourra aussi ranger comme on voit en B, & en C, & les autres, desquels on peut voir les quarrez achevez, qui sont placez à côté.

A



11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

B

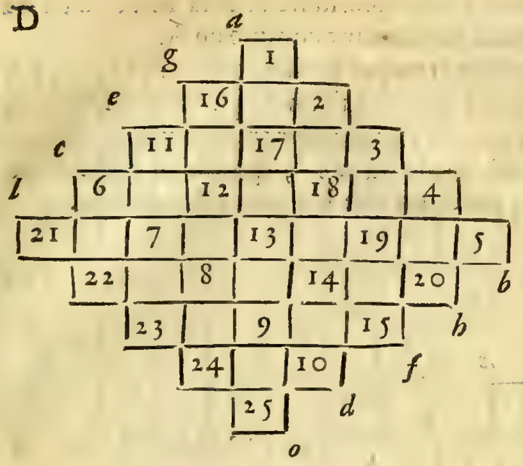


11	19	2	25	8
9	12	20	3	21
22	10	13	16	4
5	23	6	14	17
18	1	24	7	15

C

11	19	22	5	8
9	12	20	23	1
2	10	13	16	24
25	3	6	14	17
18	21	4	7	15

D



11	24	17	10	3
4	12	25	18	6
7	5	13	21	19
20	8	1	14	22
23	16	9	2	15

Le changement de ces figures eſt facile à comprendre par l'inſpection de celles qui ſont ici repréſentées, auſquelles on voit qu'on peut tranſporter les lignes des nombres ainſi qu'on veut, pourvû qu'on change en même ſorte la ligne correſpondante ou rélative. Or les lignes rélatives ſont celles qui ſont également éloignées de celles du milieu; ainſi la rélative de *a b*, en la figure A, eſt *l o*, & celle de *c d*, eſt *g h*: de même celle de *a l*, eſt *b o*, & celle de $\alpha\beta$, eſt $\varepsilon\eta$.

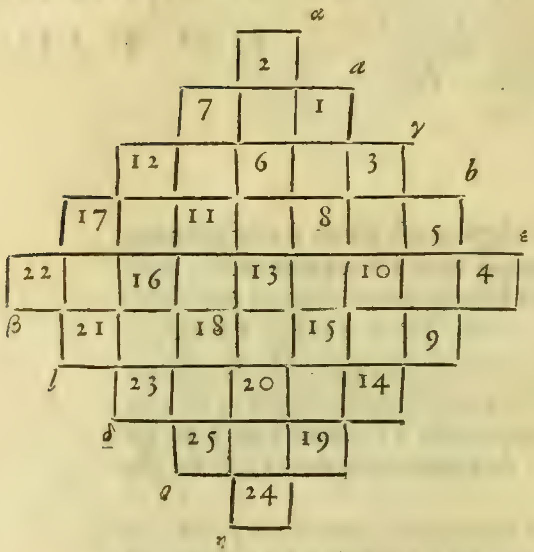
Par exemple, la ligne correſpondante de *a b*, eſt *l o*: & la correſpondante de *c d*, eſt *g h*. Mais *e f* n'a point de correſpondante, & ainſi elle ne peut être ôtée de ſa place.

On voit en la figure B, que la ligne *c d* tient le premier lieu, & par conſéquent ſa rélative *g h* ſera au dernier lieu; & *a b* étant au ſecond lieu, ſa rélative *l o* ſera au quatriéme.

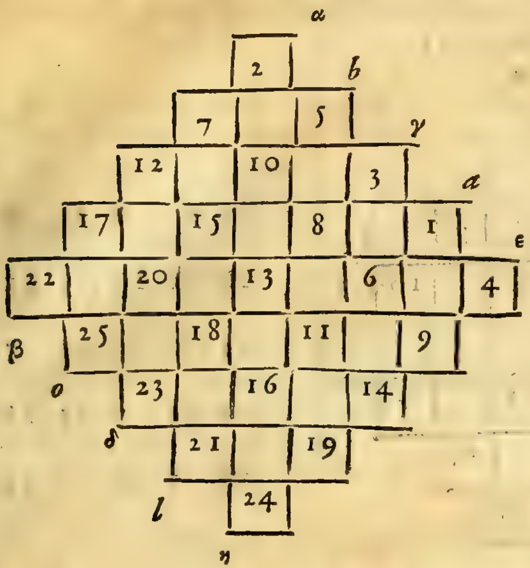
En C, on a tranſpoſé la derniere ligne de A, ſçavoir *l o*, & on l'a miſe au ſecond lieu, & ſa rélative *a b* au quatriéme lieu; le reſte demeurant comme en B.

En D on a placé *gh* au second lieu, & sa rélative *cd* au quatriéme, le reste demeurant comme en A.

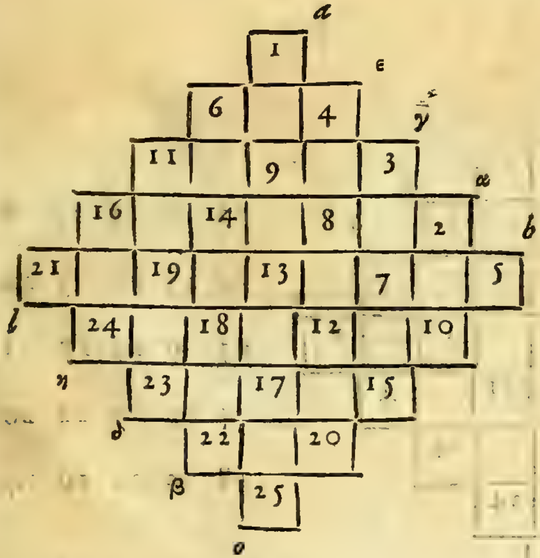
On pourra ensuite transporter les lignes $\alpha\beta$, $\varepsilon\eta$, *al*, *bo*, & ainsi on auroit les figures suivantes par la transposition des lignes de la figure A; ausquelles transpositions on voit comme ci-devant, que la ligne $\gamma\delta$, qui est au milieu, ne se change point, parce qu'elle n'a point de rélative.



12	25	6	19	3
5	11	24	8	17
16	4	13	22	10
9	18	2	15	21
23	7	20	1	14

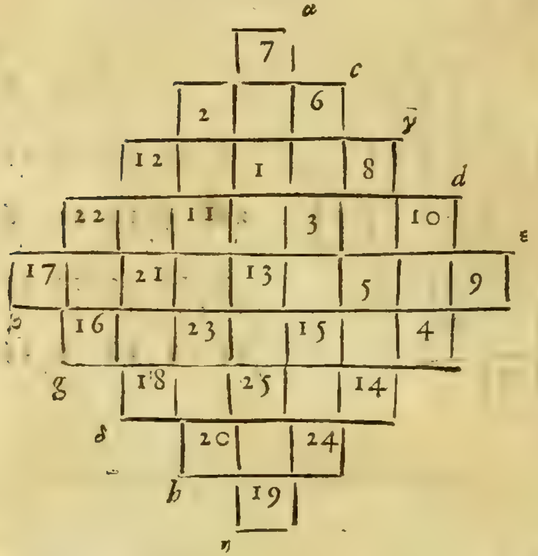


12	21	10	19	3
1	15	24	8	17
20	4	13	22	6
9	18	2	11	25
23	7	16	5	14

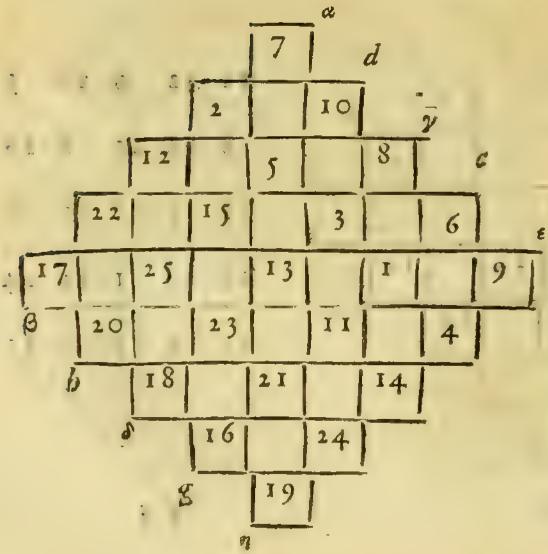


11	22	9	20	3
2	14	25	8	16
19	5	13	21	7
10	18	1	12	24
23	6	17	4	15

S'ensuivent les transpositions des lignes *c g*, *α ε*, &c. de la figure B. page 218.



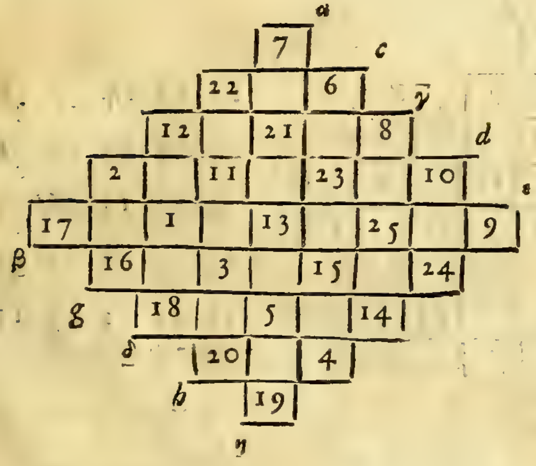
12	20	1	24	8
10	11	19	3	22
21	9	13	17	5
4	23	7	15	16
18	2	25	6	14



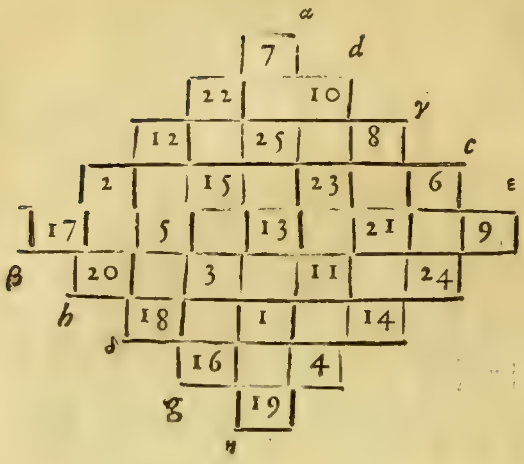
12	16	5	24	8
6	15	19	3	22
25	9	13	17	1
4	23	7	11	20
18	2	21	10	14

11	17	4	25	8
7	14	20	3	21
24	10	13	16	2
5	23	6	12	19
18	1	22	9	15

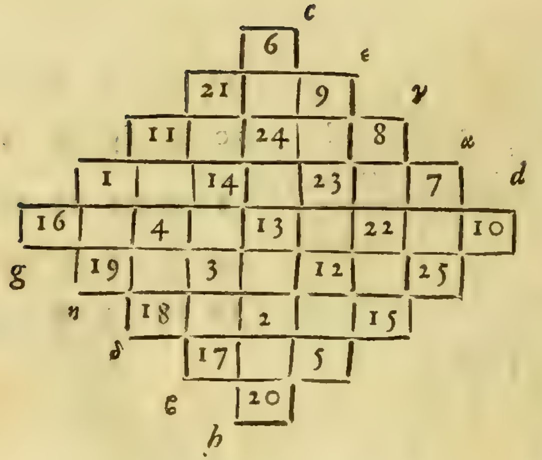
Voici ensuite les transpositions de la figure C, page 218.



12	20	21	4	8
10	11	19	23	2
1	9	13	17	25
24	3	7	15	16
18	22	5	6	14



12	16	25	4	8
6	15	19	23	2
5	9	13	17	21
24	3	7	11	20
18	22	1	10	14

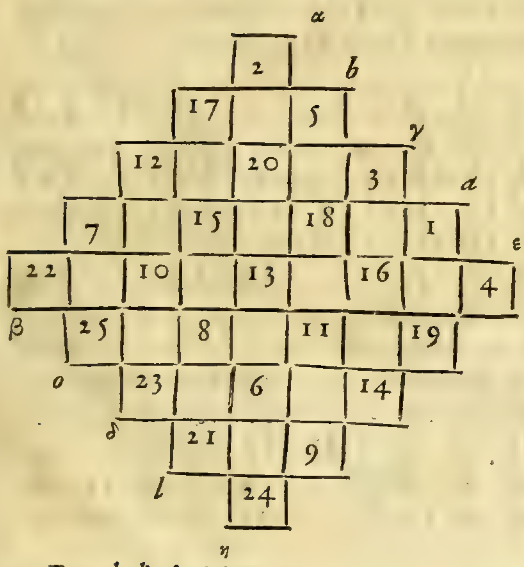


11	17	24	5	8
7	14	20	23	1
4	10	13	16	22
25	3	6	12	19
18	21	2	9	15

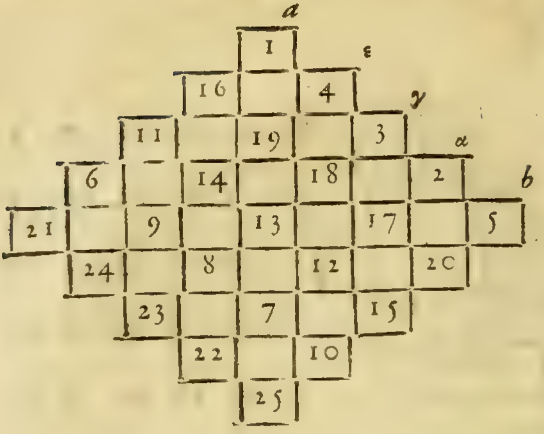
Enfin

Enfin voici les changemens de la figure D, cy-dessus.

12	25	16	9	3
5	11	24	18	7
6	4	13	22	20
19	8	2	15	21
23	17	10	1	14



12	21	20	9	3
1	15	24	18	7
10	4	13	22	16
19	8	2	11	25
23	17	6	5	14



11	22	19	10	3
2	14	25	18	6
9	5	13	21	17
20	8	1	12	24
23	16	7	4	15

On peut encore varier ces Tables d'une autre maniere; par exemple la premiere Table de 5, qui est

A

a		*b*	*c*	*d*		*e*
	11	24	7	20	3	
α	4	12	25	8	16	ϵ
γ	17	5	13	21	9	δ
ε	10	18	1	14	22	η
	23	6	19	2	15	
f		*g*	*h*	*l*		*p*

B

	11	20	7	24	3	
α	4	8	25	12	16	ϵ
	17	21	13	5	9	
ε	10	14	1	18	22	η
	23	2	19	6	15	

C

11	24	7	20	3
10	18	1	14	22
17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
23	6	19	2	15

D

11	20	7	24	3
10	14	1	18	22
17	21	13	5	9
4	8	25	12	16
23	2	19	6	15

Considerant que les nombres des diagonales également distans du milieu 13, & pris deux à deux, font toûjours un même nombre, sçavoir le double de 13 : car de là s'ensuit que mettant la ligne *bg*, à la place de *dl*, on aura la Table suivante qui est encore selon les régles, vû que la ligne *bg* étant égale à *dl*, la transposition ne leur apporte aucun changement, non plus qu'aux lignes *ac*, *αβ*, *γδ*, &c. desquelles on n'ôte aucun nombre. Voyez la figure B.

Toute la difficulté se pourroit rencontrer aux diagonales, mais les nombres également distans du milieu 13, faisant tous une même somme (ce qui arrive en toutes les tables faites comme il a été montré ci-devant) on n'ôte rien à l'une des diagonales, qu'on n'en remette autant en nombres équivalens; ainsi en la diagonale *ef*, de la table A, au lieu de 8, 18, qui font 26, on remettra 12, 14, qui font pareillement 26.

On pourra encore changer la figure A, en transposant la ligne *αβ*, & la mettant en la place de *εη*, comme on voit ci-dessus en la figure C.

Après on changera tout ensemble les lignes *bg*, & *αβ*, de la figure A, mettant *bg* à la place de *dl*, & *αβ*, à la place de *εη* : ou ce qui est la même chose, mettant seulement *αβ*, de la figure B, en la place de *εη*, on aura la figure D.

On changera encore d'une autre sorte la figure A, en mettant *ep*, à la place de *dl*, & *af*, à la place de *bf*.

Comme aussi on pourra mettre *ae*, à la place de *αβ*, & *fp*, à la place de *εη*.

Enfin on fera tous ces changemens ensemble, ce qui donnera les trois figures suivantes; en la premiere desquelles est le premier changement; en la seconde le second; & en la troisiéme les deux ensemble.

Premiere.					*Seconde.*					*Troisiéme.*				
24	11	7	3	20	4	12	25	8	16	12	4	25	16	8
12	4	25	16	8	11	24	7	20	3	24	11	7	3	20
5	17	13	9	21	17	5	13	21	9	5	17	13	9	21
18	10	1	22	14	23	6	19	2	15	6	23	19	15	2
6	23	19	15	2	10	18	1	14	22	18	10	1	22	14

Si on donne à la figure B, les trois changemens, on aura auſſi pareillement trois autres figures, qui ſont les ſuivantes.

20	11	7	3	24	4	8	25	12	16	8	4	25	16	12
8	4	25	16	12	11	20	7	24	3	20	11	7	3	24
21	17	13	9	5	17	21	13	5	9	21	17	13	9	5
14	10	1	22	18	23	2	19	6	15	2	23	19	15	6
2	23	19	15	6	10	14	1	18	22	14	10	1	22	18

Pareils changemens étant obſervez en C, donneront

24	11	7	3	20	10	18	1	14	22	18	10	1	22	14
18	10	1	22	14	11	24	7	20	3	24	11	7	3	20
5	17	13	9	21	17	5	13	21	9	5	17	13	9	21
12	4	25	16	8	23	6	19	2	15	6	23	19	15	2
6	23	19	15	2	4	12	25	8	16	12	4	25	16	8

De la figure D, on aura auſſi les deux ſuivantes.

20	11	7	3	24	10	14	1	18	22
14	10	1	22	18	11	20	7	24	3
21	17	13	9	5	17	21	13	5	9
8	4	25	16	12	23	2	19	6	15
2	23	19	15	6	4	8	25	12	16

La troiſiéme eſt ſemblable à une figure qui eſt ci-devant au haut de la page 224, & dont la premiere ligne eſt 12, 16, 25, 4, 8.

On aura donc par ce moyen quatorze tranſpoſitions de la figure marquée A, cy-deſſus, qui avec la figure A, font quinze figures, & parce qu'enſuite de la figure A, il y a encore 15 autres figures, qui ſe font par le rombe ou chaſſis; comme on peut voir aux pages 218, & ſuivantes, ſi chacune d'elles donne autant de figures differentes, on auroit en tout 240 figures: mais il faut prendre garde s'il n'y aura point de figures ſemblables parmi ce nombre.

Voici des exemples de la figure B cy-deſſus, que nous avons remiſe ici, afin de la comparer avec celles qui en proviennent.

11	19	2	25	8	
9	12	20	3	21	
22	10	13	16	4	B
5	23	6	14	17	
18	1	24	7	15	

11	25	2	19	8	11	19	2	25	8	11	25	2	19	8
9	3	20	12	21	5	23	6	14	17	5	14	6	23	17
22	16	13	10	4	22	10	13	16	4	22	16	13	10	4
5	14	6	23	17	9	12	20	3	21	9	3	20	12	21
18	7	24	1	15	18	1	24	7	15	18	7	24	1	15

Ce ſont là les premiers changemens, chacun deſquels ſouffre encore d'autres tranſpoſitions, ainſi que l'on a pû remarquer en la figure A, & qui donnent les figures ſuivantes.

9	12	20	3	21	19	11	2	8	25	1	18	24	15	7
11	19	2	25	8	12	9	20	21	3	12	9	20	21	3
22	10	13	16	4	10	22	13	4	16	10	22	13	4	16
18	1	24	7	15	23	5	6	17	14	23	5	6	17	14
5	23	6	14	17	1	18	24	15	7	19	11	2	8	25

9	3	20	12	21	25	11	2	8	19	3	9	20	21	12
11	25	2	19	8	3	9	20	21	12	25	11	2	8	19
22	16	13	10	4	16	22	13	4	10	16	22	13	4	10
18	7	24	1	15	14	5	6	17	23	7	18	24	15	1
5	14	6	23	17	7	18	24	15	1	14	5	6	17	23

5	23	6	14	17						23	5	6	17	14
11	19	2	25	8						19	11	2	8	25
22	10	13	16	4						10	22	13	4	16
18	1	24	7	15						1	18	24	15	7
2	12	20	3	21						12	9	20	21	3

5	14	6	23	17	25	11	2	8	19
11	25	2	19	8	14	5	6	17	23
22	16	13	10	4	16	22	13	4	10
18	7	24	1	15	3	9	20	21	12
9	3	20	12	21	7	18	24	15	1

Les deux places vuides montrent que les figures qui y devroient être ſont ſemblables à quelques-unes des tables précedentes, & elles ont été obmiſes pour éviter la répétition.

On peut donc voir que la table B, ſe varie en 14 façons elle compriſe ; mais la précedente table A, ſe varie en 15 ſortes, d'où s'enſuit qu'on n'aura pas 240 variations en tout, car il faudroit que chacune des tables eût autant de variations que la premiere, ce qui n'eſt pas, à cauſe que les mêmes reviennent.

On pourra faire les variations des autres tables ainſi qu'on a fait aux deux premieres A, & B.

Il ſe trouve encore d'autres variations, qui ne ſont pas ſi faciles que les précedentes ; ſçavoir celles auſquelles le nombre 13, qui tient le milieu à toutes les tables précedentes, ſe trouve changé, & hors de cette place.

Mais toutes les tables précedentes ne peuvent pas souffrir cette variation, car entre les premieres qui se font par les rombes ou chassis, il n'y a que la premiere marquée A, & la premiere de la page 431, & cette façon de changement, sçavoir de la figure A, ne fait pas que toutes sortes de nombres puissent occuper le milieu; mais on n'y pourra placer par cette voye que 7, 9, 17, 19.

Les autres figures qui sont ensuite des premieres, donnent bien aussi quelques variations, qui néanmoins se peuvent faire sans elles en conséquence des changemens des deux premieres marquées A, A.

Voici donc de quelle façon on changera la figure A.

	a			*c*		*e*	
		11	24	7	20	3	
		4	12	25	8	16	
A	*γ*	17	5	13	21	9	*δ*
		10	18	1	14	22	
		23	6	19	2	15	
	f			*h*		*p*	

Cette figure se changera en quatre façons.

La premiere, mettant la ligne *ae*, à la place de *γδ*.

La seconde, mettant la ligne *ep*, à la place de *ch*.

La troisiéme, mettant la ligne *fp*, au lieu de *γδ*.

Et la quatriéme, mettant la ligne *af*, au lieu de *ch*. Et on aura les quatre figures suivantes, la premiere desquelles a 7 au milieu, au lieu de 13, la seconde a 9 au milieu, la troisiéme a 19, & la quatriéme 17.

	17	5	13	21	9	11	24	3	20	7	11	24	7	20	3
	4	12	25	8	16	4	12	16	8	25	4	12	25	8	16
H	11	24	7	20	3	17	5	9	21	13	23	6	19	2	15
	10	18	1	14	22	10	18	22	14	1	10	18	1	14	22
	23	6	19	2	15	23	6	15	2	19	17	5	13	21	9

On fera les mêmes changemens à cette autre figure marquée L, qui suit, comme on le peut voir : mais il faut montrer que ce changement-cy ne peut apporter aucune inégalité aux lignes, & par conséquent que les figures mêlées demeureront bonnes.

7	24	11	20	3
25	12	4	8	16
13	5	17	21	9
1	18	10	14	22
19	6	23	2	15

Parce qu'on transporte la ligne toute entiere de sa place, il ne peut pas arriver d'inégalité aux lignes, & toute l'inégalité qui pourroit survenir par ce changement, seroit aux Diagonales. Mais le tout est bien récompensé ; car au premier changement on met 7 à la place de 13, d'où il arriveroit que chacune des diagonales auroit faute de 6, mais ce 6 est mis en chacune d'elles en changeant les lignes, car mettant la ligne *γδ*, de la Table A, à la place de *ae*, 17 occupera la place de 11, d'où vient que la diagonale *ap*, est augmentée de 6, ce qui récompense la diminution précedente de 7, au lieu de 13.

Pareillement 9 viendra à la place de 3, ce qui corrigera le défaut de la diagonale *ef*.

On verifiera de la même sorte, que les autres changemens n'ôtent point les égalitez qui sont requises aux Tables.

La figure L, sera variée en la même maniere ; mais il faudra prendre une des lignes du milieu, au lieu qu'on changeoit les extrêmes à la Table précedente, comme on peut voir ici.

		α	c	ε			
	12	16	25	4	8		
a	6	15	19	23	2	*e*	
γ	5	9	13	17	21	δ	L
f	24	3	7	11	20	*p*	
	18	22	1	10	14		
		β	*h*	η			

où on changera αϐ, en *ch*, pour avoir la premiere figure εη, en *ch* pour la seconde *ae* en γδ, pour la troisiéme, & enfin *fp*, en γδ, pour la derniere, & on aura les figures suivantes.

12	25	16	4	8
6	19	15	23	2
5	13	9	17	21
24	7	3	11	20
18	1	22	10	14

12	16	4	25	8
6	15	23	19	2
5	9	17	13	21
24	3	11	7	20
18	22	10	1	14

12	16	25	4	8
5	9	13	17	21
6	15	19	23	2
24	3	7	11	20
18	22	1	10	14

12	16	25	4	8
6	15	19	23	2
24	3	7	11	20
5	9	13	17	21
18	22	1	10	14

Chacune de ces figures, & des quatre autres précédentes qui sont en l'autre page, souffrent encore plusieurs sortes de changemens, dont on donnera ici quelques exemples.

Premierement on leur peut attribuer les mêmes changemens qu'à la figure dont elles proviennent : ainsi la premiere figure de celles qui viennent de A, sçavoir celle qui est ici marquée H, souffre les mêmes variations que A, car on poura transposer *af*, & *ep*, en *ch*, & pareillement *ae*, & *fp* en γδ, mais entre ces Tables il y en auroit une semblable à la Table A : on mettra seulement ici celles qui

	a		*c*		*e*	
	17	5	13	21	9	
	4	12	25	8	16	
H γ	11	24	7	20	3	δ
ε	10	18	1	14	22	η
	23	6	19	2	15	
	f		*h*		*p*	

ont un nouveau nombre au milieu ; car il n'y a aucun nombre impair, qui ne puiſſe tenir le milieu de la figure, comme l'on voit par les ſuivantes.

13	5	17	21	9
25	12	4	8	16
7	24	11	20	3
1	18	10	14	22
19	6	23	2	15

17	5	9	21	13
4	12	16	8	25
11	24	3	20	7
10	18	22	14	1
23	6	15	2	19

De ces deux on pourra auſſi faire les ſuivantes.

13	5	17	21	9
25	12	4	8	16
19	6	23	2	15
1	18	10	14	22
7	24	11	20	3

17	5	9	21	13
4	12	16	8	25
23	6	15	2	19
10	18	22	14	1
11	24	3	20	7

Il y a encore une autre tranſpoſition de la figure H cy-devant, ſçavoir en mettant ε η, à la place de γ δ, comme on voit ici.

17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
10	18	1	14	22
11	24	7	20	3
23	6	19	2	15

Et changeant en cette même ſorte les trois autres figures de la page 232, on aura les ſuivantes.

11	3	24	20	7	11	24	7	20	3	7	24	20	11	3
4	16	12	8	25	23	6	19	2	15	25	12	8	4	16
17	9	5	21	13	4	12	25	8	16	13	5	21	17	9
10	22	18	14	1	10	18	1	14	22	1	18	14	10	22
23	15	6	2	19	17	5	13	21	9	19	6	2	23	15

On a donc ici des exemples de tous les nombres impairs qui tiennent le milieu des figures; pour ce qui eſt des nombres pairs, il y auroit plus de difficulté à leur faire tenir le milieu de la figure, & peut-être il eſt impoſſible.

Ces figures ſe varient encore d'une autre ſorte, dont il a été fait mention cy-devant : par exemple, la figure H ſe

a					*b*	
17	5	13	21	9		
4	12	25	8	16		
11	24	7	20	3		H
f 10	18	1	14	22	*g*	
23	6	19	2	15		
c					*d*	

variera, mettant *a b*, en la place de *c d*, comme auſſi *a c* en la place de *b d* : & enfin, aſſemblant ces deux variations, ſçavoir, tranſpoſant tout enſemble *a b*, en *c d*, & *a c* en *b d*, on aura les trois Tables ſuivantes.

	9	5	13	21	17	23	6	19	2	15	15	6	19	2	23
	16	12	25	8	4	4	12	25	8	16	16	12	25	8	4
F	3	24	7	20	11	11	24	7	20	3	3	24	7	20	11
	22	18	1	14	10	10	18	1	14	22	22	18	1	14	10
	15	6	19	2	23	17	5	13	21	9	9	5	13	21	17

Les autres Tables peuvent ſouffrir les mêmes variations, qui ſeroient trop longues à déduire, & cela fera une fort grande quantité de Tables differentes : & celles-cy ſuffiront pour faire voir de quelle façon elles ſe pourront trouver.

On pourra encore faire d'autres ſortes de tranſpoſitions ; par exemple, de la figure F, mettant la ligne 9, 5, 13, 21, 17, à la place de 16, 12, 25, 8, 4, parce que 17, & 8, qui ſont dans la diagonale, ſont égaux à 21, & 4. Et pareillement de l'autre côté 16, & 5, ſont égaux à 9 & 12, & pareillement on pourra mettre la ligne 3, 24, 7, 20, 11, à la place de 22, 18, 1, 14, 10, parce que 14, & 7, en la diagonale ſont égaux à 20, & 1 ; & pareillement 7, & 18, ſont égaux à 24, & 1.

Comme auſſi en la figure H, on pourroit tranſporter la ligne 17, 5, 13, 21, 9, à la place de 10, 18, 1, 14, 22, parce que les nombres de la diagonale 9, & 18, ſont égaux à 5, 22, & les deux 17, 14, à 21, & 10. on peut voir ces deux Tables tranſpoſées cy-après, & cette tranſpoſition ſe peut faire toutes fois & quantes qu'on peut choiſir un quarré dans la figure qui ait deux de ſes angles dans la diagonale de la figure, & auquel les nombres des angles oppoſez ſoient égaux à ceux des deux autres angles, & que la même choſe arrive au quarré pris dans les mêmes lignes qui bornent le quarré dans l'autre côté de la figure.

Ainſi en la figure H, je choiſis un quarré dont les angles ſont 5, 9, 22, 18, dont deux, ſçavoir 18 & 9, ſont dans la diagonale, & les angles oppoſez, comme 18 & 9, ſont enſemble égaux aux deux autres 22 & 5 ; & ſi on prend le quarré qui eſt de l'autre côté de la figure entre les mêmes lignes *ab*, & *fg*, dont les angles ſont 17, 21, 14, 10, on trouvera de même que les angles oppoſez 17, 14, ſont égaux aux deux autres 10, 21.

16	12	25	8	4
9	5	13	21	17
3	24	7	20	11
22	18	1	14	10
15	6	19	2	23

9	5	13	21	17
16	12	25	8	4
22	18	1	14	10
3	24	7	20	11
15	6	19	2	23

10	18	1	14	22
4	12	25	8	16
11	24	7	20	3
17	5	13	21	9
23	6	19	2	15

Les Tables, dont le côté est pair, se trouveront d'une autre façon, laquelle est aussi commune avec les impairs : mais premierement nous donnerons celle de 16, qui a 4 de côté.

Il faut disposer les 16 nombres selon leur ordre naturel, comme on voit ici.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Puis on marque les diagonales avec des points, afin de remarquer les nombres qui s'y trouvent, car les mêmes seront aussi dans les diagonales de la Table, en même situation qu'ils sont ici. Je mets donc à part les nombres qui composent les diagonales en la même disposition, comme il est ici marqué.

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

Et pour achever la Table on met les nombres qui sont hors des diagonales, vers leurs opposez en croix ; sçavoir 14 à la place de 3, 15 à la place de 2, 12 à la place de 5, & 8 à la place 9, & on aura la figure suivante.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

METHODE GENERALE pour faire les Tables Magiques.

PAr la méthode ſuivante on pourra faire toutes ſortes de Tables tant paires qu'impaires, mais il faut remarquer une proprieté particuliere des Tables faites par cette méthode, qui eſt que ſi on ôte l'enceinte de quelqu'une de ces Tables, celle qui reſtera ne laiſſera pas d'avoir encore toutes ſes lignes égales; & ſi de ce reſte on ôte encore une enceinte, le reſte aura encore ſes lignes égales, & ainſi juſqu'à ce que la derniere Table qui reſte n'ait plus que 4 de côté ſi elle eſt paire, & 3 de côté ſi elle eſt impaire, car il n'y a point de Table de 4 de côté, dont ôtant une enceinte, le reſte ait ſes lignes égales.

Exemple. Que la Table ait 12 de chaque côté, ſi on ôte la premiere enceinte, il reſtera une Table qui aura 10 à chacun de ſes côtez, & qui aura encore ſes lignes égales. Et ôtant une enceinte de cette Table de 10, on aura une Table de 8 qui aura encore toutes ſes lignes égales.

Et ſi de cette Table de 8 on ôte encore une enceinte, il reſtera une Table de 6.

Enfin ſi on ôte une enceinte de cette Table de 6, il reſtera une Table de 4, qui aura encore les conditions requiſes.

Et ainſi ayant une Table de 12, on en aura auſſi une de 10, une de 8, une de 6, & de 4.

On trouve enſuite des moyens pour faire qu'il n'y ait qu'une ſeule Table qui ſoit bonne, & qu'ôtant les enceintes, celle qui reſte ne ſoit plus ſelon les regles; ou ſi l'on veut, telle Table qu'on voudra ſera bonne, & les autres ne vaudront rien. Ainſi ayant une Table de 12, on pourra faire qu'ôtant quelques enceintes qu'on voudra, le reſte ne ſoit pas bon; ou bien que les Tables de 8 & de 4 qui y ſont contenuës, ſeront bonnes, & les autres non; & cela ſe peut faire en toutes les manieres qu'on voudra.

Mais parce que les exemples apprendront mieux la maniere de faire ces Tables, que tous les préceptes qu'on en pourroit donner, il ſera plus à propos de faire connoître ceux-ci par le moyen de ceux-là.

Exemple premier d'une Table de 6.

IL faut en premier lieu diſpoſer les nombres dont on doit remplir les 36 cellules de la Table, ſelon leur ordre naturel, & en faire deux lignes, qui ſeront l'une deſſus l'autre, en telle ſorte que les nombres des deux lignes qui ſont l'une ſur l'autre faſſent 37, ſçavoir 1, plus que le plus grand nombre, qui eſt 36, comme on les voit ici; & les nombres de ces deux lignes ſe nommeront relatifs: ainſi 35 eſt relatif de 2, 34 de 3, & ainſi des autres: de même 6 ſera relatif de 31, 7 de 30, &c.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19

Et cela ſe doit obſerver en toutes Tables, afin de pouvoir avec plus de facilité choiſir les nombres dont on a beſoin.

Après on prendra ſeize nombres, ſçavoir huit de la premiere ligne, & les huit correſpondans ou relatifs dans la ſeconde. Il ſera bon que les huit nombres ſoient de ſuite ou qu'ils ayent entre eux une difference égale, quoiqu'il ſuffiſe que quatre de ces nombres ayent une même difference, & les quatre autres auſſi, & enſuite on prendra leur relatifs; car en cette façon de conſtruire les Tables, il faut être ſoigneux de ne prendre jamais un nombre, qu'on ne ſe ſerve auſſi de ſon relatif, autrement on ne pourroit pas faire une Table par cette méthode.

Je prens donc les huit premiers nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, & leurs relatifs 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, qui ſont 16 nombres, dont je fais une Table de 4, ainſi qu'il a été enſeigné à la page 237 du Traité précé-

dent ; sçavoir écrivant les seize nombres, comme on voit ici.

1	2	3	4
5	6	7	8
29	30	31	32
33	34	35	36

Puis retenant les diagonales, comme l'on voit dans la figure suivante.

1			4
	6	7	
	30	31	
33			36

Et enfin remplissant les espaces vuides, en y mettant les nombres opposez en croix ; sçavoir 35 à la place de 2, & 2 à la place de 35, puis 34 à la place de 3, & ainsi des autres, on aura la figure disposée comme il suit.

1	35	34	4
32	6	7	29
8	30	31	5
33	3	2	36

Ces nombres étant employez, je les marque par quelque signe, comme on peut voir en la page précedente, où tous les trente-six nombres sont de suite en deux lignes, afin qu'on puisse connoître ceux qui ont déja servi à faire la Table intérieure, & qu'on ne prenne point deux fois un même nombre.

Cela fait, je choisis deux nombres de ceux qui restent, pour mettre près des angles de la figure de quatre, sçavoir

voir en continuation de sa diagonale, qui serviront d'angles à l'autre enceinte exterieure.

On prendra, par exemple, 9 & 10 pour les deux angles, ou extrémitez d'une même ligne.

Ayant mis les nombres 9 & 10 aux angles prochains, & non pas opposez, je mets leurs complémens aux angles opposez, comme on voit ici, sçavoir 28 à l'opposite de 9, & 27 à l'opposite de 10.

9					10
	1	35	34	4	
	32	6	7	29	
	8	30	31	5	
	33	3	2	36	
27					28

9	25	26	23	18	10
16	1	35	34	4	21
20	32	6	7	29	17
24	8	30	31	5	13
15	33	3	2	36	22
27	12	11	14	19	28

Cela fait, je considere ce qu'il faut dans deux lignes prochaines de la derniere enceinte pour les achever ; car lors qu'on a deux lignes prochaines, les complémens des nombres donnent les opposez. Je trouve que dans la ligne 9, 10, il faut 92 pour parfaire la ligne ; car chaque ligne doit être de 111 ; ce qui se trouve multipliant la somme des deux nombres extrêmes de la figure, qui sont 1, & 36, dont la somme est 37, par la moitié des nombres qui sont en chaque ligne, sçavoir par 3.

Et de ce produit 111, ôtant 19, qui est la somme de 9 & 10, il restera 92 pour la somme des quatre nombres qui doivent être mis entre 9 & 10.

De même, si de 111 j'ôte 38, qui est la somme de 28 & 10, qui sont aux angles qui bornent la ligne 10, 28, il restera 73 pour les quatre nombres qui manquent à la ligne 10, 28.

Il faut donc chercher dans les nombres qui restent, quatre nombres, dont la somme soit 92, & quatre autres dont la somme soit 73, à telle condition toutefois, qu'après avoir pris un nombre, on ne se serve plus de son com-

plément dans ces deux premieres lignes, parce que ce complément doit être mis dans la ligne opposée ; ce qui doit toujours être exactement observé.

Pour venir plus facilement à bout de cela, l'on écrira les nombres qui restent de suite, & leurs complémens au-dessous, comme il suit.

11	12	13	14	15	16	17	18
26	25	24	23	22	21	20	19
I	I		I				I

Cela fait, je cherche quatre nombres dans ces deux lignes qui fassent 92 : je trouve 26, 25, 23, 18 : je les marque au-dessous avec de petites lignes, afin de ne les plus reprendre, ni leurs complémens aussi. Après, je choisis quatre nombres dans les huit qui restent, qui fassent 73 ; mais en choisissant les deux premiers, il faut faire en sorte qu'il ne reste pas 37 pour les deux autres, ainsi les deux nombres ne pourront pas être 16, & 20, qui font 36, parce qu'il resteroit 37 pour les deux autres nombres, ce qui ne se peut faire que par deux relatifs, comme par 15, 22, & 13, 24, ce qui est contre les regles ; c'est pourquoi il faudra prendre deux nombres qui fassent plus ou moins de 36, comme 21 & 17, qui font 38, & reste 35. Pour achever 73, on fera 35 avec 13, & 22 : on aura donc les quatre nombres 21, 17, 13, 22 ; qu'on mettra entre 10, & 28, & il n'importe pas en quel ordre, pourvû que vis-à-vis d'eux en la même ligne de la colomne opposée ; sçavoir entre 9, & 27, on mette leurs complémens selon le même ordre, comme on voit en la figure qui est achevée en la page précédente.

De même, je mets entre 9 & 10 les quatre nombres qui ont été premierement trouvez, sçavoir 26, 25, 23, 18 ; & vis-à-vis en la ligne opposée, & entre 27, 28, je mets leurs complémens 11, 12, 14, 19. Et ainsi on aura la figure parfaite.

Second exemple de la Table de 6.

IL y a une chose à observer quand les nombres de la Table intérieure de quatre sont tous de suite, & que les vingt de l'enceinte exterieure sont les dix premiers,& leurs complémens ; sçavoir,

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
36	35	34	33	32	31	30	29	28	27

En ce cas il ne faudra pas prendre pour les angles prochains, deux nombres qui soient en quotité pairs ou impairs, sçavoir en cet exemple deux pairs ou deux impairs, comme 2, 4, ou 3, 5, ou 5, 9, & autres semblables, autrement on ne pourroit pas achever la Table, parce qu'il arrive toujours en faisant la seconde ligne, que la somme des nombres est paire quand elle doit être impaire, & au contraire, la raison est qu'en la seconde ligne il faut toujours prendre deux des grands nombres, & deux des moindres, à cause qu'ils sont beaucoup differens l'un de l'autre.

Voici une Table qui a ces nombres à son enceinte exterieure.

1	8	31	32	35	4
27	11	25	24	14	10
34	22	16	17	19	3
9	18	20	21	15	28
7	23	13	12	26	30
33	29	6	5	2	36

1] 2 3 5 6 7 8 9 10[4 | 106 / 71

35 34 32 31 30 29 28 27

Il arrive assez souvent en ces petites figures, à cause du peu de nombres qu'il y a en chaque ligne, qu'ayant choisi

les quatre pour la premiere ligne, ceux de la seconde ne peuvent pas faire la somme qui seroit nécessaire ; comme en cet exemple, si entre 1 & 4 on mettoit 35, 32, 30, 9, qui ensemble font 106, ainsi qu'il est requis, il resteroit 3, 6, 8, 10, & leurs complémens 34, 31, 29, 27, qu'on ne peut pas employer pour faire 71, qui est la somme que doivent avoir les quatre nombres qu'on doit mettre entre 4 & 36, c'est pourquoi on changera les quatre de la premiere ligne qui sont entre les angles, & au lieu de 35, 32, 30, 9, on en prendra d'autres équivalens; par exemple, 35, 32, 29, 10. Mais parce que les nombres qui restent pour l'autre ligne ne peuvent pas encore faire 71, il les faudra encore changer, & prendre 35, 31, 30, 10, & ceux qui resteront pourront faire 71, comme l'on voit assemblant les quatre nombres, 3, 8, 28, 32.

Que si après avoir changé les lignes en diverses manieres, on ne pouvoit trouver son compte, il faudroit avoir recours aux angles & les changer, ou du moins l'un d'eux, & son complément, tant que la difficulté cesse.

Enfin cela dépend plus de l'industrie de celui qui cherche, que non pas de certaine regle infaillible qu'on pourroit donner pour cet effet, laquelle se peut bien trouver pour les impairs, comme il a été montré cy-devant, mais la même chose ne succede pas aux Tables paires. Voici pourtant une méthode qui facilitera beaucoup cette recherche.

Ayant écrit les huit nombres entre les deux qui sont aux angles, comme on voit au bas de la page 243, on mettra ensuite la valeur des quatre nombres qui doivent être entre 1 & 4, qui est 106, parce qu'ôtant 5, sçavoir la somme de 4 & 1, de 111, qui est la valeur de chaque ligne, il reste 106 ; on mettra aussi la valeur des quatre nombres qui doivent être entre 4 & 36, qui est 71 ; je cherche après quatre nombres dans les seize des deux lignes, qui valent 106, à telle condition qu'après avoir

pris un des nombres, on ne prenne pas auſſi ſon complément, & commençant par les deux plus grands 35 & 34, qui enſemble valent 69, il faut ôter cette ſomme de 106, reſte 37; qui étant la ſomme des deux relatifs, ne peut pas être employée dans ces Tables. Il faut donc prendre deux autres nombres, ſçavoir 35 & 32, la ſomme eſt 67, qui ôtée de 106, reſte 39, on fera 39 avec 31, 8: on aura donc les quatre nombres 35, 32, 31, 8, qu'il faudra mettre entre 1 & 4 de la Table A. Il faut après remplir la ligne 4, 36, avec quatre des nombres qui reſtent, qui ſont 3, 7, 9, 10, & leurs complémens 34, 30, 28, 27.

Voici comme on y procedera. Il faut aſſembler les quatre moindres nombres, ſçavoir 3, 7, 9, 10: la ſomme eſt 29, qui ôtée de 71 qui eſt la valeur de quatre nombres, qui doivent être mis entre 4 & 36 de la table A, reſte 42.

A

1					4
	11	25	24	14	
	22	16	17	19	
	18	20	21	15	
	23	13	12	26	
33					36

Il faut voir ſi on pourra faire 42 avec la difference qui eſt entre les quatre nombres, 3, 7, 9, 10, & leurs complémens 34, 30, 28, 27; comme on peut voir en cette figure, & leur difference entre deux; on trouve 23 & 19

3	7	9	10
21	23	19	17
34	30	28	27

differences entre 7, 30, & 9, 28, qui font 42. On prendra donc 3, 30, 28, 10, pour les quatre nombres qui doivent être mis entre 4, 36, qui ſont aux extrémitez

de la derniere colomne, car puisque les quatre nombres 3, 7, 9, 10, manquent de 42 pour faire 71, qui est la valeur de quatre nombres qui doivent être entre 4 & 36, & que 30 & 28 surpassent 7 & 9 de 42, il faudra prendre 30 & 28, au lieu de 7 & 9; on aura donc la table accomplie, comme on la voit ici, mettant les quatre nombres

1	35	32	31	8	4
34	11	25	24	14	3
7	22	16	17	19	30
9	18	20	21	15	28
27	23	13	12	26	10
33	2	5	6	29	36

ci-devant trouvez, sçavoir 35, 32, 31, 8, entre 1 & 4, & les complémens de ces nombres 2, 5, 6, 29, en la même colomne, & vis-à-vis des précedens en la ligne opposée, avec les deux nombres 33, complément de 4 & 36, complément de 1, qu'il faut mettre aux angles en même diagonale: puis entre 4 & 36 on mettra les quatre autres nombres 3, 30, 28, 10, & leurs rélatifs 34, 7, 9, 27, vis-à-vis des précedens dans la colomne opposée, & à l'autre extrémité de la même ligne.

Si on avoit pris 1, 3, pour les nombres qui doivent être aux angles, ou aux extrémitez d'une même ligne, on ne pourroit pas parfaire cette ligne, comme il a été remarqué ci-devant. La raison est, qu'on est obligé pour

1] 2 4 5 6 7 8 9 10 [3 | 107
72

35 33 32 31 30 29 28 27

faire 107, de prendre trois nombres de la ligne inferieure, où sont les plus grands nombres, & un de la superieure, parce que les quatre moindres de la ligne inferieure,

ſçavoir 27, 28, 29, 30, font plus de 107, encore que 107 ſoit le plus grand nombre que puiſſent avoir les quatre nombres, en prenant des nombres ſemblables pour les angles, ſçavoir tous deux pairs ou impairs, & ſi on n'en prenoit que deux dans la ligne inférieure, & deux dans la ſuperieure, ils ne ſeroient pas aſſez grands; car encore que l'on mît aux angles les plus grands nombres de la ligne ſuperieure, ſçavoir 8 & 10 qui ſont ſemblables en parité ou imparité, étant tous deux pairs, il reſteroit 93 pour la ſomme des quatre nombres qui devroient être entre-deux. Or prenant les deux plus grands nombres de la ligne inferieure, & les deux plus grands de la ſuperieure, ſçavoir 35, 33, 7, 9, ils feront moins de 93. Il faut donc prendre trois nombres de la ligne inferieure, & un de la ſuperieure.

Or après avoir pris ces quatre nombres qui faſſent 107, ou autre nombre requis: Par exemple, après avoir pris 35, 33, 32, 7, qui font 107, on ne pourra jamais faire 72, qui eſt la ſomme des nombres qui doivent faire l'autre ligne, avec quatre des nombres qui reſtent; car prenant deux de ces nombres dans la ligne inferieure, & deux dans la ſuperieure, comme il eſt néceſſaire pour faire 72, ſçavoir la ſomme des quatre nombres qui doi-

1] 2 4 5 6 7 8 9 10 [3 | 107
| 72

35 33 32 31 30 29 28 27

| | | |

vent achever l'autre ligne; en ſorte que dans ces quatre nombres il n'y en ait point deux qui ſoient rélatifs, c'eſt-à-dire dont la ſomme faſſe 37, car il arrivera toûjours que la ſomme de ces quatre nombres ſera un nombre impair, au lieu que 72 eſt pair. Ainſi prenant 31, 29, qui enſemble font un nombre pair, il reſtera 9, 10, qui en-

semble font un impair, & ainsi la somme des quatre sera impaire.

De même, si on prenoit 31, 28, dont la somme est impaire, les deux autres qui restent seroient 10, 8, dont la somme est paire, qui jointe à la somme précedente qui est impaire, la somme sera encore impaire; & cela arrivera toûjours de la même façon, si ce n'est que les nombres soient tels, qu'on puisse prendre pour la seconde ligne trois nombres dans une des lignes, & un dans l'autre; ou bien que pour la premiere ligne, on puisse prendre tous les quatre nombres dans une même ligne.

Pour les tables impaires, si on les veut faire en la même maniere que les paires; sçavoir, faisant que les rélatifs soient opposez, il faut prendre garde qu'entre les nombres qui doivent servir à remplir les deux côtez prochains, c'est-à-dire, qui aboutissent à un même angle, après que ceux des angles seront placez, s'il se trouve des impairs, ils doivent être en multitude paires, comme 2, 4, ou 6, &c. ce qui se doit entendre prenant le nombre & son complément pour un seul nombre, car s'il n'y avoit qu'un impair, ou 3, ou 5, ou autre multitude impaire pour les deux lignes qu'il faut remplir, cela ne se pourroit; la raison est, que si les deux nombres des angles sont tous deux pairs, ou tous deux impairs, la somme des nombres qui restent à mettre en chaque ligne doit être impaire; à cause que la somme des nombres de la ligne doit être impaire, supposant que les nombres commencent par 1, & soient de suite. Si donc on avoit trois impairs, ou autre multitude impaire, il faudroit les mettre tous trois dans une même ligne pour la faire impaire, ou si l'on n'en mettoit qu'un, il en resteroit deux pour l'autre ligne, ce qui fera que cette portion de ligne sera impaire, sçavoir autrement qu'elle ne doit être, à cause des nombres qui sont aux angles, dont la somme est impaire, & joignant cette impaire à l'autre portion de ligne qui seroit aussi impaire,

paire; sçavoir, la portion qui est entre les deux angles, seroit toute la ligne paire; mais elle doit être impaire.

Que si le nombre de l'un des angles est pair, & l'autre impair, la somme des nombres qui restent à mettre à chaque ligne sera paire; & ainsi étant contraint de mettre à une des lignes un ou trois impairs, cela fera que la portion de la ligne qui est entre deux angles sera impaire, sçavoir autrement qu'elle ne doit être.

Ainsi après avoir fait la table de trois, qui est ci-dessous, pour faire l'enceinte exterieure de cinq, on a de reste les nombres 1, 3, 4, 6, &c. & leurs complémens, comme on voit ensuite. Si on met donc 1 à l'un des angles, & son complément 25 à l'angle opposé, & qu'à l'autre angle on mette le nombre suivant 3, il resteroit trois impairs dans la ligne superieure pour remplir les deux lignes, sçavoir 7, 9, 11, c'est pourquoi on ne pourra pas mettre 3 à cet angle, ni aucun autre impair, mais un pair comme 4, parce que mettant 4, il restera 4 impairs; sçavoir 3, 7, 9, 11, & on pourra achever la table de 5, comme on la voit ensuite.

1	3	4	6	7	9	11	12
25	23	22	20	19	17	15	14

1				4		1	23	20	17	4
	10	24	5			19	10	24	5	7
	8	13	18			11	8	13	18	15
	21	2	16			12	21	2	16	14
22				25		22	3	6	9	25

Troisiéme exemple de 6.

ON n'est pas obligé de prendre huit nombres de suite, & leurs complémens, pour faire la table interieure qui a quatre de côté; mais il suffit que quatre de ces nombres ayent même difference, & les quatre autres pareillement. Ainsi on pourra prendre 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11,

& leurs complémens, 26, 27, 28, 29, 33, 34, 35, 36, pour la table de quatre qui ſera

1	35	34	4
29	9	10	26
11	27	28	8
33	3	2	36

13	22	20	30	12	14
5	1	35	34	4	32
31	29	9	10	26	6
21	11	27	28	8	16
18	33	3	2	36	19
23	15	17	7	25	24

Et prenant pour les angles 13 & 14, & leurs complémens 24 & 23, on aura la figure de 6 ci-deſſus.

Quatriéme exemple de 6.

ON peut auſſi commencer les huit, & leurs complémens, de la table interieure de quatre, par un autre nombre que 1, & auſſi ne les point prendre de ſuite, comme on voit en la table ſuivante, en laquelle on a pour la table interieure de 4, les nombres 2, 4, 6, 8, 13, 15, 17, 19, & leurs complémens 18, 20, 22, 24, 29, 31, 33, 35. Laquelle table de 4 ſera,

2	33	31	8
24	15	17	18
19	20	22	13
29	6	4	35

A					B
1	34	27	26	16	7
9	2	33	31	8	28
14	24	15	17	18	23
25	19	20	22	13	12
32	29	6	4	35	5
30	3	10	11	21	36
D					C

Et prenant pour les angles 1 & 7, & leurs complémens 36, 30, on fera la derniere enceinte qui eſt l'exterieure des nombres qu'on voit à la figure ci-deſſus.

Cette derniere façon ſe trouve aſſez ſouvent difficile, car il peut arriver qu'on prendra pour les angles de tels nombres, que les lignes de l'enceinte exterieure ne pourront pas être remplies, ou ce ne ſera qu'après une re-

cherche ennuïeuſe. Par exemple, ſi on prenoit 10 & 16, & leurs complémens 27 & 21 pour les angles de l'enceinte exterieure, au lieu de 1, 7, 36, 30, on ne pourroit parfaire la figure, & on ſeroit contraint de prendre d'autres nombres pour les angles.

Pour voir maintenant de quels nombres il faut remplir les lignes, je conſidere combien il faut de reſte à chaque ligne, ou plûtôt à deux, ſçavoir à deux lignes qui ne ſoient point oppoſées l'une à l'autre : Par exemple, je cherche combien il faut pour achever la ligne A,B, & la ligne B,C, auſquelles on ſuppoſe déja les coins 1 7, & 7 36.

Or parce que chaque ligne doit contenir 111 en ſes ſix nombres, il faut pour la ligne A, B, prendre la ſomme de 1 & 7, qui eſt 8, & l'ôter de 111, reſtera 103 que doivent faire les quatre nombres qui reſtent à trouver pour la ligne A, B.

De même je prens la ſomme de 7 & 36, qui eſt 43, que j'ôte de 111, reſte 68 pour les quatre nombres qu'il faut mettre à la ligne B C.

Pour les deux autres lignes C D, & A D, il ne s'en faut pas mettre en peine; car elles s'enſuivent néceſſairement de leurs oppoſées A B, B C, puiſque l'une des lignes doit avoir les complémens de la ligne qui lui eſt oppoſée.

Je prens après les huit nombres qui reſtent, & les complémens au-deſſous, comme on voit ici.

3	5	9	10	11	12	14	16
34	32	28	27	26	25	23	21

103	
34	3
28	9
27	10
14	23

Puis j'écris à part la ſomme que doivent faire enſemble les quatre nombres de chacune des deux lignes, ſçavoir 103 & 68, & je cherche quatre nombres qui faſſent l'un de ces nombres, par exemple 103; mais afin de voir ſi on peut trouver quatre nombres qui faſſent

103, & quatre autres qui faſſent 68, il faut faire toutes les combinaiſons poſſibles. Premierement, je prendrai 34 & 32, qui enſemble font 66, & pour aller juſques à 103, il faut encore 37 pour deux nombres. Mais on ne peut trouver deux nombres qui faſſent 37, s'ils ne ſont complémens l'un de l'autre. Or il ne faut jamais mettre en une même ligne deux nombres qui ſoient les complémens l'un de l'autre, parce que le complément de chaque nombre ſe doit mettre en la ligne opposée, ce qu'il faut entendre pour cette méthode ſeulement; car il y a diverſes voyes par leſquelles on pourra bien faire, que deux nombres qui ſoient les complémens l'un de l'autre, ſe trouvent en même ligne.

Puis donc que 32 ne peut être avec 34, je prens le nombre ſuivant 28, qui avec 34 fait 62; & parce que la ligne doit avoir 103, les deux autres nombres doivent faire enſemble 41. Je prens donc le nombre qui ſuit 28, ſçavoir 27 qui avec 14 fait 41. Voilà pour la ligne A B.

Je viens maintenant à la ligne B C, qui doit avoir 68 en ſes quatre nombres, qui doivent être mis entre les coins B & C, & les quatre nombres qui reſtent ſont

	32	26	25	21
& leurs complémens qui ſont au-deſſous,	5	11	12	16

Je prens premierement 32, lequel étant joint à 26, donnera 58, & parce que la ligne doit avoir 68, il ne reſte plus que 10 qu'il faudroit faire avec deux nombres, ce qui ne ſe peut avec les quatre nombres reſtans, 25, 21, 16, 12.

Si on joint 32 à 25, ou même à 21, on tombera en même inconvenient, car 32 & 21 font 53, qui ôtés de 68 reſte 15, qu'il faut faire en deux nombres; mais il ne reſte plus que 12 & 11 qui font plus de 15.

Si on joint 32 à 16, on aura 48, qui ôtez de 68 reſtera 20, qui ne ſe peuvent faire par 11 & 12.

On ne ſçauroit paſſer plus outre, parce que ſi on joignoit 12 à 32, on ſeroit contraint de mettre auſſi en même ligne que 32 quelqu'un des nombres précedens, ce que néanmoins on a reconnu être impoſſible.

Il faut donc prendre un autre nombre que 32, puiſqu'il ne peut être en la ligne B C, & ce ſera le nombre ſuivant 26, qui étant joint à 25 fait 51, qui ôtez de 68, reſte 17, qu'il faut faire avec deux nombres pris dans les trois qui reſtent, qui ſont 21, 16, 5, car 32 en a déja été exclus. Mais 17 ne ſe peut faire avec ces nombres.

On joindra aprés 26 à 21 : la ſomme eſt 47, qui étant ôtée de 68, reſte 21, qu'il faudroit faire avec les deux nombres qui reſtent 12 & 5 ; mais parce qu'ils ſont trop petits pour cet effet, il ne faut point paſſer outre, car ce ſeroit encore pis, ſi on joignoit 26 à 16, ou 25 à 21.

Puis donc que cette ſeconde ligne B C ne ſe peut faire, il faut changer la premiere ligne A B.

Mais afin de n'omettre aucune façon par laquelle on la puiſſe faire, (car ſi on en laiſſoit quelqu'une, ce pourroit être celle dont on auroit beſoin) il faut continuer par le même ordre qu'on a commencé.

On avoit pris 34 & 28 pour les deux premiers nombres, & il reſtoit 41 à faire en deux nombres pour aller juſques à 103.

Pour faire ces 41 on avoit pris 27 & 14, leſquels n'ayant pas bien réüſſi, je cherche ſi on peut faire les mêmes 41 avec deux autres nombres, & je trouve 25 & 16.

Il reſtera donc pour la ſeconde ligne les quatre nombres 32 27 26 23
& leurs complémens 5 10 11 14

Si on examine ces nombres comme ci-devant, on trouvera qu'on ne peut en choiſir quatre d'entr'eux, qui enſemble faſſent 68, pourvû qu'il n'y en ait point deux qui ſoient complémens l'un de l'autre, car on pourroit bien prendre 27, 26, 10, 5, qui enſemble font 68 ; mais

parce que 27 & 10 ſont complémens l'un de l'autre, on ne pourroit avec eux parfaire la figure, comme il a été dit.

									103	
3	5	9	10	11	12	14	16		34	3
34	32	28	27	26	25	23	21		28	9
									25	12
									16	21

On ne peut donc pas faire la premiere ligne avec les quatre nombres 34, 28, 25, 16; & parce qu'on ne peut plus faire 41 avec deux autres nombres, (puiſque 23 & 21 qui reſtent à conſiderer font plus de 41) il faut changer 28, & mettre avec 34 le ſuivant 27.

On aura donc 34 & 27, dont la ſomme eſt 61, qui ôtée de 103, reſte 42, qu'il faut trouver en deux nombres, tous deux moindres que 27; car ſi l'un des deux nombres étoit plus grand que 27, & ſi c'étoit par exemple 28 & 14, ce ſeroit refaire la même choſe qu'on a ci-devant conſiderée & trouvée impoſſible, car on auroit les quatre mêmes nombres qu'on a eus auparavant, ſçavoir 34, 28, 27, 14.

Or les 42 qui reſtent ne ſe peuvent faire que par 26 & 16, car 25 & 21, ou 23 & 21 qui reſtent, ſont trop grands.

On aura donc 34, 27, 26, 16 pour la premiere ligne AB.

Pour la ſeconde BC, qui doit avoir 68, je prens premierement 32 & 28, qui enſemble font 60; mais parce qu'il faudroit faire 8 en deux nombres, il en faut mettre un autre avec 32, & afin de les avoir ſéparez de ceux de la premiere ligne, je les écrirai à part avec leurs complémens.

103		68					
34	3	28	9	32	28	25	23
27	10	23	14	5	9	12	14
26	11	12	25				
16	21	5	32				

Je joindrai donc 32 à 25, la ſomme eſt 57, qui ôtée de 68, reſte 11, qu'on ne peut faire en deux nombres, puiſque les deux moindres qui reſtent, ſçavoir 9 & 14, font plus de 11.

On aſſemblera après 32 & 23, la ſomme eſt 55, qui ôtée de 68, reſte 13; mais 9 & 12 qui reſtent font plus de 13.

Enfin on ajoûtera 32 à 14, la ſomme eſt 46, qui ôtée de 68, reſte 22; mais 12 & 9 qui reſtent ne font que 21, & ainſi on ne peut mettre 32 en cette ligne B C, puiſque parcourant tous les nombres avec 32, on ne peut trouver 68.

Il faut donc changer 32, & prendre le nombre ſuivant qui eſt 28, lequel étant joint avec 25 fait 53, qui étant ôtez de 68, reſte 15, qu'on ne peut faire avec les nombres ſuivans, puiſque les deux moindres 5 & 14 font plus de 15.

Après on ajoûtera 28 à 23 : la ſomme eſt 51, qui ôtée de 68, reſte de 17, qui ſe fait avec les deux nombres qui reſtent, ſçavoir avec 12 & 5.

On aura donc par ce moyen la table parfaite, car la premiere ligne A B ſera 34, 27, 26, 16, près deſquels nombres je mets leurs complémens 3, 10, 11, 21, qui doivent faire la ligne D C de la figure qui eſt ci-devant à la page 250, & qui eſt oppoſée à A B, & on mettra les nombres & les complémens vis-à-vis l'un de l'autre, comme on voit en la figure, en laquelle 3 eſt vis-à-vis de 34, 10 vis-à-vis de 27, & ainſi des autres.

La ligne B C ſe fera des nombres 28, 23, 12, 5, & la ligne A D qui lui eſt oppoſée ſe fera des complémens de

ces nombres, ſçavoir de 9, 14, 25, 32, qu'on voit en l'autre page vis-à-vis de 28, 23, 12, 5, & les autres, ſçavoir 9, 14, 25, 32 ſe doivent mettre auſſi chacun vis-à-vis de leurs complémens, ſçavoir 9 vis-à-vis de 28, 14 vis-à-vis de 23, &c.

On peut paſſer outre à examiner ſi on ne peut point faire cette table de 6 d'une autre façon, les coins demeurans comme ils ſont, & en leur même ſituation.

Premierement, il eſt bien certain que la ligne A B demeurant telle qu'elle eſt, on ne peut pas faire la ligne B C d'une autre ſorte, parce que ſi au lieu de 28 & 23, on prenoit 28 & 14, ou 15 & 23, les nombres qui reſteroient ne ſeroient pas ſuffiſans d'achever 68, parce que neceſſairement ils ſeroient moindres que ceux qui reſtent lorſqu'on prend 28 & 23.

3	5	9	10	11	12	14	16
34	32	28	27	26	25	23	21

103		68	
34	3	28	9
25	12	23	14
23	14	12	25
21	16	5	32

Il faut donc changer la ligne A B, dont les quatre nombres qui ſont entre les coins 1 & 7, doivent faire enſemble 103.

Et parce que l'on a déja pris 34 & 27, & qu'on ne peut faire les 42 qui reſtent par d'autres nombres que par 26 & 16, qui ont déja été employez, il faut changer 27, & prendre 26 avec 34, qui enſemble font 60, qui ôtez de 103, reſte 43, qu'on ne peut faire avec deux des nombres qui reſtent, & qui ſoient moindres que 26.

Il faut donc paſſer plus outre, & joindre 25 à 34, dont la ſomme eſt 59, qui ôtée de 103, reſte 44 qui ſe peuvent faire avec 23 & 21. La ligne A B ſera donc 34, 25, 23, 21.

Et

Et il faudra faire 68 en quatre nombres pour la ligne B C, avec les quatre qui restent, 5 9 10 11
& leurs complémens, qui sont 32 28 27 26

Mais on ne sçauroit trouver quatre de ces nombres selon la régle, qui est de ne point mettre un nombre & son complément en même ligne, qui fassent 68, d'où s'ensuit que la ligne A B ne peut pas être composée de 34, 25, 23, 21.

Si on veut passer outre, on ne pourra plus ajoûter aucun nombre avec 34, car on ne feroit que des répetitions de ce qui a été déja examiné : car si après 25 il faut prendre les deux plus grands nombres qui restent, sçavoir 23 & 21 ; si on mettoit 23 avec 34, on ne pourroit pas trouver deux nombres moindres que 23, qui fissent ensemble ce qu'il faudroit de reste pour achever 103, ainsi qu'il est requis.

Il faut donc abandonner 34, & se servir de 32, en le comparant aux nombres suivans, comme on a fait 34.

Je joins 32 à 28 : la somme est 60, qui ôtée de 103, reste 43, qu'on peut faire avec 27 & 16 seulement.

La ligne A B aura donc 32, 28, 27, 16 pour les quatre nombres qui sont entre ses coins 1, 7.

									103		68
3	5	9	10	11	12	14	16		32	5	
34	32	28	27	26	25	23	21		28	9	
									27	10	
									16	21	

Pour faire la ligne B C, qui doit être de 68, sans les coins, on se servira des nombres restans, qui sont

34 26 25 23
3 11 12 14

Si on prend 34 & 26, on aura 60, restera 8 qu'on ne peut pas faire en deux nombres ; & le même inconvenient arrive à 34 & 25, comme aussi à 34 & 23, qui ensemble

font 57, qui ôtés de 68, reste 11, qu'on ne sçauroit faire avec 11 & 12.

Pareillement si on se sert de 34 & 14, la somme est 48, qui ôtée de 68, reste 20, qui est encore moindre que la somme de 11 & 12 qui restent.

Il faut donc laisser 34, & se servir de 26, qui étant joint à 25, fait 51, qui ôté de 68, reste 17, qui se peut faire avec 14 & 3.

La seconde ligne B C sera donc de 26, 25, 14, 3.

103		68	
32	5	26	11
28	9	25	12
27	10	14	23
16	21	3	34

On disposera la premiere ligne au-dessous de 103, & les complémens à côté, & de même la seconde ligne au-dessous de 68, afin de les disposer après en leur place en ce même ordre pour avoir la figure suivante, en laquelle la figure interieure de 4 de côté est la même que ci-devant.

Si on vouloit passer outre à la recherche d'autres figures, il faudroit joindre 32 à 25 : la somme est 59, qui ôtée de 103, reste 44, qu'on fera en prenant 23 & 21, & ainsi on auroit pour la premiere ligne 32, 27, 23, 21, mais on ne pourra composer la seconde ; de sorte qu'il faut changer la premiere.

A B

1	32	28	27	16	7
11	2	33	31	8	26
12	24	15	17	18	25
23	19	20	22	13	14
34	29	6	4	35	3
30	5	9	10	21	36

D C

Si on joint 32 à 26 ou à 25, on ne pourra faire 103, c'est pourquoi il faut laisser 32, & considerer 28, qui étant

joint à 27, donne 55, qui ôté de 103, reste 48, qui seront faits par 25 & 23. On aura donc pour la premiere ligne 28, 27, 25, 23, mais on ne pourra faire la seconde ligne qui doit être de 68, avec les nombres qui restent.

Il faudroit donc réformer encore la premiere ligne, ce qui ne se peut, parce qu'ayant pris les quatre nombres 28, 27, 25, 23, si l'on change quelqu'un des deux premiers 28 & 27, on ne pourra prendre que 26 au lieu de l'un d'eux; mais il faudroit en même temps augmenter 23 ou 25, ce qui ne se peut, parce qu'entre les nombres qu'on peut choisir, & dont on se peut servir, il n'y a que le même 26 qui soit plus grand qu'eux.

Il est donc manifeste, que laissant la Table intérieure de 4 en l'état qu'elle est, & les coins 1 & 7, avec leurs complémens, on ne peut faire que les deux Tables de 6 cy-devant écrites, qui sont marquées A B C D, si ce n'est que l'on veüille considérer l'ordre des nombres, chacun demeurant dans la même ligne sans en sortir; mais il sera parlé cy-après de cette variation.

Que si on vouloit rechercher plus outre, il faudroit mettre un autre nombre que 7 à l'un des angles, & les ayant tous éprouvez à cet angle, on changeroit aussi l'angle où l'on a mis 1, mettant à la place le nombre suivant qui est 3, & son complément 34 à l'angle opposé; & à l'autre angle qui borne la même ligne, on mettroit le nombre suivant 5, puis 7, & les autres.

Exemple d'une Table de 8.

IL faut maintenant donner l'exemple de la fabrique d'une autre Table, sur laquelle on se puisse conduire, pour en former d'autres plus grandes, qui sera celle qui a 8 à chacun de ses côtez.

J'arrange premierement la moitié des nombres de suite, sçavoir jusques à 32, & leurs complémens au-dessous, & chaque couple de nombres fera 65, sçavoir autant que

les deux extrêmes ensemble 64 & 1, & ce 65 est la valeur que doivent avoir deux nombres l'un portant l'autre en chaque ligne; & ainsi le premier quarré qui est de 4 aura deux fois 65, qui font 130; le second qui a six nombres aura 195, sçavoir trois fois 65; & le dernier qui est l'enceinte exterieure, & qui a huit nombres en chaque ligne, contiendra 260.

Voici donc les nombres de suite ainsi qu'il les faut ranger.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33

Ayant ainsi disposé les nombres, je prens les huit premiers & leurs complémens, sçavoir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, desquels je fais, comme il a été montré cy-devant, la Table suivante de 4.

1	63	62	4
60	6	7	57
8	58	59	5
61	3	2	64

Après je prens les dix nombres suivans & leurs complémens, pour l'enceinte suivante, qui sera le quarré ou Table de 6. Ces nombres sont,

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
56	55	54	53	52	51	50	49	48	47

Avec ces nombres on fera la derniere enceinte de la Table de 6, par quelqu'une des façons cy-devant déduites.

Ou bien on prendra une des Tables de 6 qui sont cy-devant; par exemple, la premiere qui est en la page 241, qui est repetée ici.

9	25	26	23	18	10
16	1	35	34	4	21
20	32	6	7	29	17
24	8	30	31	5	13
15	33	3	2	36	22
27	12	11	14	19	28

Ayant cette Table, je remarque où ſont les 18 premiers & moindres nombres qui ſont la moitié des nombres de la Table, & les laiſſe en leurs places ; mais au lieu des 18 autres, je mets les complémens pris ſur le quarré 64, comme on les a mis cy-devant : mais afin de ne ſe point troubler, on pourra écrire les nombres de la Table de 6, & leurs complémens au-deſſous pris ſur 36, & au-deſſous de ceux-là les complémens pris ſur 64, comme on voit ici.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19
64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47

La premiere ligne contient les nombres qui appartiennent à chacune des deux Tables, tant à celle qu'on prend pour patron, que celle qui fait partie de la Table de 8.

La ſeconde ligne appartient à la Table de 6, qui eſt cy-deſſus, & qui ſert de patron, & contient les complémens de la premiere ligne, & chaque couple de nombres fait 37.

La troiſiéme contient les complémens de la premiere ligne, & appartient à la Table de 6, qui fait partie de celle de 8, & chaque couple de nombres fait 65.

Cela fait, il faut mettre à part le reſte des nombres juſques à 32, & leurs complémens au-deſſous, comme on voit ici.

19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33

Après on prendra pour les coins de la derniere enceinte les moindres nombres 19 & 20, & leurs complémens 46, 45 : ce n'eſt pas pourtant qu'on ne puiſſe prendre d'autres nombres que 19 & 20, car cela eſt viſible, vû que la figure ſe peut faire en beaucoup de façons.

Maintenant je ferai facilement la Table de 6 ſur la précédente, laiſſant les nombres de la premiere ligne au lieu où on les trouvera, & mettant ceux de la troiſiéme ligne à la place de ceux de la ſeconde : & ainſi on aura la figure ſuivante.

19							20
	9	53	54	51	18	10	
	16	1	63	62	4	49	
	48	60	6	7	57	17	
	52	8	58	59	5	13	
	15	61	3	2	64	50	
	55	12	11	14	47	56	
45							46

J'aſſemble 19 & 20, la ſomme eſt 39, que j'ôte de 260, qui eſt la ſomme que doivent faire les nombres de chaque ligne, reſte 221 pour les ſix nombres, qu'il faut mettre entre 19 & 20.

Pareillement j'aſſemble 20 & 46, la ſomme eſt 66, qui ôtez de 260, reſte 194 pour les ſix nombres qui doivent être entre 20 & 46.

On peut voir auſſi quelle doit être la ſomme des ſix nombres, qui ſeront entre 19 & 45, & cette ſomme ſera 196, afin que ſi on trouvoit 196 avant 194 on s'en pût ſervir.

Je fais premierement la ligne 19, 20, & parce que 19, 20, ſont les moindres nombres des coins, je prens des plus grands nombres qui reſtent pour ſuppléer à leur défaut. Je conſidererai donc les quatre plus grands, 44, 43, 42, 41, dont la ſomme eſt de 170 : & parce que les ſix nombres doivent valoir enſemble 221, il reſte 51 pour

les deux nombres qui ſont encore à trouver. On prendra donc 25 & 26, qui enſemble font 51 : cette premiere ligne ſera donc 44, 43, 42, 41, 26, 25, entre les coins 19 & 20.

Reſte à trouver les ſix nombres qu'il faut à la ligne qui a 20 & 46 à ſes extremitez, leſquels ſix nombres doivent faire enſemble 194, & les ſix nombres de la ligne oppoſée, dont les extremitez ſont 19, 45, doivent faire enſemble 196, leſquels nombres on doit choiſir parmi les ſuivans,

27	28	29	30	31	32
38	37	36	35	34	33

Je diviſe 194 par ſix, pour voir ce que doivent avoir les nombres l'un portant l'autre : je trouve 32, & reſte 2; d'où s'enſuit que les nombres pris deux à deux doivent faire 64, mais l'un des couples doit faire 66, ainſi on aura deux couples de nombres de 64 chacun, & un couple de 66, qui font les ſix nombres, car on ne peut pas faire deux couples de 65 par exemple, & un de 64, parce qu'il eſt impoſſible de faire 65 en deux nombres, ſi on ne prend les deux, qui ſont complémens l'un de l'autre; ce qui eſt directement contre la principale & generale regle, qui eſt,

Que jamais dans la conſtruction qu'on donne ici, on ne doit mettre en même ligne deux nombres qui ſoient complémens l'un de l'autre, c'eſt-à-dire, qui étant joints enſemble faſſent autant que les deux extrêmes enſemble, qui ſont ici 64 & 1.

On cherchera donc deux couples de nombres qui faſſent 64, & un couple qui faſſe 66, on aura 33, 31; 35, 29, & 38 28. Les 37 & 27 font 64; mais parce qu'un des couples doit avoir deux de plus, on prend 38 au lieu de 37, & 28 au lieu de 27.

Les ſix nombres ſeront donc 28, 29, 31, 33, 35, 38, qu'il faut mettre entre 20, 46, & les ſix autres qu'il faut

mettre en la ligne opposée, entre 19, 45, sont leurs complémens, sçavoir 37, 36, 34, 32, 30, 27, qui seront disposez selon cet ordre, en telle sorte que les complémens soient toujours vis-à-vis l'un de l'autre; & ainsi on aura la figure suivante.

19	44	43	42	41	26	25	20
37	9	53	54	51	18	10	28
36	16	1	63	62	4	49	29
34	48	60	6	7	57	17	31
32	52	8	58	59	5	13	33
30	15	61	3	2	64	50	35
27	55	12	11	14	47	56	38
45	21	22	23	24	39	40	46

On pourra encore faire ces lignes d'une autre sorte; sçavoir, prenant 34, 32 pour le couple qui doit faire 66, & 35, 29; 37, 27 pour les deux autres; & ainsi les six nombres qu'il faudroit mettre entre 20 & 46, seroient 27, 29, 32, 34, 35, 37.

Et les six autres qui doivent être mis entre 19, 45, seroient leurs complémens; sçavoir 38, 36, 33, 31, 30, 28, avec lesquels on aura une autre figure.

20 27 29 32 34 35 37 46 *à la place de* 20 28 29 31 33 35 38 46
& 19 38 36 33 31 30 28 45 *à la place de* 19 37 36 34 32 30 27 45

On pourroit encore faire 194 par d'autres couples, prenant 30 & 36 pour faire 66, & les deux autres couples de 64, qui seront 27, 37, & 31, 33, & les six nombres qu'on mettra entre 20 & 46, seront 27, 30, 31, 33, 36, 37; & entre 19, 45, on mettra leurs complémens 38, 35, 34, 32, 29, 28.

On se peut encore servir d'autres manieres pour trouver 194, ou 196, sans considerer ni prendre les couples des nombres, ainsi qu'on a fait pour la derniere enceinte des précédentes figures de six; ce qui seroit trop long à repeter ici, vû même qu'on en donnera des exemples, & qu'on

qu'on s'en ſervira en quelqu'une des lignes de la figure ſuivante.

Exemple d'une Table de 14.

AFin qu'on puiſſe voir toutes les façons de choiſir les nombres pour remplir les lignes des enceintes diverſes de la figure, on donnera encore l'exemple d'une Table de 14.

Et parce qu'en cette méthode-cy il n'y a que trois façons de ranger les nombres, on prendra le quarré de 8, (conſideré comme faiſant partie du quarré de 14) ſur le modele du quarré précédent de 8, & enſuite l'enceinte de 10 ſe fera d'une façon, celle de 12 d'une autre, & l'enceinte exterieure, qui eſt celle de 14, encore d'une autre.

Je mets donc premierement de ſuite les nombres qui doivent remplir les 196 places du quarré, & les diſpoſe en deux lignes; ſçavoir la moitié dans une des lignes, & l'autre moitié qui ſert de complément à la premiere, dans l'autre ligne au-deſſous de la premiere, en telle ſorte que chaque couple de nombres faſſe 197, qui eſt la ſomme des deux nombres extrêmes, comme on voit cy-deſſous.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186	185
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
184	183	182	181	180	179	178	177	176	175	174	173
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
172	171	170	169	168	167	166	165	164	163	162	161
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
160	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
148	147	146	145	144	143	142	141	140	139	138	137

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
136	135	134	133	132	131	130	129	128	127	126	125
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
124	123	122	121	120	119	118	117	116	115	114	113
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
112	111	110	109	108	107	106	105	104	103	102	101
97	98										
100	99										

Ces nombres étant ainsi disposez, je prens les 32 premiers, & leurs complémens, pour faire le quarré interieur de 8 en la même façon qu'on a fait le précédent de 8, ou si on veut on le fera sur son modele, laissant les 32 premiers nombres en la même place qu'ils sont au précédent; mais pour les nombres qui surpassent 32, il les faudra changer aux complémens correspondans pris sur 196; & afin que cela se puisse faire plus aisément & sans être en danger de prendre un nombre pour un autre, on écrira les 64 nombres de la précédente Table de 8 en deux lignes, qui serviront de complément l'une à l'autre; & au-dessous de cette seconde, on en mettra une troisiéme qui contiendra les 32 premiers complémens de la page précédente, sçavoir depuis 196 jusques à 165, qui est dessous 32.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53
196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186	185
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41
184	183	182	181	180	179	178	177	176	175	174	173
25	26	27	28	29	30	31	32				
40	39	38	37	36	35	34	33				
172	171	170	169	168	167	166	165				

Et laiſſant les nombres de la premiere ligne en même place dans la figure B, qu'on la voit dans la figure A, on mettra dans la figure B ceux de la troiſiéme ligne, aux mêmes places que ceux de la ſeconde ligne ſont dans la figure ſuivante A, comme l'on voit ici.

	19	44	43	42	41	26	25	20	19	176	175	174	173	26	25	20	
	38	9	53	54	51	18	10	27	170	9	185	186	183	18	10	27	
	36	16	1	63	62	4	49	29	168	16	1	195	194	4	181	29	
A	33	48	60	6	7	57	17	32	165	180	192	6	7	189	17	32	B
	31	52	8	58	59	5	13	34	31	184	8	190	191	5	13	166	
	30	15	61	3	2	64	50	35	30	15	193	3	2	196	182	167	
	28	55	12	11	14	47	56	37	28	187	12	11	14	179	188	169	
	45	21	22	23	24	39	40	46	177	21	22	23	24	171	172	178	

Pour avoir plus de facilité à faire ces Tables, il faut mêler les nombres le moins qu'on peut, c'eſt-à-dire les prendre de ſuite autant que faire ſe pourra. Par exemple, le plus grand d'entre les moindres nombres de la Table précédente B, eſt 32; or on appelle les moindres nombres ceux de la premiere ligne, ſçavoir depuis 1, juſques à 98, & les grands nombres, ceux de la ſeconde ligne qui ſont les complémens des premiers, depuis 99, juſques 196 incluſivement.

Je prens donc 33 & 34, & leurs complémens, pour les angles de la figure de 10, qui entoure la précédente de 8; & parce qu'entre les angles de chaque ligne de l'enceinte de 10, il y a huit nombres, je prens les ſeize nombres qui ſuivent 34, & leurs complémens, pour deux lignes prochaines, & qui font un des angles de la figure, & pour les deux autres lignes qui leur ſont oppoſées. Ces nombres ſont,

35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
162	161	160	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149	148	147

Je prens aprés les deux nombres suivans 51 & 52, & leurs complémens, pour les angles de la suivante enceinte de 12, & les vingt nombres suivans, & leurs complémens pour les lignes.

Enfin on prendra le reste des nombres pour la derniere enceinte : ce n'est pas qu'il faille necessairement suivre cet ordre ; car on peut entremêler les nombres comme on veut, & en prendre au commencement, au milieu, & à la fin pour une même ligne : mais on trouvera plus de facilité en suivant l'ordre précédent.

Or voici les trois voyes dont on se pourra servir pour parfaire les lignes, aprés que les coins sont remplis ; mais avant tout, il faut observer ce qui est commun à toutes ces voyes, & ce qui se doit pratiquer auparavant.

Je suppose donc premierement, que les nombres soient aux angles de la figure, & leurs complémens aux angles opposez, comme on voit ici, où 164 complément de 33, est opposé à 33, & 163 complément de 34, est opposé à 34.

33	34
163	164

Cela fait, je considére ce que tous les dix nombres de l'enceinte doivent faire ensemble ; & pour trouver cette somme, on remarquera que deux nombres l'un portant l'autre doivent faire 197, & cela doit être dans toutes les lignes de chaque enceinte, lequel 197 est la somme de 196 & 1, qui sont les deux extrêmes de tous les nombres qui composent la figure de 14.

Or si chaque couple de nombres doit faire 197, les dix nombres, qui sont cinq couples, feront 985, sçavoir cinq fois 197. Puis donc que chaque ligne doit avoir 985, pour sçavoir quelle somme doivent faire les huit nombres qu'il faut mettre entre 33 & 34, il faut ôter de 985 la somme de 33 & 34, qui est 67, & il restera 918 pour les huit nombres.

Semblablement j'ôte de 985 la ſomme de 34 & 164, qui eſt 198, reſtera 787 pour les huit nombres qu'il faut mettre entre 34 & 164; & cette opération doit être faite à chaque enceinte après que les angles ſont poſez.

Pour les deux lignes oppoſées, ſçavoir 163, 164, ou 33, 163, il ne s'en faut pas mettre en peine; car leurs oppoſées étant faites, neceſſairement elles le ſeront auſſi en y mettant les complémens de leurs oppoſées. Il eſt vrai que pour l'opération précédente, qui ſert à trouver combien les nombres qu'on doit mettre entre les angles doivent faire enſemble, on ſe peut ſervir de deux telles lignes qu'on voudra, pourvû qu'elles ne ſoient pas oppoſées l'une à l'autre. Par exemple, au lieu d'ôter de 985 la ſomme de 33 & 34, on pourroit ôter la ſomme de 163 & 164; & au lieu de la ſomme de 34 & 164, on pourroit prendre celle de 33 & 163, car cela eſt indifferent.

La premiere méthode de trouver les nombres de chaque ligne ſert pour avoir toutes les façons poſſibles de faire & remplir la ligne avec les nombres donnez; & à cauſe que par cette méthode on compare chaque nombre avec tous les autres, il s'enſuit qu'on ne doit pas s'en ſervir lorſqu'il y a beaucoup de nombres en la ligne, parce que cela ſeroit trop long, mais on s'en ſervira utilement lorſqu'il y a peu de nombres; c'eſt pourquoi nous la prendrons ici pour remplir les lignes de l'enceinte de 10, en chacune deſquelles lignes il y a huit nombres, ſans les coins qui ſont 33, 34, & leurs complémens 164, 163.

Les huit nombres d'une des lignes, ſçavoir de celle qui eſt entre 34 & 33, doivent faire enſemble 918, qu'il faut mettre à part au-deſſous de 34, 33, & les nombres qui doivent être mis entre 34 & 164, feront enſemble 787 que je mets auſſi à part afin de ne rien confondre.

34	33	34	164
918		787	

Les nombres des deux lignes & leurs complémens, sont

35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
162	161	160	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149	148	147
│	│	│	│	│	│	│		│							

Pour faire 918, parce que le nombre est grand, & qu'il doit récompenser la petitesse de 34, 33, je prens les quatre plus grands nombres, sçavoir 162, 161, 160, 159, qui ensemble font 642, qui ôtez de 918, restera 276 pour les quatre nombres restans. Pour faire 276, je ne puis pas me servir des deux nombres suivans 158, 157, parce qu'ils feroient plus de 276, ni même des deux moindres de la seconde ligne, sçavoir de 148, 147, parce qu'ils font aussi plus de 276. Mais si on prenoit les quatre plus grands de la premiere ligne, sçavoir 47, 48, 49, 50, la somme seroit moindre que 276, c'est pourquoi il faudra prendre un des nombres de la seconde ligne, & trois de la premiere. Prenons, par exemple, 158, restera 118, mais 118 ne se peut faire avec trois nombres de cette ligne; car les trois moindres sont 40, 41, 42, qui ensemble font 123, qui est 5 plus que 118.

Il faut donc diminuer 158. Je prens 155 au lieu de lui, qui ôtez de 276, restera 121 qu'il faut faire en trois nombres; ce qui ne se peut point encore, non plus qu'avec 157 & 156; mais prenant 154, il restera 122, qui se feront avec 39, 41, 42.

Et ainsi on pourra éprouver à faire la ligne, en prenant 153, 152, & les autres.

Et pour continuer la recherche des differentes sortes de lignes qu'on peut faire avec les seize nombres, & leurs complémens, je change le dernier des quatre nombres premierement pris, & mets 158 au lieu de 159, & j'aurai 162, 161, 160, 158, qui ensemble font 641, qui ôtez de 918, reste 277, qu'il faut faire avec quatre nombres, desquels on a reconnu cy-devant que l'un devoit être de

la ſeconde ligne, & les trois autres de la premiere.

Je prens donc 157, qui ôtez de 277, reſte 120, qu'on ne ſçauroit faire avec trois nombres; car ſi on prend les trois moindres 38, 41, 42, on aura 121. Il faut donc diminuer 157, & prendre 156, qui ôtez de 277, reſtera 121, qu'on fera avec trois nombres, ſçavoir avec 38, 40, 43.

On pourroit continuer cette recherche prenant un autre nombre que 156, puis diminuant encore 158, & revenant après à faire la même choſe à 160, 161, & enfin à 162. Ce qui ſeroit trop long à déduire.

La premiere ligne entre 33 & 34, ſera donc 162, 161, 160, 158, 156, 38, 40, 43.

Pour la ſeconde ligne qui eſt entre 34 & 164, & dont les huit nombres doivent faire enſemble 787, je cherche à la faire comme s'enſuit, avec les nombres qui reſtent; ſçavoir,

42	44	45	46	47	48	49	50
155	153	152	151	150	149	148	147

Parce que la ſomme des angles 14 & 164 eſt 198, qui ne differe que de l'unité de 197, qui eſt la ſomme de chaque couple de nombres l'un portant l'autre, il faudra prendre quatre nombres de la ligne inferieure, & quatre de la ſuperieure, à telle condition toutefois qu'on prenne une quotité impaire de nombres impairs, afin que la ſomme ſoit impaire, comme eſt 787. Je prendrai donc par exemple 155, 153, 152, 150: la ſomme eſt 610, qui ôtée de 787, reſte 177, qu'on ne peut pas faire avec quatre nombres, car les quatre qui reſtent ſont 46, 48, 49, 50, qui enſemble font 193: & ſi je prens 147 au lieu de 150, la ſomme ſera encore trop petite.

Et parce que la difference de 193 à 177 eſt grande, je diminuë tout à coup 152 de beaucoup, & ſans s'amuſer à prendre 151, ou 150, l'on prendra d'abord les quatre

nombres 155, 153, 148, 147, dont la somme eſt 603, qui ôtée de 787, reſte 184; mais les quatre nombres qui reſtent, ſçavoir 45, 46, 47, 48, ſont 186. Ils ſeront donc trop grands de 2, & ainſi il faudra diminuer 153. Je prens 152 en ſa place, & laiſſe 148 & 147, puiſque 153 n'eſt diminué que de 1.

On aura donc 155, 152, 148, 147, dont la ſomme eſt 602, qui ôtée de 787, reſte 185: les quatre nombres qui reſtent ſont 44, 46, 47, 48, dont la ſomme eſt 185, ainſi qu'il eſt requis. On a donc les nombres qui doivent être entre 34 & 164, qui ſeront 155, 152, 148, 147, 44, 46, 47, 48.

Mais ſi on vouloit chercher plus outre, on diminuëroit encore 152, prenant d'autres nombres que 148 & 147.

Et enfin on diminuëroit le premier nombre 155, prenant 153 en ſa place, & cherchant comme devant, on trouvera que les huit nombres ſuivans 153, 152, 150, 147, 49, 48, 46, 42 étant joints enſemble, ſont 787.

Je mets donc au-deſſous de 918, les nombres de la ligne 34, 33, cy-devant trouvez; & au-deſſous de 787, ceux de la ligne 34, 164, & leurs complémens à côté, comme on voit ici.

34 — 918 — 33		34 — 787 — 164	
162	35	153	44
161	36	152	45
160	37	150	47
158	39	147	50
156	41	49	148
43	154	48	149
40	157	46	151
38	159	42	155

Ces nombres étant ainſi diſpoſez, je les range à l'entour

tour de la figure de 8 marquée B en la page 267, entre leurs angles qui sont marquez au-dessus d'iceux, & en fais la figure suivante de 10.

34	162	161	160	158	156	43	40	38	33
153	19	176	175	174	173	26	25	20	44
152	170	9	185	186	183	18	10	27	45
150	168	16	1	195	194	4	181	29	47
147	165	180	192	6	7	189	17	32	50
49	31	184	8	190	191	5	13	166	148
48	30	15	193	3	2	196	182	167	149
46	28	187	12	11	14	179	188	169	151
42	177	21	22	23	24	171	172	178	155
164	35	36	37	39	41	154	157	159	163

Mais cette méthode est trop longue, quoi qu'elle soit de grande commodité aux petites figures, comme de six ou huit nombres à chaque côté : toutefois on pourroit choisir tels nombres pour les angles & pour les lignes qu'on se trouveroit si embarrassé, qu'on seroit obligé de recourir à cette voye, si on ne vouloit point changer les nombres ; & c'est ici le dernier refuge : car puisque par cette méthode on trouve toutes les façons de faire les lignes avec les nombres donnez, si on la met en pratique, nécessairement elle découvrira, (si on la suit de point en point & sans rien omettre) si la ligne se peut parfaire avec les nombres dont on se veut servir.

Il la faudroit aussi necessairement mettre en usage, si on vouloit avoir toutes les façons possibles de faire une Table sans changer les nombres de chaque enceinte.

Maintenant il faut passer aux deux autres voyes, par l'une desquelles on fera l'enceinte de 12, & par l'autre la derniere qui est de 14.

Il faut premierement sçavoir combien chaque ligne doit avoir en l'enceinte de 12 ; ce qui se fait multipliant

197 par 6, le produit ſera 1182, car puiſque chaque couples de nombres, l'un portant l'autre, doit faire 197, les ſix couples, qui ſont douze nombres, feront 1182.

Je choiſis après les deux nombres qu'il faut mettre aux angles; on a pris pour la Table précédente tous les nombres juſques à 50, & leurs complémens; on prendra pour ces deux angles ici les deux nombres ſuivans, ſçavoir 51, 52, & leurs complémens 146, 145, qui ſeront diſpoſez aux angles de la figure, comme on voit ici.

51	52
145	146

J'aſſemble après 51 & 52, la ſomme eſt 103, qui ôtée de 1182, qui eſt la ſomme des douze nombres de la ligne, reſte 1079 pour les dix nombres qui reſtent à mettre entre 51 & 52.

Pareillement j'aſſemble 51 & 145, la ſomme eſt 196, qui ôtée de 1182, reſte 986 pour les dix nombres qui doivent être entre 51 & 145.

51	52	51	145
1079		989	

Cela fait, je prens les vingt nombres qui ſuivent 52, & leurs complémens, car il en faut dix en chacune des lignes entre les angles.

53	54	55	56	57	58	59	60	61	62
144	143	142	141	140	139	138	137	136	135
|	|	|	|						
63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
134	133	132	131	130	129	128	127	126	125

Seconde méthode. Pour cette enceinte on ſe ſervira de la ſeconde méthode qui eſt la plus facile de toutes, & ſe fait comme s'enſuit.

Je diviſe 1079 par 10, à cauſe que les dix nombres doivent faire 1079; tous enſemble on aura 108 moins 1;

de ſorte que neuf des nombres vaudront 108, & le dixiéme vaudra 107 : (ce qui ſe doit entendre l'un portant l'autre) chaque couple de nombres vaudra donc 216, excepté une qui ne vaudra que 215.

Mais parce qu'il n'y a que deux nombres qui puiſſent faire 216, ſçavoir 144 & 12, il faudra prendre quelques-uns des plus grands nombres, afin que les autres en ſoient d'autant diminuez. Par exemple, on prendra 144 & 143, dont la ſomme eſt 287, qui ôtée de 1079, reſte 792, qui diviſé par 8, à cauſe des huit nombres qui reſtent, on aura 99 : chaque couple de nombres vaudra donc 198, & il y a quatre couples.

On obſervera de faire en ſorte que les nombres qui reſteront pour l'autre ligne, ſoient de ſuite le plus qu'on pourra, car on y trouvera plus de facilité.

On fera aiſément 198 pluſieurs fois, & tant qu'on voudra, comme ſi on prend 142, 56, | 140, 58, | 138, 60, | & 136, 62. |

Mais on le peut encore trouver d'une autre ſorte, prenant des couples de nombres qui vaillent plus de 198, & d'autres qui vaillent d'autant moins, car il arrive par fois qu'on ne peut trouver deux nombres qui faſſent ce qui eſt requis.

Si donc je ne pouvois faire 198 en deux nombres, j'en prendrois deux qui faſſent par exemple 188, ſçavoir 125 & 63, & en échange il en faudroit prendre deux qui fiſſent enſemble 208, comme 142, 66.

Le premier couple vaut 10 moins que 198, & le ſecond vaut 10 plus : je prendrai aprés 126, 64, qui font enſemble 190, qui eſt huit moins que 198 ; & en échange je prendrai 141, 65, dont la ſomme eſt 206, qui ſurpaſſe 198 de huit.

On aura donc 144, 143, 142, 141, 125, 126, 63, 64, 65, 66, pour les dix nombres qu'il faut mettre entre 51, 52.

Pour la ligne 51, 145, je diviſe 986 par dix, & je trou-

ve 98, & reste 6; ce qui me montre qu'il y aura six nombres qui auront 99 l'un portant l'autre, & quatre qui auront 98.

Il faudra donc trouver trois couples de nombres, dont chacune sera 198, double de 99, & deux couples de 196 chacune.

Je marque les nombres de la ligne précedente avec une petite ligne ou tiret au-dessous, & me sers des dix qui restent, qui étant de suite en quotité paire, (car il y en a premierement six de suite, & puis quatre, ce qu'il faut observer le plus qu'on peut pour la facilité, sçavoir que les nombres qui suivent soient en quotité paire) il sera facile de trouver des couples de 198 & de 196; les trois couples de 198 seront 140, 58, | 138, 60, | & 136, 62. | Les deux couples de 196 seront 67, 129, | & 69, 127: on aura donc 140, 138, 136, 129, 127, 69, 67, 62, 60, 58 pour la ligne 51, 145.

Ayant ces nombres, afin de ne se point méprendre & de n'être point en danger de les mettre en une ligne autre que celle où ils doivent être mis, & aussi pour avoir plus en mains leurs complémens, on mettra les nombres de chaque ligne au-dessous des deux nombres qui sont aux angles qui la bornent, comme on voit cy-dessous, & leurs complémens à côté.

51	52	51	145
1079		986	
144	53	140	57
143	54	138	59
142	55	136	61
141	56	129	68
125	72	127	70
126	71	69	128
63	134	67	130
64	133	62	135
65	132	60	137
66	131	58	139

Puis on diſpoſera ces lignes autour de la figure de dix cy-devant trouvée, & l'on aura la figure ſuivante de douze.

73													74
	51	144	143	142	141	125	126	63	64	65	66	52	
	140	34	162	161	160	158	156	43	40	38	33	57	
	138	153	19	176	175	174	173	26	25	20	44	59	
	136	152	170	9	185	186	183	18	10	27	45	61	
	129	150	168	16	1	195	194	4	181	29	47	68	
	127	147	165	180	192	6	7	189	17	32	50	70	
	69	49	31	184	8	190	191	5	13	166	148	128	
	67	48	30	15	193	3	2	196	182	167	149	130	
	62	46	28	187	12	11	14	179	188	169	151	135	
	60	42	177	21	22	23	24	171	172	178	155	137	
	58	164	35	36	37	39	41	154	157	159	163	139	
	145	53	54	55	56	72	71	134	133	132	131	146	
123													124

Cette méthode eſt la plus facile de toutes, mais il ſeroit aiſé de la découvrir en voyant la figure, ſi l'on n'y apporte un peu d'artifice ; ce qui ſe pourra faire en mêlant davantage les nombres.

Par la troiſiéme méthode les figures ſont renduës plus embaraſſées, parce que ſuivant ce qu'elle ordonne, on ne s'étudie pas à prendre les nombres de ſuite, comme on a fait cy-devant ; mais on les prend par hazard ſelon qu'ils ſe rencontrent, conſidérant toutefois à peu-près ce qu'il faut pour parfaire la ligne.

On fera la même opération qu'aux précédentes, pour ſçavoir combien chaque ligne doit avoir, ſçavoir multipliant 197 par 7 ; (car 197 eſt la ſomme de chaque couple de nombres l'un portant l'autre par toute la figure, & y ayant quatorze nombres en chaque ligne de cette derniere enceinte, on aura ſept couples) ſi donc on multiplie 197 par 7, le produit ſera 1379, qui eſt la ſomme des quatorze nombres de chaque ligne de la derniere enceinte.

Je prendrai donc comme cy-devant, pour les angles deux nombres qui s'entresuivent; par exemple, les deux moindres de ceux qui restent, sçavoir 73, 74, & leurs complémens 124, 123, & je les disposerai comme on voit ici, & ainsi qu'ils doivent être dans la figure, & qu'ils seront après appliquez sur les angles de la figure de douze, comme l'on voit de l'autre part.

73	74
123	124

J'assemble après 73 & 74: la somme est 147, qui ôtée de 1379, (qui est la somme des quatorze nombres de chaque ligne) reste 1232 pour les douze nombres qu'il faudra mettre entre 73 & 74.

Je prens aussi la somme de 73 & 123, qui est 196, qui ôtée de 1379, reste 1183 pour les douze nombres qui doivent être mis entre 73 & 123.

On disposera après de suite les vingt-quatre nombres qu'il faut mettre dans ces lignes, & leurs complémens.

75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
122	121	120	119	118	117	116	115	114	113	112	111
87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98
110	109	108	107	106	105	104	103	102	101	100	99

Je dispose comme cy-devant les nombres qu'il faut pour chaque ligne, lesquels on vient de trouver.

Pour remplir ces lignes par la troisiéme méthode: Par exemple, la ligne qui doit avoir 1232,

73	74	73	123
1232		1183	

je vois que les nombres des angles sont tous deux petits, c'est pourquoi il faudra se récompenser aux douze nombres qu'on cherche, & pour cet effet prendre davantage des nombres de la seconde ligne, que de ceux de la pre-

miere ; & sur tout observer, que les nombres impairs qu'on prendra soient en quotité paire, afin qu'ils puissent faire un nombre pair tel qu'est 1232. Je prens donc par exemple les nombres qui s'ensuivent, que je mets au-dessous de 1232.

1232	
—122	75
—121	76
—120	77
——78	119
——79	118
117	
116	
115	
83	
113	
——85	112
111	
1260	

La somme de ces nombres est 1260, mais il ne falloit trouver que 1232, qui ôtée de 1260, reste 28. Il faut donc diminuer ces nombres de 28, ce qui se peut faire en diverses façons, comme mettant en la place de quelqu'un des nombres qui sont ici, un nombre qui soit moindre de 28, pourvû que ce nombre ne soit point déja employé dans la ligne, ni son complément aussi. Par exemple, si au lieu de 122 on prenoit 94, ou bien on peut faire cette déduction en deux nombres ou plus ; ainsi au lieu de 116 on peut prendre 103, & 100 au lieu de 115 : ce qui diminuëroit les nombres de 28.

Mais il y a encore une autre méthode, par laquelle on change les nombres de la ligne, en d'autres qui ont leurs complémens employez dans la même ligne ; mais en ce cas il ne faut diminuër ou augmenter le nombre que de la moitié, comme ici de 14, parce qu'on sera obligé de changer aussi les complémens ; ce qui fait doubler la correction, laquelle par conséquent ne se doit faire que de la moitié, comme on verra incontinent.

On se peut aussi servir de ces deux voyes ensemble, pour corriger le défaut ou excès des nombres.

Nous choisirons ici la seconde méthode pour corriger l'excès de 28, lequel doit être réduit à la moitié, sçavoir 14, comme il a été dit. Pour changer 122, je cherche dans la ligne quelque petit nombre dont le complé-

ment soit beaucoup moindre ; par exemple 85, dont le complément est 112, qui est moindre de 10 que 122. Je mets donc 112 à la place de 85, & de même à la place de 122 je mets son complément 75, comme on voit à côté de la ligne ; & ainsi on aura 20 de diminution, au lieu de 10, car on ôte 122, & on met 112 ; comme aussi on ôte 85, & on met 75 à sa place.

Reste donc à diminuër les nombres de 4, pour achever 14.

Parce que les nombres qu'on a pris sont eux, ou leurs complémens tous de suite (car le complément de 78 est 119, qui précede 120, & ainsi des autres) il sera facile de voir de combien les complémens des nombres de la ligne seront moindres que celui avec lequel on les voudra comparer. Par exemple, le complément de 79 sera moindre de trois que 121, parce que 79 est le troisiéme nombre après 121, & pour la même raison le complément de 78 sera moindre de 1, que 120. Or 3 & 1 font 4, qui est la correction requise ; je mets donc au lieu de 121, 120, 78, 79, leurs complémens sçavoir 76, 77, 119, 118, comme on voit de l'autre part, où les complémens sont écrits à côté de leurs nombres, lesquels nombres sont marquez pour montrer qu'ils ne servent plus de rien, & qu'en leur place il faut prendre ceux qui sont à côté.

Les nombres de cette ligne, dont les angles sont 73, 74, seront donc 75, 76, 77, 119, 118, 117, 116, 115, 83, 113, 112, 111, qui font ensemble la somme requise 1232.

Pour l'autre ligne, dont les angles sont 73, 123, & qui doit contenir 1183 en ses douze nombres, je prens les nombres qui restent ; sçavoir,

87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98
110	109	108	107	106	105	104	103	102	101	100	99

Et parce que les angles 73, 123, valent à peu-près 197,

197, qui eſt la valeur que doit avoir chaque couple de nombres l'un portant l'autre, il faut auſſi que les nombres qu'on employera ſoient à peu-près de cette valeur : mais on prendra garde d'avoir une quotité impaire de nombres impairs, parce que la ſomme des douze nombres, ſçavoir 1183, eſt impaire.

On remarquera auſſi que les nombres qui ſont l'un deſſus l'autre, valant enſemble 197, & n'étant differens l'un de l'autre que de l'unité ; ſi on prend un des nombres de deſſous, avec le ſuivant de la ligne ſuperieure, comme 110, & 88, on aura 1 plus que 197 : mais ſi avec le nombre de deſſous, on prend le précédent de la ligne ſupérieure, comme 109 & 87, on aura 1 moins que 197.

1183	
110	
88	
89	108
107	90
106	
92	
93	
103	
102	
96	
97	
98	

Si donc on veut que les nombres ayent 197 l'un portant l'autre, il faut mêler ces deux façons, & prendre les nombres qu'on voit ici au-deſſous de 1183, qui enſemble font 1181, qui eſt 2 moins qu'il ne faut : d'où s'enſuit qu'il faudra augmenter un des nombres de 1, car ainſi le complément étant augmenté de 1, toute l'augmentation ſera de 2. Or cela ſe peut faire en beaucoup de manieres ; par exemple, mettant 108 au lieu de 107 ; car cela étant, il faudra mettre 90, complément de 107, à la place de 107, & 108, complément de 89, à la place de 89, comme on voit ici ; & ainſi 89 & 107 ſeront chacun augmentez de 1, puiſqu'au lieu d'iceux on aura 90 & 108.

Voici donc les nombres de la ligne qui doit être entre les angles 73, 123, qui ſont 110, 88, 108, 90, 106, 92, 93, 103, 102, 96, 97, 98. On mettra donc, comme on a fait ci-devant, les nombres de ces deux lignes au-deſſous de

leurs angles, & leurs complémens à côté, comme l'on voit ci-après.

73	74
75	122
76	121
77	120
119	78
118	79
117	80
116	81
115	82
83	114
113	84
112	85
111	86

73	123
110	87
88	109
108	89
90	107
106	91
92	105
93	104
103	94
102	95
96	101
97	100
98	99

Cela fait, je les dispose autour de la précédente figure de 12, & on aura la figure de 14 parfaite, comme on la voit cy-après.

73	75	76	77	119	118	117	116	115	83	113	112	111	74
110	51	144	143	142	141	125	126	63	64	65	66	52	87
88	140	34	162	161	160	158	156	43	40	38	33	57	109
108	138	153	19	176	175	174	173	26	25	20	44	59	89
90	136	152	170	9	185	186	183	18	10	27	45	61	107
106	129	150	168	16	1	195	194	4	181	29	47	68	91
92	127	147	165	180	192	6	7	189	17	32	50	70	105
93	69	49	31	184	8	190	191	5	13	166	148	128	104
103	67	48	30	15	193	3	2	196	182	167	149	130	94
102	62	46	28	187	12	11	14	179	188	169	151	135	95
96	60	42	177	21	22	23	24	171	172	178	155	137	101
97	58	164	35	36	37	39	41	154	157	159	163	139	100
98	145	53	54	55	56	72	71	134	133	132	131	146	99
123	122	121	120	78	79	80	81	82	114	84	85	86	124

On pourroit bien faire que la figure auroit à ses angles quatre nombres de suite, sçavoir 97, 98, 99, 100, qui seroient dispoſez comme on voit cy-après.

La ligne qui doit être entre 97 & 98 auroit 1184 en ses 12 nombres, & celle qui seroit mise entre 97 & 99 aura 1183, on trouvera que la premiere doit avoir deux couples de 196 chacun, & quatre de 198, & la seconde devroit avoir deux couples de 196, trois de 198, & un de 197; mais parce qu'on ne peut faire aucun couple de 197, à cause qu'il faudroit prendre deux nombres qui seroient complément l'un de l'autre, au lieu du couple de 197, j'en prendrai un de 198, & en récompense au lieu d'un de 196, j'en prendrai un de 195; on en aura donc quatre de 198, un de 196, & un de 195. Les nombres dont il se faut servir sont les suivans.

97 98

99 100

73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
124	123	122	121	120	119	118	117	116	115	114	113
|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
112	111	110	109	108	107	106	105	104	103	102	101

1183

112
86
110
88
108
90
106
—92 105
93
—103 94
95
96

La ligne qui doit être entre 97 & 98, & qui vaut 1184, se fera aisément, prenant 73, 123, | 75, 121, pour les deux couples de 196; | & 120, 78, | 118, 80, | 116, 82, | 114, 84, | pour les quatre couples de 198

L'autre ligne qui doit être entre 97 & 99, ne se fera pas si aisément; parce que la somme des nombres est impaire. On prendra 112, 86, | 110, 88, | 108, 90, | 106, 92, pour les quatre couples de 198, & 93, 103 pour le couple de 196; mais

on ne sçauroit faire 195 avec les nombres qui restent. J'en prens donc deux au hasard, en sorte toutefois que l'un d'eux soit pair, & l'autre impair, afin que leur somme soit impaire, comme l'est 195. Par exemple, je prens 95, 96, dont la somme est 191, qui est moindre de 4 que 195. Il faut donc augmenter un des nombres de 2, & pour le faire, j'en choisis un, qui étant augmenté de 2, ne se trouve point dans la ligne, mais que son complément y soit: par exemple, je change 92, parce que 94 qui le surpasse de 2, n'est pas dans la ligne, mais son complément 103 s'y trouve.

Je mets donc au lieu de 92, son complément 105, & au lieu de 103, son complément 94, & on aura les douze nombres de cette ligne. Je les dispose après comme l'on voit ici, & leurs complémens après eux.

97 98		97 99	
73	124	112	85
123	74	86	111
75	122	110	87
121	76	88	109
120	77	108	89
78	119	90	107
118	79	106	91
80	117	105	92
116	81	93	104
82	115	94	103
114	83	95	102
84	113	96	101

Je mets donc ces quatre angles & ces quatre lignes en la disposition que l'on voit dans la page qui suit autour de la figure de 12, avec laquelle on pourra remplir l'espace vuide.

97	73	123	75	121	120	78	118	80	116	82	114	84	98
112													85
86													111
110													87
88													109
108													89
90													107
106													91
105													92
93													104
94													103
95													102
96													101
99	124	74	122	76	77	119	79	117	81	115	83	113	100

Il faut remarquer, qu'avec la méthode dont on s'eſt ſervi pour faire cette figure, on pourra conſtruire les autres figures interieures, comme de 12, 10, 8 ou 6, & par la même façon qu'on a fait ci-devant celle de 8 qui eſt audedans de celle de 14, ſe ſervant d'une autre de 8 qui ne dépend que d'elle-même, & dont le plus grand nombre eſt 64. Or ce qui fait que les figures inferieures ſe peuvent conſtruire de celle-ci, & ſes ſemblables, eſt que les nombres & leurs complémens vont de ſuite dans toutes les enceintes des figures, & n'anticipent point ſur les nombres

deſtinez pour les figures ſuivantes. Ainſi en la Table de 6 compriſe dans celle de 14, les 36 nombres ſont les 18 moindres, & leurs complémens pris, eu égard à 196.

En la Table de 8, les 64 nombres ſont les 32 moindres, & leurs complémens pris ſur 196.

En celle de 10, les 100 nombres ſont les 50 moindres, & leurs complémens.

Et en celle de 12, les 144 nombres ſont les 72 moindres, & leurs complémens pris toûjours ſur 196.

Mais pour faire de la précedente Table de 14 une figure moindre: par exemple, celle de 10 en laquelle le plus grand nombre ſoit 100, il faut laiſſer les 50 premiers & moindres nombres en la diſpoſition qu'on les trouvera en la Table de 10, faiſant partie de celle de 14; & pour les autres 50 qui ſont les complémens des 50 premiers, au lieu qu'en la Table de 10 qui fait partie de celle de 14, on les a pris ſur 196, il ne les faudra prendre que ſur 100: & afin de ne ſe point tromper, & de ne prendre point un nom pour un autre, on écrira les 50 premiers nombres, ſçavoir 1, 2, 3, 4, &c. & au deſſous dans une ſeconde ligne, leurs complémens pris ſur 196, comme ils ſont ci-devant; & dans une troiſiéme ligne au-deſſous, on mettra les complémens des mêmes nombres de la premiere ligne pris ſur 100, comme on voit ici.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186	185
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	90	89

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
184	183	182	181	180	179	178	177	176	175	174	173
88	87	86	85	84	83	82	81	80	79	78	77

25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
172	171	170	169	168	167	166	165	164	163	162	161
76	75	74	73	72	71	70	69	68	67	66	65

37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
160	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149
64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53

49	50
148	147
52	51

	34	162	161	160	158	156	45	40	38	33
	153	19	176	175	174	173	26	25	20	44
	152	170	9	185	186	183	18	10	27	45
A	150	168	16	1	195	194	4	181	29	47
	147	165	180	192	6	7	189	17	32	50
	49	31	184	8	190	191	5	13	166	148
	48	30	15	193	3	2	196	182	167	149
	46	28	187	12	11	14	179	188	169	151
	42	177	21	22	23	24	171	172	178	155
	164	35	36	37	39	41	154	157	159	163

	34	66	65	64	62	60	43	40	38	33
	57	19	80	79	78	77	26	25	20	44
	56	74	9	89	90	87	18	10	27	45
B	54	72	16	1	99	98	4	85	29	47
	51	69	84	96	6	7	93	17	32	50
	49	31	88	8	94	95	5	13	70	52
	48	30	15	97	3	2	100	86	71	53
	46	28	91	12	11	14	83	92	73	55
	42	81	21	22	23	24	75	76	82	59
	68	35	36	37	39	41	58	61	63	67

La Table cottée A, eſt celle de 10 qui fait partie de celle de 14, & contient les nombres de la premiere & ſeconde ligne.

La Table côttée B, eſt celle de 10 ſimplement, & ne fait partie de nulle autre, & contient les nombres de la premiere & troiſiéme ligne.

En cette Table B, les nombres de la premiere ligne, ſçavoir depuis 1 juſques à 50, ſont aux mêmes lieux qu'en la Table A.

Et ceux de la troiſiéme ligne, ſçavoir depuis 51 juſques à 100, ſont à la place de ceux de la ſeconde ligne, en la Table A : ainſi pour faire la Table B, je commence par le premier nombre 34 de la Table A, lequel étant moindre que 50, je le laiſſe en la Table B au même lieu, & pourſuivant je trouve 162, 161, 160, 158, 156, qui ſurpaſſent 50, c'eſt pourquoi je cherche dans la ſeconde ligne le lieu où ils ſont, & prens au lieu d'eux le nombre qui eſt dans la troiſiéme ligne, ſçavoir 66, 65, 64, 62, 60, que je mets enſuite de 34, & aux mêmes lieux où étoient 162, 161, 160, 158, 156; & ainſi continuant en la même ſorte, on achevera la Table B, comme elle eſt ici.

Mais on n'eſt pas obligé de faire les Tables en telle ſorte, que les nombres d'une enceinte n'anticipent pas ſur l'autre, car on peut prendre les nombres au hazard & comme ils viendront, & ſi on ne laiſſera pas d'avoir une figure parfaite, mais elle ne pourra pas ſervir, comme la précedente, à faire une figure moindre. Par exemple, ſi en la ligne interieure de 10 il y avoit des nombres plus grands que 50, & moindres que 99, on ne pourroit pas la transformer en une ſimple, dont le plus grand nombre fût 100.

On pourroit auſſi mettre les nombres de ſuite aux enceintes ſans les entremêler; mais par un ordre contraire au précedent, ſçavoir mettant les nombres du milieu à la figure de 4, & les ſuivans, avec leurs complémens à l'enceinte

ceinte de 6, & ainſi continuant juſques à la derniere enceinte.

Par ce moyen la Table de 4 contiendroit les nombres ſuivans.

98	97	96	95	94	93	92	91
99	100	101	102	103	104	105	106

L'enceinte de la Table de 6 contiendra,

90	89	88	87	86	85	84	83	82	81
107	108	109	110	111	112	113	114	115	116

Celle de la Table de 8 contiendroit,

80	79	78	77	76	75	74	73	72	71	70	69
117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128

68	67
129	130

Celle de 10 auroit,

66	65	64	63	62	61	60	59	58	57	56	55
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142

54	53	52	51	50	49
143	144	145	146	147	148

Celle de 12 contiendroit.

48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37
149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160

36	35	34	33	32	31	30	29	28	27
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170

Enfin la derniere enceinte de 14 contiendroit le reſte des nombres, qui eſt,

26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182

14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194

2	1
195	196

Et la figure étant diſpoſée ſelon la méthode dont il a été parlé ci-devant, on aura celle qui ſuit.

195	171	25	180	23	179	21	178	24	175	16	14	177	1
3	28	31	32	164	163	162	161	160	159	48	47	27	194
189	30	49	133	66	137	65	136	54	135	63	147	167	8
13	39	146	129	77	118	70	121	71	72	130	51	158	184
4	44	144	73	116	85	110	89	109	82	124	53	153	193
15	40	58	78	84	103	93	92	106	113	119	139	157	182
185	156	56	128	86	98	100	101	95	111	69	141	41	12
7	155	138	74	83	102	96	97	99	114	123	59	42	190
187	154	57	117	107	91	105	104	94	90	80	140	43	10
6	168	142	122	115	112	87	108	88	81	75	55	29	191
186	152	145	67	120	79	127	76	126	125	68	52	45	11
188	46	50	64	131	60	132	61	143	62	134	148	151	9
5	170	166	165	33	34	35	36	37	38	149	150	169	192
196	26	172	17	174	18	176	19	173	22	181	183	20	2

DE L'ATTACHEMENT DES FIGURES partiales & interieures.

EN la façon précedente de faire les figures, celles qui ſont au-dedans ſont en quelque façon détachées, ou plûtôt ſont capables d'être détachées l'une d'avec l'autre, ainſi qu'il a été dit : car ſi on ôte la premiere enceinte de la précedente figure de 14, la figure de 12 qui reſtera aura les conditions requiſes ; pareillement ſi on ôte deux enceintes, il demeurera une figure de 10, qui aura encore toutes les lignes égales.

Que si on ôte trois enceintes, on aura encore la table de 8, avec les mêmes conditions ; & si on ôte quatre enceintes, on aura la Table de 6, qui sera encore selon les régles : enfin si on ôte cinq enceintes, il restera la Table de 4 qui aura pareille qualité.

Mais il y a moyen d'attacher les enceintes l'une à l'autre, en telle sorte que lorsqu'on en ôtera quelqu'une, les autres, ou laquelle on voudra de celles qui restent, ne soit point selon les loix ; quoique la figure totale qui est ici de 14, demeure toûjours bonne. Ce qui doit toûjours être supposé, & en ceci il n'y a point de restriction ; car on choisit laquelle on veut, pour être bonne, ou mauvaise.

Exemple. On pourra faire que la Table entiere de 14 demeurant bonne, celle de 12 ne vaudra rien, mais les autres de 10, 8, 6 & 4, seront bonnes.

Ou bien qu'il n'y aura que celle de 10 qui n'ait pas les conditions requises, ou que ce sera celle de 8, 6 ou 4 seulement, en laquelle arrivera ce défaut.

On peut faire aussi qu'il y en aura deux, & lesquelles on voudra, qui n'auront pas les conditions requises, comme celles de 12 & de 10, ou de 12 & de 8, ou de 12 & de 6, ou de 12 & de 4.

Ou bien celles de 10 & de 8, de 10 & de 6, ou de 10 & de 4.

Ou celles de 8 & de 6, de 8 & de 4, ou de 6 & de 4.

Comme aussi on pourra faire que trois de ces figures ne vaudront rien, mais que les autres seront bonnes : par exemple, que celles de 12, 10 & 8 ne vaudront rien, ou celles de 12, 10 & 6, ou de 12, 10, & 4, ou de 12, 8, 6, ou de 12, 8, 4, ou de 12, 6, 4, ou de 10, 8, 6, ou de 10, 8, 4, ou de 10, 6, 4, ou enfin de 8, 6 & 4. Les autres étant disposées selon les loix.

Pareillement on fera que quatre des Tables interieures ne vaudront rien, & la cinquiéme sera bonne, & cette cinquiéme sera laquelle on voudra ; sçavoir celle de 12,

ou celle de 10 & de 8, de 6 ou de 4, où il faut toûjours ſuppoſer que l'exterieure, ou totale, ſoit bonne.

Enfin on peut faire en ſorte que la ſeule figure totale ſera bonne, & qu'aucune dés particulieres & interieures n'aura les conditions requiſes.

Cet attachement ſe fait, tranſpoſant deux nombres d'une enceinte, à la place de deux autres équivalens d'une autre enceinte, en telle ſorte que les nombres demeurent en la même ligne ou colomne où chacun d'eux étoit auparavant; de ſorte que pour faire cette tranſmutation ou tranſport, il faut que les nombres ſoient vis-à-vis l'un de l'autre, & s'ils n'y ſont pas, il les y faut mettre, changeant auſſi leurs complémens pour les mettre vis-à-vis de leurs nombres, les laiſſant pourtant dans leur même enceinte, de peur que la figure totale ne ſoit gâtée. On peut voir enſuite des exemples de cela.

On veut faire enſorte qu'en la précedente figure de 14, qui eſt en la page 290, ſi on ôte une enceinte, la figure de 12 qui reſtera ne vaille rien, mais les autres 10, 8 & 6 ſoient bonnes. Je prens deux lignes prochaines & paralleles, l'une de la figure de 14, & l'autre de celle de 12, & mets auſſi leurs complémens vis-à-vis, comme on voit ici. Or il ne faut point comprendre dans ces lignes les nombres qui ſont aux angles.

A	B	C	D
3			194
189	30	167	8
13	39	158	184
4	44	153	193
15	40	157	182
185	156	41	12
7	155	42	190
187	154	43	10
6	168	29	191
186	152	45	11
188	46	151	9
5			192

Premiere Fig.

Les nombres de la colomne D, ſont complémens de ceux de la colomne A, & ceux de la colomne C, ſont complèmens de ceux de la colomne B.

Pour attacher ces deux

figures ensemble, je cherche deux nombres dans la colomne A, égaux à deux de la colomne B, comme s'ensuit.

La somme de 3 & de 189, est 192; je cherche en B ou en C deux nombres qui fassent pareillement 192. Prenons 30 pour un des deux nombres, l'autre doit être 162, lequel n'est point dans la ligne B. Je prens le suivant 39; le reste pour parvenir à 192 seroit 153, qui n'est point en B; prenant 44, il faudroit avoir 148 : & enfin prenant 40, le reste sera 152 qui se trouve en B; on aura donc 40 & 152 qui ensemble font autant que 3 & 189.

Mais parce que 3 & 189 ne sont pas vis-à-vis de 40 & 152, il les y faut mettre en plaçant 3 à la place de 15, & ensuite 15 à la place de 3; & par même moyen 194, complément de 3, en la colomne D, en la place de 182, complément de 15, parce que 15 étoit vis-à-vis de l'un des nombres de la ligne B, sçavoir de 40.

A	B	C	D
15			182
186	30	167	11
13	39	158	184
4	44	153	193
3	40	157	194
185	156	41	12
7	155	42	190
187	154	43	10
6	168	29	191
189	152	45	8
188	46	151	9
5			192

Seconde Fig.

Semblablement je fais un échange de place entre 189, & son complément 8 avec 186, & son complément 11,

parce que 186 eſt vis-à-vis de l'autre nombre 152 : on aura donc 3, 189, vis-àvis de 40, 152, comme on voit en la ſeconde Table.

A	B	C	D
15			182
186	30	167	11
13	39	158	184
4	44	153	193
40	3	157	194
185	156	41	12
7	155	42	190
187	154	43	10
6	168	29	191
152	189	45	8
188	46	151	9
5			192

Troiſiéme Fig.

Maintenant pour faire l'attachement, je mets 3 à la place de 40 qui eſt vis-à-vis, & 189 à la place de 152; & cette tranſpoſition étant faite, ſi on ôtoit la premiere enceinte de la figure en laquelle les lignes ſeroient diſpoſées ſelon la ſuite des nombres contenus aux colomnes A, B, C, D, de la troiſiéme figure, la Table de 12 n'auroit pas ſes lignes égales, mais bien celles de 10, 8, 6, & 4.

Il faut remarquer, qu'à cette ſeconde tranſpoſition on ne touche point aux colomnes C, D où ſont les complémens.

Par ce changement, la figure entiere de 14 ne reçoit aucun dommage, puiſque les lignes diſpoſées ſelon la ſuite A, B, C, D, ne changent point de nombres, mais retiennent toûjours les mêmes; & les colomnes qui vont de haut en bas changent bien de nombres, mais en leurs places,

elles en reçoivent d'équivalens. Par exemple, la colomne A, au lieu de 3, 189 qu'elle avoit, reçoit 40, 152, qui valent autant: mais si on prend la figure de 12 toute seule, il n'en ira pas ainsi; car encore que la colomne B, à la prendre de haut en bas, ne reçoive aucun dommage, il n'en est pas de même aux deux lignes qui vont selon la suite A, B, C, D, car en celle où sont 3, 157, on a mis 3 tout seul à la place de 40, puisque la ligne de la Table de 12 ne commence qu'en 40; d'où s'ensuit que cette ligne sera trop petite de 37; & en la ligne 189, 45, on a mis 189 à la place de 152, & ainsi elle sera trop grande de 37.

Pour les autres figures de 10, 8, 6 & 4, elles ne reçoivent aucun changement, parce qu'on n'y a point touché.

A	B
30	
39	146
44	144
40	58
156	56
155	138
154	57
168	142
152	145
46	

On peut prendre, si on veut, trois nombres ou plus dans la colomne A, & en choisir autant d'autres, dont la somme soit égale dans la colomne B, ou dans son opposée C, & les transposer comme devant.

On auroit pû prendre 41, 151 dans la colomne C de la premiere figure, pour faire 192. De même, si on avoit pris 3, 188 dans la colomne A, qui font 191, on trouveroit 39, 152 dans la colomne B, qui font 191. Enfin on peut trouver ces égalitez en beaucoup de manieres.

Si on vouloit gâter la figure de 10 seulement, il faudroit transposer des nombres de l'enceinte de la figure de 12, à la place d'autres nombres équivalens de la figure de 10, & prendre leurs lignes ou colomnes comme devant, & comme on les voit ici.

Ainsi ayant trouvé que 44 & 155 de la colomne A en la Table précedente, sont égaux à 57, 142 de la colomne B, après avoir mis 44, 155 vis-à-vis de 57, 142, comme devant, & pareillement leurs complémens qui sont en la colomne opposée de la Table, je les transpose d'une co-

lomne en l'autre, mettant 44, 155 à la place de 57, 142, & on les aura en la façon qu'ils ſont ici.

A	
30	
39	146
154	144
40	58
156	56
168	138
57	44
142	155
152	145
46	

Et ſi on les applique à la figure de 14 en cette diſpoſition, & qu'on en ôte deux enceintes, la figure de 10 qui reſtera ne ſera pas bonne; mais quelqu'autres enceintes qu'on puiſſe ôter, ce qui reſtera ne laiſſera pas d'être bon. On auroit pû prendre 30, 168, la ſomme eſt 198; leurs égaux dans la colomne B, ſont 56, 142, ou bien 39, 156, auſquels ſont égaux 138, 57 en l'autre colomne, ou bien 39, 155, & on aura 56, 138, qui valent autant, comme auſſi 44, 156 ſont autant que 144, 56, & que 58, 142, & 44, 155 ſont autant que 57, 142, &c.

On fera la même choſe des autres enceintes; car ſi on vouloit que la Table de 8 toute ſeule ne valût rien, on mêleroit l'enceinte de 8 avec la précedente qui eſt de 10; & pour gâter la Table de 6, on changera des nombres de ſon enceinte avec celle de 8, &c.

Pour gâter deux Tables de ſuite, il faut mêler les nombres de la moindre, avec ceux de l'enceinte qui les enveloppe toutes deux. Par exemple, pour faire que les Tables de 12 & de 10 ne valent rien, les autres demeurant bonnes, on changera les nombres de l'enceinte de 14, en des équivalens de celle de 10.

Et pour gâter les Tables de 10 & de 8 ſeulement, on changera les nombres de la Table de 8, en ceux de la Table de 12, qui eſt celle qui enveloppe celle de 10.

Toutes les autres diverſitez qu'on pourroit apporter à faire quelques-unes des figures bonnes, & quelqu'autres mauvaiſes, ſe feront en la façon qui a été montrée, changeant toûjours les nombres de la figure qu'on veut gâter, avec la précedente qu'on veut conſerver bonne. Il ſeroit trop long d'apporter des exemples de chaque ſorte, vû même

même que ce qui a été dit peut suffire étant bien entendu.

Il y a plusieurs autres manieres de gâter ou attacher les figures. En voici des exemples.

Je cherche deux nombres aux deux colomnes marquées A de la figure précedente, sçavoir un en chacune, qui soient égaux à deux autres des mêmes lignes : par exemple, 154 & 144 font 298, & pareillement 146 & 152 font 298. Et parce que 154 & 144 sont vis-à-vis l'un de l'autre, on n'aura que faire d'y toucher; mais pour 152, il le faudra mettre vis-à-vis de 146, ou 146 à la place de 145, vis-à-vis de 152, & la ligne sera comme on la voit ici; & en même temps aussi on transposera le complément de 152 qui est en la ligne opposée dans la figure précedente de 14, vis-à-vis de 152; & pareillement le complément de 39, parce qu'on a mis 152 en sa place.

			B	
30			30	
152	146		154	144
154	144		152	146
40	58		40	58
156	56		156	56
168	138		168	138
57	44		57	44
142	155		142	155
39	145		39	145
46			46	

Cela fait, on mettra 152, 146 à la place de 154, 144, comme on voit en la figure B; & en faisant ce dernier changement, il ne faut point toucher aux complémens, car c'est en cela que consiste l'attachement des enceintes l'une à l'autre; sçavoir à transposer d'une enceinte à l'autre, ou d'une ligne à l'autre des nombres équivalens, sans toucher à leurs complémens.

On a encore 142, 56, qui font 198.

On a aussi 154, 56, qui font 210, & 152, 58 qui font autant.

On peut aussi changer les nombres qui sont aux angles. Ainsi en la figure qui a 14 de côté, on pourra mettre 196 à la place de 190 : & parce que 196 surpasse 170 de 26, il faudra trouver dans la colomne 171, 26, entre les nombres 28, 170, qui sont les angles de la Table de 12, un nombre qui surpasse de 26 quelqu'un de ceux qui sont entre 195, 196 ; tel est 39 qui surpasse 13 de 26, comme aussi 30 qui surpasse 4 de 26 ; & par même moyen il faudroit un nombre entre 170 & 169 de la ligne 5, 192, un nombre qui surpassât de 26 quelqu'un des nombres qui sont entre 196 & 2 : & parce qu'il ne s'en trouve point, on en cherchera deux entre 170 & 169 qui surpasse de 26 deux autres de la ligne 196, 2 ; tels sont 33 & 35, dont la somme est 68, qui surpassent de 26 les nombres 20 & 22, dont la somme est 42, de même 33 & 34, dont la somme est 67, surpassent de 26 les nombres 19 & 22, dont la somme est 41. Si on ne trouvoit pas deux nombres qui fissent l'égalité, on en pourroit prendre trois ou quatre, ou davantage.

On peut faire aussi des Tables impaires par la méthode précedente, dont on s'est servi pour faire les paires, comme on peut voir en la Table de 5 qui est ici, en laquelle les rélatifs sont dans les lignes opposées, & dans la même diagonale.

1	18	21	22	3
2	12	17	10	24
20	11	13	15	6
19	16	9	14	7
23	8	5	4	25

Or on peut varier cette Table en beaucoup de manieres, à cause qu'elle est détachée, & que les nombres qui

ſont aux extrémitez des lignes, ou colomnes, ſont complémens l'un de l'autre, (c'eſt-à-dire qu'ils font autant étant joints l'un à l'autre, que les deux nombres extrêmes) ainſi qu'on voit en 2 & 24; 20 & 6; 18 & 8, &c. & pareillement les nombres des angles oppoſez dans les diagonales, comme 1 & 25; 3 & 23. Et pareillement on peut tranſpoſer la Table interieure de 9 toute entiere, c'eſt-à-dire, ſans toucher à l'ordre des nombres, qui ne ſe peut changer, ce qui ſe fait en huit façons : puis conſiderant la premiere colomne de l'enceinte exterieure, on y trouve trois nombres ſans les angles, ſçavoir 2, 20, 19, qui ſe peuvent varier en ſix façons, ſuivant la combinaiſon d'ordre de trois choſes; & pareillement la premiere ligne où ſont les trois nombres 18, 21, 22, ſe peut varier en ſix ſortes. Si donc on multiplie ces trois nombres 8, 6, 6 l'un par l'autre, on aura 288, qui eſt la quantité des changemens & variations qu'on peut donner à cette Table; & ainſi on fera 288 Tables differentes de la précedente.

Pareillement on variera en beaucoup de ſortes une Table de ſix détachée : par exemple celle qui eſt ici.

9	25	26	23	18	10
16	1	35	34	4	21
20	32	6	7	29	17
24	8	30	31	5	13
15	33	3	2	36	22
27	12	11	14	19	28

Car premierement la Table de 4 de côté qui eſt au-dedans ſe peut varier en 880 ſortes, dont chacune ſe peut tranſpoſer en huit façons, qui ſont en tout 7040 changemens, qui ſe feront ſans toucher à l'enceinte exterieure, en laquelle les nombres de la colomne, qui ſont quatre ſans les angles, ſe peuvent varier en vingt-quatre ſortes, ſelon la combinaiſon d'ordre de quatre choſes, & pa-

reillement il y a quatre nombres en la ligne de la même enceinte exterieure, qui se varieront aussi en vingt-quatre façons; & ainsi il faudra multiplier 7040 par vingt-quatre, & le produit encore par vingt-quatre, pour avoir la quantité des Tables qu'on peut faire en variant une seule d'entre elles, comme celle qui est ici, qui seront en tout 4055040 Tables. Or on ne prend que les quatre nombres du milieu de chaque ligne de l'enceinte, sans toucher aux angles, afin qu'y ayant en la Table quelques nombres qui ne soient point remuez, on ait de vrayes variations, & non point des transpositions de la Table entiere.

Table de 5, dont chacune se peut varier en 288. façons.

5	20	17	12	11	5	18	17	14	11	6	24	15	12	8
24	10	25	4	2	2	10	25	4	24	3	10	25	4	23
3	7	13	19	23	23	7	13	19	3	21	7	13	19	5
18	22	1	16	8	20	22	1	16	6	17	22	1	16	9
15	6	9	14	21	15	8	9	12	21	18	2	11	14	20

6	23	17	11	8	6	24	8	15	12	9	24	3	18	11
24	10	25	4	2	23	10	25	4	3	21	10	25	4	5
5	7	13	19	21	5	7	13	19	21	6	7	13	19	20
12	22	1	16	14	17	22	1	16	9	14	22	1	16	12
18	3	9	15	20	14	2	18	11	20	15	2	23	8	17

9	2	23	20	11	9	21	6	18	11	1	23	20	17	4
21	10	25	4	5	24	10	25	4	2	19	10	24	5	7
8	7	13	19	18	3	7	13	19	23	11	8	13	18	15
12	22	1	16	14	14	22	1	16	12	12	21	2	16	14
15	24	3	6	17	15	5	20	8	17	22	3	6	9	25

3	25	19	14	4	3	25	22	9	6	3	25	19	12	6
20	10	24	5	6	19	10	24	5	7	22	10	24	5	4
9	8	13	18	17	11	8	13	18	15	9	8	13	18	17
11	21	2	16	15	12	21	2	16	14	11	21	2	16	15
22	1	7	12	23	20	1	4	17	23	20	1	7	14	23

4	25	23	6	7	4	23	17	14	7	4	25	6	19	11
17	10	24	5	9	25	10	24	5	1	23	10	24	5	3
11	8	13	18	15	6	8	13	18	20	9	8	13	18	17
14	21	2	16	12	11	21	2	16	15	14	21	2	16	12
19	1	3	20	22	19	3	9	12	22	15	1	20	7	22

4	23	20	7	11	2	23	20	12	8	2	23	20	8	12
25	10	24	5	1	9	10	25	4	17	11	10	25	4	15
9	8	13	18	17	15	7	13	19	11	17	7	13	19	9
12	21	2	16	14	21	22	1	16	5	21	22	1	16	5
15	3	6	19	22	18	3	6	14	24	14	3	6	18	24

2	23	17	11	12	3	24	18	15	5	3	24	21	8	9
8	10	25	4	18	9	10	25	4	17	20	10	25	4	6
20	7	13	19	6	12	7	13	19	14	11	7	13	19	15
21	22	1	16	5	20	22	1	16	6	14	22	1	16	12
14	3	9	15	24	21	2	8	11	23	17	2	5	18	23

3	24	15	14	9
6	10	25	4	20
18	7	13	19	8
21	22	1	16	5
17	2	11	12	23

3	21	18	14	9
24	10	25	4	2
6	7	13	19	20
15	22	1	16	11
17	5	8	12	23

3	24	21	6	11
18	10	25	4	8
17	7	13	19	9
12	22	1	16	14
15	2	5	20	23

3	21	18	12	11
24	10	25	4	2
6	7	13	19	20
17	22	1	16	9
15	6	8	14	23

3	20	17	14	11
24	10	25	4	2
15	7	13	19	21
18	22	1	16	8
15	6	9	12	23

TABLE GENERALE
DES
QUARREZ DE QUATRE.

	β				β				β				β		
1	13	8	12	1	13	12	8	1	13	8	12	1	13	12	8
16	4	9	5	16	4	5	9	16	4	9	5	16	4	5	9
11	7	14	2	7	11	14	2	10	6	15	3	6	10	15	3
6	10	3	15	10	6	3	15	7	11	2	14	11	7	2	14
	γ				α				α				γ		
1	14	8	11	1	14	11	8	1	14	7	12	1	14	12	7
15	4	10	5	15	4	5	10	15	4	9	6	15	4	6	9
12	7	13	2	6	9	16	3	10	5	16	3	8	11	13	2
6	9	3	16	12	7	2	13	8	11	2	13	10	5	3	16
	δ				δ				α				δ		
1	11	14	8	1	14	11	8	1	14	7	12	1	10	15	8
16	5	4	9	16	5	4	9	16	5	10	3	16	6	3	9
7	12	13	2	7	12	13	2	9	4	15	6	5	11	14	4
10	6	3	15	10	3	6	15	8	11	2	13	12	7	2	13
	δ				β				β				β		
1	15	10	8	1	11	8	14	1	11	14	8	1	11	14	8
16	6	3	9	16	6	9	3	16	6	3	9	16	6	3	9
5	11	14	4	13	7	12	2	4	10	15	5	7	13	12	2
12	2	7	13	4	10	5	15	13	7	2	12	10	4	5	15

β				γ				α				γ			
1	11	8	14	1	12	8	13	1	12	13	8	1	12	14	7
16	6	9	3	15	6	10	3	15	6	3	10	15	6	4	9
10	4	15	5	14	7	11	2	4	9	16	5	8	13	11	2
7	13	2	12	4	9	5	16	14	7	2	11	10	3	5	16
α				β				β				β			
1	12	7	14	1	10	8	15	1	10	15	8	1	10	15	8
15	6	9	4	16	7	9	2	16	7	2	9	16	7	2	9
10	3	16	5	13	6	12	3	4	11	14	5	6	13	12	3
8	13	2	11	4	11	5	14	13	6	3	12	11	4	5	14
β				δ				δ				γ			
1	10	8	15	1	12	13	8	1	13	12	8	1	12	8	13
16	7	9	2	16	7	2	9	16	7	2	9	14	7	11	2
11	4	14	5	3	10	15	6	3	10	15	6	15	6	10	3
6	13	3	12	14	5	4	11	14	4	5	11	4	9	5	16
α				γ				α				δ			
1	12	13	8	1	12	15	6	1	12	6	15	1	10	7	16
14	7	2	11	14	7	4	9	14	7	9	4	14	8	9	3
4	9	16	5	8	13	10	3	11	2	16	5	15	5	12	2
15	6	3	10	11	2	5	16	8	13	3	10	4	11	6	13
β				β				γ				δ			
1	10	7	16	1	11	6	16	1	11	16	6	1	11	6	16
15	8	9	2	14	8	9	3	14	8	3	9	15	8	9	2
14	5	12	3	15	5	12	2	4	10	13	7	14	5	12	3
4	11	6	13	4	10	7	13	15	5	2	12	4	10	7	13

γ				γ				δ				β			
1	10	16	7	1	10	16	7	1	10	7	16	1	10	7	16
15	8	2	9	15	8	2	9	12	8	9	5	15	8	9	2
4	11	13	6	6	13	11	4	15	3	14	2	12	3	14	5
14	5	3	12	12	3	5	14	6	13	4	11	6	13	4	11
γ				β				δ				δ			
1	12	6	15	1	12	15	6	1	15	12	6	1	11	6	16
13	8	10	3	13	8	3	10	13	8	3	10	12	8	9	5
16	5	11	2	4	9	14	7	4	9	14	7	14	2	15	3
4	9	7	14	16	5	2	11	16	2	5	11	7	13	4	10
β				γ				γ				β			
1	11	6	16	1	11	16	6	1	12	7	14	1	12	14	7
14	8	9	3	14	8	3	9	13	8	11	2	13	8	2	11
12	2	15	5	7	13	10	4	16	5	10	3	4	9	15	6
7	13	4	10	12	2	5	15	4	9	6	15	16	5	3	10
δ				δ				δ				δ			
1	13	4	16	1	7	10	16	1	7	10	16	1	7	10	16
14	8	9	3	14	9	8	3	15	9	8	2	12	9	8	5
12	2	15	5	15	6	11	2	14	6	11	3	15	4	13	2
7	11	6	10	4	12	5	13	4	12	5	13	6	14	3	11
δ				δ				δ				δ			
1	7	10	16	1	12	15	6	1	12	5	16	1	12	5	16
15	9	8	2	14	9	4	7	14	9	8	3	15	9	8	2
12	4	13	5	3	8	13	10	15	6	11	2	14	6	11	3
6	14	3	11	16	5	2	11	4	7	10	13	4	7	10	13

δ				δ				δ				δ			
1	14	3	16	1	6	12	15	1	12	13	8	1	12	6	15
15	9	8	2	16	9	7	2	16	9	4	5	16	9	7	2
12	4	13	5	13	8	10	3	2	7	14	11	13	8	10	3
6	7	10	11	4	11	5	14	15	6	3	10	4	5	11	14
δ				δ								δ			
1	4	15	14	1	15	4	14	1	6	12	15	1	6	11	16
16	10	5	3	16	10	5	3	13	10	8	3	12	10	7	5
9	7	12	6	9	7	12	6	16	7	9	2	13	3	14	4
8	13	2	11	8	2	13	11	4	11	5	14	8	15	2	9
δ				δ								δ			
1	6	11	16	1	12	13	8	1	12	6	15	1	13	12	8
13	10	7	4	15	10	3	6	13	10	8	3	15	10	3	6
12	3	14	5	2	7	14	11	16	7	9	2	2	7	14	11
8	15	2	9	16	5	4	9	4	5	11	14	16	4	5	9
β				β				α				β			
1	7	12	14	1	7	14	12	1	7	14	12	1	7	12	14
16	10	5	3	16	10	3	5	16	10	3	5	16	10	5	3
13	11	8	2	4	6	15	9	11	13	8	2	6	4	15	9
4	6	9	15	13	11	2	8	6	4	9	15	11	13	2	8
γ				α				γ				α			
1	8	12	13	1	8	13	12	1	8	14	11	1	8	11	14
15	10	6	3	15	10	3	6	15	10	4	5	15	10	5	4
14	11	7	2	4	5	16	9	12	13	7	2	6	3	16	9
4	5	9	16	14	11	2	7	6	3	9	16	12	13	2	7

	δ				δ				δ				δ		
1	4	14	15	1	14	4	15	1	5	12	16	1	5	12	16
16	11	5	2	16	11	5	2	14	11	6	3	15	11	6	2
9	6	12	7	9	6	12	7	15	8	9	2	14	8	9	3
8	13	3	10	8	3	13	10	4	10	7	13	4	10	7	13
	δ				δ				δ				δ		
1	5	12	16	1	5	12	16	1	10	15	8	1	10	7	16
10	11	6	7	15	11	6	2	14	11	4	5	14	11	6	3
15	4	13	2	10	4	13	7	3	6	13	12	15	8	9	2
8	14	3	9	8	14	3	9	16	7	2	9	4	5	12	13
	δ				δ				β				β		
1	10	7	16	1	14	3	16	1	6	12	15	1	6	15	12
15	11	6	2	15	11	6	2	16	11	5	2	16	11	2	5
14	8	9	3	10	4	13	7	13	10	8	3	4	7	14	9
4	5	12	13	8	5	12	9	4	7	9	14	13	10	3	8
	β				β				δ				δ		
1	6	15	12	1	6	12	15	1	8	13	12	1	13	8	12
16	11	2	5	16	11	5	2	16	11	2	5	16	11	2	5
10	13	8	3	7	4	14	9	3	6	15	10	3	6	15	10
7	4	9	14	10	13	3	8	14	9	4	7	14	4	9	7
	γ				α				γ				α		
1	8	12	13	1	8	13	12	1	8	15	10	1	8	10	15
14	11	7	2	14	11	2	7	14	11	4	5	14	11	5	4
15	10	6	3	4	5	16	9	12	13	6	3	7	2	16	9
4	5	9	16	15	10	3	6	7	2	9	16	12	13	3	6

1	4	15	14	1	4	14	15	1	9	16	8	1	9	16	8
9	12	7	6	9	12	6	7	14	12	5	3	15	12	5	2
16	5	10	3	16	5	11	2	4	6	11	13	4	7	10	13
8	13	2	11	8	13	3	10	15	7	2	10	14	6	3	11
	δ				β				γ				ε		
1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	16	11	1	7	10	16
14	12	5	3	15	12	5	2	15	12	2	5	14	12	5	3
15	9	8	2	14	9	8	3	4	7	13	10	15	9	8	2
4	7	10	13	4	7	10	13	14	9	3	8	4	6	11	13
	δ				γ				δ				ε		
1	7	10	16	1	7	16	10	1	6	11	16	1	6	11	16
15	12	5	2	14	12	3	5	8	12	5	9	15	12	5	2
14	9	8	3	4	6	13	11	15	3	14	2	8	3	14	9
4	6	11	13	15	9	2	8	10	13	4	7	10	13	4	7
	γ				γ				β				δ		
1	6	16	11	1	8	10	15	1	8	15	10	1	13	4	16
15	12	2	5	13	12	6	3	13	12	3	6	15	12	5	2
10	13	7	4	16	9	7	2	4	5	14	11	8	3	14	9
8	3	9	14	4	5	11	14	16	9	2	7	10	6	11	7
	δ				γ				β				γ		
1	7	10	16	1	7	16	10	1	7	10	16	1	8	11	14
8	12	5	9	14	12	3	5	14	12	5	3	13	12	7	2
14	2	15	3	11	13	6	4	8	2	15	9	16	9	6	3
11	13	4	6	8	2	9	15	11	13	4	6	4	5	10	15

β				δ				δ				δ			
1	8	14	11	1	13	4	16	1	3	14	16	1	3	14	16
13	12	2	7	14	12	5	3	12	13	4	5	15	13	4	2
4	5	15	10	8	2	15	9	15	8	9	2	12	8	9	5
16	9	3	6	11	7	10	6	6	10	7	11	6	10	7	11

δ				δ				δ				δ			
1	3	14	16	1	3	14	16	1	10	7	16	1	10	7	16
15	13	4	2	10	13	4	7	12	13	4	5	15	13	4	2
10	6	11	7	15	6	11	2	15	8	9	2	12	8	9	5
8	12	5	9	8	12	5	9	6	3	14	11	6	3	14	11

δ				δ				β				β			
1	10	15	8	1	12	5	16	1	4	14	15	1	4	15	14
12	13	6	3	15	13	4	2	16	13	3	2	16	13	2	3
5	4	11	14	10	6	11	7	11	10	8	5	6	7	12	9
16	7	2	9	8	3	14	14	6	7	9	12	11	10	5	8

β				β				δ				δ			
1	4	15	14	1	4	14	15	1	8	10	15	1	10	8	15
16	13	2	3	16	13	3	2	16	13	3	2	16	13	3	2
10	11	8	5	7	6	12	9	5	4	14	11	5	4	14	11
7	6	9	12	10	11	5	8	12	9	7	6	12	7	9	6

δ				δ											
1	7	14	12	1	7	14	12	1	7	16	10	1	7	16	10
8	13	2	11	11	13	2	8	11	13	4	6	14	13	4	3
9	4	15	6	6	4	15	9	14	12	5	3	11	12	5	6
16	10	3	5	16	10	3	5	8	2	9	15	8	2	9	15

	δ				δ				γ				α		
1	8	9	16	1	11	6	16	1	8	14	11	1	8	11	14
14	13	4	3	14	13	4	3	12	13	7	2	12	13	2	7
7	2	15	10	7	2	15	10	15	10	4	5	6	3	16	9
12	11	6	5	12	8	9	5	6	3	9	16	15	10	5	4
	γ				α				δ						
1	8	15	10	1	8	10	15	1	2	15	16	1	2	16	15
12	13	6	3	12	13	3	6	12	14	3	5	13	14	4	3
14	11	4	5	7	2	16	9	13	7	10	4	12	7	9	6
7	2	9	16	14	11	5	4	8	11	6	9	8	11	5	10
	δ				δ				δ				δ		
1	2	15	16	1	11	6	16	1	11	6	16	1	4	13	16
13	14	3	4	12	14	3	5	13	14	3	4	12	14	3	5
12	7	10	5	13	7	10	4	12	7	10	5	15	9	8	2
8	11	6	9	8	2	15	9	8	2	15	9	6	7	10	11
	β				γ				β				γ		
1	4	13	16	1	4	16	13	1	7	10	16	1	7	16	10
15	14	3	2	15	14	2	3	12	14	3	5	12	14	5	3
12	9	8	5	6	7	11	10	15	9	8	2	6	4	11	13
6	7	10	11	12	9	5	8	6	4	13	11	15	9	2	8
	δ				δ				γ				β		
1	7	10	16	1	4	13	16	1	4	16	13	1	4	13	16
15	14	3	2	8	14	3	9	15	14	2	3	15	14	3	2
12	9	8	5	15	5	12	2	10	11	7	6	8	5	12	9
6	4	13	11	10	11	6	7	8	5	9	12	10	11	6	7

	γ				β				δ						
1	8	10	15	1	8	15	10	1	11	6	16	1	5	16	12
11	14	4	5	11	14	5	4	15	14	3	2	10	14	3	7
16	9	7	2	6	3	12	13	8	5	12	9	8	4	13	9
6	3	13	12	16	9	2	7	10	4	13	7	15	11	2	6
													δ		
1	5	16	12	1	5	16	12	1	5	16	12	1	7	10	16
10	14	3	7	15	14	3	2	8	14	3	9	8	14	3	9
15	11	6	2	10	11	6	7	10	4	13	7	12	2	15	5
8	4	9	13	8	4	9	13	15	11	2	6	13	11	6	4
	γ				β				γ				β		
1	7	16	10	1	7	10	16	1	8	13	12	1	8	12	13
12	14	5	3	12	14	3	5	11	14	7	2	11	14	2	7
13	11	4	6	8	2	15	9	16	9	4	5	6	3	15	10
8	2	9	15	13	11	6	4	6	3	10	15	16	9	5	4
	δ				δ				β				γ		
1	11	6	16	1	4	13	16	1	4	13	16	1	4	16	13
12	14	3	5	12	15	2	5	14	15	2	3	14	15	3	2
8	2	15	9	14	9	8	3	12	9	8	5	7	6	10	11
13	7	10	4	7	6	11	10	7	6	11	10	12	9	5	8
	ε				γ				δ						
1	6	11	16	1	6	16	11	1	6	11	16	1	3	16	14
12	15	2	5	12	15	5	2	14	15	2	3	8	15	2	9
14	9	8	3	7	4	10	13	12	9	8	5	13	6	11	4
7	4	13	10	14	9	3	8	7	4	13	10	12	10	5	7

												δ			
1	3	16	14	1	3	16	14	1	3	16	14	1	4	13	16
13	15	2	4	13	15	2	4	12	15	2	5	8	15	2	9
8	6	11	9	12	10	7	5	13	10	7	4	14	5	12	3
12	10	5	7	8	6	9	11	8	6	9	11	11	10	7	6

β				γ				γ				ε			
1	4	13	16	1	4	16	13	1	8	11	14	1	8	14	11
14	15	2	3	14	15	3	2	10	15	4	5	10	15	5	4
8	5	12	9	11	10	6	7	16	9	6	3	7	2	12	13
11	10	7	6	8	5	9	12	7	2	13	12	16	9	3	6

δ				δ				δ				δ			
1	10	7	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	7	14	12
14	15	2	3	7	15	2	10	14	15	2	3	9	15	4	6
8	5	12	9	14	4	13	3	7	4	13	10	8	2	13	11
11	4	13	6	12	9	8	5	12	9	8	5	16	10	3	5

				δ				δ				γ			
1	7	14	12	1	9	8	16	1	6	11	16	1	6	16	11
9	15	4	6	14	15	2	3	8	15	2	9	12	15	5	2
16	10	5	3	7	4	13	10	12	3	14	5	13	10	4	7
8	2	11	13	12	6	11	5	13	10	7	4	8	3	9	14

β				γ				β				δ			
1	6	11	16	1	8	13	12	1	8	12	13	1	10	7	16
12	15	2	5	10	15	6	3	10	15	3	6	12	15	2	5
8	3	14	9	16	9	4	5	7	2	14	11	8	3	14	9
13	10	7	4	7	2	11	14	16	9	5	4	13	6	11	4

γ				γ				γ				γ			
1	4	15	14	1	4	14	15	1	6	15	12	1	6	12	15
13	16	3	2	13	16	2	3	11	16	5	2	11	16	2	5
8	5	10	11	12	9	7	6	8	3	10	13	14	9	7	4
12	9	6	7	8	5	11	10	14	9	4	7	8	3	13	10
γ				γ				γ				γ			
1	4	14	15	1	4	15	14	1	7	14	12	1	7	12	14
13	16	2	3	13	16	3	2	10	16	5	3	10	16	3	5
8	5	11	10	12	9	6	7	8	2	1	13	15	9	6	4
12	9	7	6	8	5	10	11	15	9	4	6	8	2	13	11
γ				γ				γ				γ			
1	6	15	12	1	6	12	15	1	7	14	12	1	7	12	14
11	16	5	2	11	16	2	5	10	16	5	3	10	16	3	5
14	9	4	7	8	3	13	10	15	9	4	6	8	2	13	11
8	3	10	13	14	9	7	4	8	2	11	13	15	9	6	4
γ				γ				α				α			
2	13	7	12	2	13	11	8	2	13	8	11	2	13	12	7
16	3	9	6	16	3	5	10	16	3	10	5	16	3	6	9
11	8	14	1	7	12	14	1	9	6	15	4	5	10	15	4
5	10	4	15	9	6	4	15	7	12	1	14	11	8	1	14
β				β				β				β			
2	14	7	11	2	14	11	7	2	14	11	7	2	14	7	11
15	3	10	6	15	3	6	10	15	3	6	10	15	3	10	6
12	8	13	1	5	9	16	4	8	12	13	1	9	5	16	4
5	9	4	16	12	8	1	13	9	5	4	16	8	12	1	13

δ				δ				δ				δ			
2	11	8	13	2	11	14	7	2	14	11	7	2	9	16	7
15	4	9	6	15	4	5	10	15	4	5	10	15	5	4	10
10	5	16	3	8	13	12	1	8	13	12	1	6	12	13	3
7	14	1	12	9	6	3	16	9	3	6	16	11	8	1	14
δ				γ				α				γ			
2	15	6	11	2	11	13	8	2	11	8	13	2	11	7	14
16	5	12	1	16	5	3	10	16	5	10	3	16	5	9	4
9	4	13	8	7	14	12	1	9	4	15	6	13	8	12	1
7	10	3	14	9	4	6	15	7	14	1	12	3	10	6	15
α				β				β				β			
2	11	14	7	2	12	7	13	2	12	13	7	2	12	13	7
16	5	4	9	15	5	10	4	15	5	4	10	15	5	4	10
3	10	15	6	14	8	11	1	3	9	16	6	8	14	11	1
13	8	1	12	3	9	6	16	14	8	1	11	9	3	6	16
β				δ				δ				δ			
2	12	7	13	2	9	16	7	2	15	4	13	2	11	14	7
15	5	10	4	15	6	3	10	16	6	11	1	12	6	3	13
9	3	16	6	4	11	14	5	9	3	14	8	5	9	16	4
8	14	1	11	13	8	1	12	7	10	5	12	15	8	1	10
δ				δ				γ				β			
2	11	14	7	2	9	8	15	2	9	15	8	2	9	8	15
13	6	3	12	11	7	10	6	16	7	1	10	16	7	10	1
4	9	16	5	16	4	13	1	5	14	12	3	11	4	13	6
15	8	1	10	5	14	3	12	11	4	6	13	5	14	3	12

γ				β				δ				δ			
2	11	5	16	2	11	16	5	2	14	3	15	2	9	8	15
14	7	9	4	14	7	4	9	16	7	10	1	13	7	10	4
15	6	12	1	3	10	13	8	11	4	13	6	16	6	11	1
3	10	8	13	15	6	1	12	5	9	8	12	3	12	5	14
β				γ				β				γ			
2	9	8	15	2	9	15	8	2	12	5	15	2	12	15	5
16	7	10	1	16	7	1	10	13	7	10	4	13	7	4	10
13	6	11	4	3	12	14	5	16	6	11	1	3	9	14	8
3	12	5	14	13	6	4	11	3	9	8	14	16	6	1	11
δ				δ				γ				β			
2	12	5	15	2	11	13	8	2	11	8	13	2	11	13	8
16	7	10	1	12	7	1	14	14	7	12	1	14	7	1	12
13	6	11	4	5	10	16	3	15	6	9	4	3	10	16	5
3	9	8	14	15	6	4	9	3	10	5	16	15	6	4	9
γ				β				δ				β			
2	12	15	5	2	12	5	15	2	13	11	8	2	9	7	16
13	7	4	10	13	7	10	4	14	7	1	12	15	8	10	1
8	14	9	3	11	1	16	6	3	10	16	5	14	5	11	4
11	1	6	16	8	14	3	9	15	4	6	9	3	12	6	13
β				β				β				δ			
2	9	16	7	2	9	16	7	2	9	7	16	2	9	16	7
15	8	1	10	15	8	1	10	15	8	10	1	12	8	1	13
3	12	13	6	5	14	11	4	12	3	13	6	5	11	14	4
14	5	4	11	12	3	6	13	5	14	4	11	15	6	3	10

δ				γ				α				γ			
2	9	16	7	2	11	7	14	2	11	14	7	2	11	16	5
13	8	1	12	13	8	12	1	13	8	1	12	13	8	3	10
4	11	14	5	16	5	9	4	3	10	15	6	7	14	9	4
15	6	3	10	3	10	6	15	16	5	4	9	12	1	6	15
α				δ				δ				δ			
2	11	5	16	2	3	16	13	2	15	10	7	2	5	12	15
13	8	10	3	15	9	6	4	16	9	8	1	11	9	8	6
12	1	15	6	10	8	11	5	3	6	11	14	14	4	13	3
7	14	4	9	7	14	1	12	13	4	5	12	7	16	1	10
δ								δ							
2	5	12	15	2	5	11	16	2	11	14	7	2	11	5	16
14	9	8	3	14	9	7	4	16	9	4	5	14	9	7	4
11	4	13	6	15	8	10	1	1	8	13	12	15	8	10	1
7	16	1	10	3	12	6	13	15	6	3	10	3	6	12	13
δ				γ				α				γ			
2	14	11	7	2	7	13	12	2	7	12	13	2	7	11	14
16	9	4	5	16	9	3	6	16	9	6	3	16	9	5	4
1	8	13	12	11	14	8	1	5	4	15	10	13	12	8	1
15	3	6	10	5	4	10	15	11	14	1	8	3	6	10	15
α				β				β				β			
2	7	14	11	2	8	11	13	2	8	13	11	2	8	13	11
16	9	4	5	15	9	6	4	15	9	4	6	15	9	4	6
3	6	15	10	14	12	7	1	3	5	16	10	12	14	7	1
13	12	1	8	3	5	10	16	14	12	1	7	5	3	10	16

β				δ				δ				δ			
2	8	11	13	2	5	11	16	2	11	14	7	2	11	5	16
15	9	6	4	15	10	8	1	15	10	3	6	15	10	8	1
5	3	16	10	14	7	9	4	1	8	13	12	14	7	9	4
12	14	1	7	3	12	6	13	16	5	4	9	3	6	12	13
δ				δ				δ				δ			
2	5	16	11	2	15	4	13	2	7	14	11	2	7	14	11
15	10	3	6	16	10	7	1	8	10	3	13	13	10	3	8
4	7	14	9	5	3	14	12	9	5	16	4	4	5	16	9
13	12	1	8	11	6	9	8	15	12	1	6	15	12	1	6
												δ			
2	3	16	13	2	10	15	7	2	10	15	7	2	5	12	15
10	11	8	5	13	11	6	4	16	11	6	1	7	11	6	10
15	6	9	4	3	5	12	14	3	8	9	14	16	4	13	1
7	14	1	12	16	8	1	9	13	5	4	12	9	14	3	8
β				β				γ				β			
2	5	15	12	2	5	12	15	2	7	9	16	2	7	16	9
16	11	1	6	16	11	6	1	14	11	5	4	14	11	4	5
9	14	8	3	7	4	13	10	15	10	8	1	3	6	13	12
7	4	10	13	9	14	3	8	3	6	12	13	15	10	1	8
δ				β				δ				β			
2	14	3	15	2	3	13	16	2	5	12	15	2	5	12	15
16	11	6	1	10	11	5	8	13	11	6	4	16	11	6	1
7	4	13	10	15	6	12	1	16	10	7	1	13	10	7	4
9	5	12	8	7	14	4	9	3	8	9	14	3	8	9	14

	γ				β				γ				δ		
2	5	15	12	2	8	9	15	2	8	15	9	2	8	9	15
16	11	1	6	13	11	6	4	13	11	4	6	16	11	6	1
3	8	14	9	16	10	7	1	3	5	14	12	13	10	7	4
13	10	4	7	3	5	12	14	16	10	1	7	3	5	12	14
	δ				γ				β				γ		
2	7	13	12	2	7	12	13	2	7	13	12	2	8	15	9
8	11	1	14	14	11	8	1	14	11	1	8	13	11	4	6
9	6	16	3	15	10	5	4	3	6	16	9	12	14	5	3
15	10	4	5	3	6	9	16	15	10	4	5	7	1	10	16
	ε				δ				δ				γ		
2	8	9	15	2	13	7	12	2	3	13	16	2	13	3	16
13	11	6	4	14	11	1	8	15	12	6	1	15	12	6	1
7	1	16	10	3	6	16	9	10	5	11	8	10	5	11	8
12	14	3	5	15	4	10	5	7	14	4	9	7	4	14	9
	β				β				β				β		
2	5	11	16	2	5	16	11	2	5	16	11	2	5	11	16
15	12	6	1	15	12	1	6	15	12	1	6	15	12	6	1
14	9	7	4	3	8	13	10	9	14	7	4	8	3	13	10
3	8	10	13	14	9	4	7	8	3	10	13	9	14	4	7
	δ				δ				γ				α		
2	5	16	11	2	5	16	11	2	7	11	14	2	7	14	11
8	12	1	13	13	12	1	8	13	12	8	1	13	12	1	8
9	7	14	4	4	7	14	9	16	9	5	4	3	6	15	10
15	10	3	6	15	10	3	6	3	6	10	15	16	9	4	5

γ				α				δ				δ			
2	7	16	9	2	7	9	16	2	7	10	15	2	7	10	15
13	12	3	6	13	12	6	3	8	12	5	9	11	12	5	6
11	14	5	4	8	1	15	10	11	1	16	6	8	1	16	9
8	1	10	15	11	14	4	5	13	14	3	4	13	14	3	4
δ												δ			
2	8	11	13	2	8	15	9	2	8	15	9	2	11	8	13
14	12	1	7	11	12	5	6	14	12	5	3	14	12	1	7
3	5	16	10	14	13	4	3	11	13	4	6	3	5	16	10
15	9	6	4	7	1	10	16	7	1	10	16	15	6	9	4
δ				δ								δ			
2	1	16	15	2	1	16	15	2	1	15	16	2	11	14	7
11	13	4	6	14	13	4	3	14	13	3	4	12	13	8	1
14	8	9	3	11	8	9	6	11	8	10	5	5	4	9	16
7	12	5	10	7	12	5	10	7	12	6	9	15	6	3	10
δ				δ				γ				β			
2	12	5	15	2	3	14	15	2	3	15	14	2	3	14	15
14	13	4	3	7	13	4	10	16	13	1	4	16	13	4	1
11	8	9	6	16	6	11	1	9	12	8	5	7	6	11	10
7	1	16	10	9	12	5	8	7	6	10	11	9	12	5	8
γ				β				δ				δ			
2	7	9	16	2	7	16	9	2	12	5	15	2	3	14	15
12	13	3	6	12	13	6	3	16	13	4	1	11	13	4	6
15	10	8	1	5	4	11	14	7	6	11	10	16	10	7	1
5	4	14	11	15	10	1	8	9	3	14	8	5	8	9	12

	β				γ				β				γ		
2	3	14	15	2	3	15	14	2	8	9	15	2	8	15	9
16	13	4	1	16	13	1	4	11	13	4	6	11	13	6	4
11	10	7	6	5	8	12	9	16	10	7	1	5	3	12	14
5	8	9	12	11	10	6	7	5	3	14	12	16	10	1	7
	δ														
2	8	9	15	2	6	15	11	2	6	15	11	2	6	15	11
16	13	4	1	7	13	4	10	9	13	4	8	9	13	4	8
11	10	7	6	9	3	14	8	7	3	14	10	16	12	5	1
5	3	14	12	16	12	1	5	16	12	1	5	7	3	10	14
					δ				γ				β		
2	6	15	11	2	7	11	14	2	7	14	11	2	7	11	14
16	13	4	1	8	13	1	12	12	13	8	1	12	13	1	8
9	12	5	8	9	4	16	5	15	10	3	6	5	4	16	9
7	3	10	14	15	10	6	3	5	4	9	16	15	10	6	3
	γ				β				δ						
2	8	15	9	2	8	9	15	2	11	7	14	2	4	15	13
11	13	6	4	11	13	4	6	12	13	1	8	5	14	3	12
14	12	3	5	7	1	16	10	5	4	16	9	16	7	10	1
7	1	10	16	14	12	5	3	15	6	10	3	11	9	6	8
													β		
2	4	15	13	2	4	13	15	2	5	12	15	2	3	13	16
16	14	3	1	16	14	1	3	16	14	1	3	15	14	4	1
5	7	10	12	9	11	8	6	9	11	8	6	12	9	7	6
11	9	6	8	7	5	12	10	7	4	13	10	5	8	10	11

	β				β				β						
2	3	16	13	2	3	16	13	2	3	13	16	2	4	15	13
15	14	1	4	15	14	1	4	15	14	4	1	9	14	3	8
5	8	11	10	9	12	7	6	8	5	11	10	16	11	6	1
12	9	6	7	8	5	10	11	9	12	6	7	7	5	10	12
													δ		
2	4	13	15	2	4	15	13	2	9	8	15	2	7	9	16
16	14	1	3	16	4	3	1	16	14	1	3	15	14	4	1
5	7	12	10	9	11	6	8	5	7	12	10	6	3	13	12
11	9	8	6	7	5	10	12	11	4	13	6	11	10	8	5
	δ				γ				α				γ		
2	9	7	16	2	7	13	12	2	7	12	13	2	7	16	9
15	14	4	1	11	14	8	1	11	14	1	8	11	14	5	4
6	3	13	12	16	9	3	6	5	4	15	10	13	12	3	6
11	8	10	5	5	4	10	15	16	9	6	3	8	1	10	15
	α				γ				γ				γ		
2	7	9	16	2	3	16	13	2	3	13	16	2	3	13	16
11	14	4	5	14	15	4	1	14	15	1	4	14	15	1	4
8	1	15	10	7	6	9	12	11	10	8	5	7	6	12	9
13	12	6	3	11	10	5	8	7	6	12	9	11	10	8	5
	γ				γ				γ				γ		
2	3	16	13	2	8	13	11	2	8	11	13	2	5	16	11
14	15	4	1	9	15	6	4	9	15	4	6	12	15	6	1
11	10	5	8	7	1	12	14	16	10	5	3	7	4	9	14
7	6	9	12	16	10	3	5	7	1	14	12	13	10	3	8

γ				γ				γ				γ			
2	5	11	16	2	5	11	16	2	5	16	11	2	8	11	13
12	15	1	6	12	15	1	6	12	15	6	1	9	15	4	6
13	10	8	3	7	4	14	9	13	10	3	8	7	1	14	12
7	4	14	9	13	10	8	3	7	4	9	14	16	10	5	3
γ				δ				β				γ			
2	8	13	11	2	3	14	15	2	3	14	15	2	3	15	14
9	15	6	4	11	16	1	6	13	16	1	4	13	16	4	1
16	10	3	5	13	10	7	4	11	10	7	6	8	5	9	12
7	1	12	14	8	5	12	9	8	5	12	9	11	10	6	7
β				γ				δ							
2	5	12	15	2	5	15	12	2	5	12	15	2	4	13	15
11	16	1	6	11	16	6	1	13	16	1	4	14	16	3	1
13	10	7	4	8	3	9	14	11	10	7	6	7	5	10	12
8	3	14	9	13	10	4	7	8	3	14	9	11	9	8	6
												δ			
2	4	13	15	2	5	12	15	2	9	8	15	2	3	14	15
14	16	3	1	14	16	3	1	14	16	3	1	7	16	1	10
11	9	6	8	11	9	6	8	7	5	10	12	13	6	11	4
7	5	12	10	7	4	13	10	11	4	13	6	12	9	8	5
γ				β				β				γ			
2	3	15	14	2	3	14	15	2	7	13	12	2	7	12	13
13	16	4	1	13	16	1	4	9	16	6	3	9	16	3	6
12	9	5	8	7	6	11	10	8	1	11	14	15	10	5	4
7	6	10	11	12	9	8	5	15	10	4	5	8	1	14	11

δ				δ				δ							
2	9	8	15	2	3	14	15	2	3	14	15	2	8	11	13
13	16	1	4	8	16	1	9	11	16	1	6	10	16	5	3
7	6	11	10	11	5	12	6	8	5	12	9	15	9	4	6
12	3	14	5	13	10	7	4	13	10	7	4	7	1	14	12
δ				δ				δ				γ			
2	8	11	13	2	10	7	15	2	5	12	15	2	5	15	12
10	16	5	3	11	16	1	6	7	16	1	10	11	16	6	1
7	1	12	14	8	5	12	9	11	4	13	6	14	9	3	8
15	9	6	4	13	3	14	4	14	9	8	3	7	4	10	13
β				γ				β				δ			
2	5	12	15	2	7	14	11	2	7	11	14	2	9	8	15
11	16	1	6	9	16	5	4	9	16	4	5	11	16	1	6
7	4	13	10	15	10	3	6	8	1	13	12	7	4	13	10
14	9	8	3	8	1	12	13	15	10	6	3	14	5	12	3
γ				α				γ				α			
3	13	6	12	3	13	8	10	3	13	10	8	3	13	12	6
16	2	9	7	16	2	11	5	16	2	5	11	16	2	7	9
10	8	15	1	9	7	14	4	6	12	15	1	5	11	14	4
5	11	4	14	6	12	1	15	9	7	4	14	10	8	1	15
β				β				β				β			
3	14	8	9	3	14	9	8	3	14	12	5	3	14	5	12
15	2	12	5	15	2	5	12	15	2	8	9	15	2	9	8
10	7	13	4	6	11	16	1	6	11	13	4	10	7	16	1
6	11	1	16	10	7	4	13	10	7	1	16	6	11	4	13

δ				δ				δ				δ			
3	9	16	6	3	14	7	10	3	10	7	14	3	13	12	6
14	4	5	11	16	4	13	1	13	4	9	8	15	4	5	10
7	13	12	2	9	5	12	8	12	5	16	1	2	9	16	7
10	8	1	15	6	11	2	15	6	15	2	11	14	8	1	11

γ				α				α				δ			
3	10	13	8	3	10	8	13	3	10	15	6	3	9	8	14
16	5	2	11	16	5	11	2	16	5	4	9	12	5	10	7
6	15	12	1	9	4	14	7	2	11	14	7	13	4	15	2
9	4	7	14	6	15	1	12	13	8	1	12	6	16	1	11

δ				β				β				β			
3	12	13	6	3	12	13	6	3	12	13	6	3	12	6	13
16	5	4	9	14	5	4	11	14	5	4	11	14	5	11	4
1	10	15	8	2	9	16	7	8	15	10	1	9	2	16	7
14	7	2	11	15	8	1	10	9	2	7	16	8	15	1	10

δ				γ				β				β			
3	9	8	14	3	9	14	8	3	9	8	14	3	10	16	5
10	6	11	7	16	6	1	11	16	6	11	1	15	6	4	9
16	4	13	1	5	15	12	2	10	4	13	7	2	11	13	8
5	15	2	12	10	4	7	13	5	15	2	12	14	7	1	12

δ				γ				γ				δ			
3	15	2	14	3	9	14	8	3	12	14	5	3	10	13	8
16	6	11	1	16	6	1	11	13	6	4	11	12	6	1	15
10	4	13	7	2	12	15	5	2	9	15	8	5	11	16	2
5	9	8	12	13	7	4	10	16	7	1	10	14	7	4	9

β				γ				β				δ			
3	10	13	8	3	12	14	5	3	12	5	14	3	13	10	8
15	6	1	12	13	6	4	11	13	6	11	4	15	6	1	12
2	11	16	5	8	15	9	2	10	1	16	7	2	11	16	5
14	7	4	9	10	1	7	16	8	15	2	9	14	4	7	9
δ				δ				δ				δ			
3	9	8	14	3	10	15	6	3	12	13	6	3	13	12	6
10	7	12	5	16	7	2	9	14	7	2	11	14	7	2	11
15	2	13	4	1	12	13	8	1	10	15	8	1	10	15	8
6	16	1	11	14	5	4	11	16	5	4	9	16	4	5	9
δ				δ				δ				β			
3	6	15	10	3	9	16	6	3	9	16	6	3	9	16	6
14	7	2	11	10	8	1	15	15	8	1	10	14	8	1	11
4	9	16	5	7	13	12	2	2	13	12	7	2	12	13	7
13	12	1	8	14	4	5	11	14	4	5	11	15	5	4	10
β				β				α				γ			
3	9	16	6	3	9	6	16	3	10	15	6	3	10	16	5
14	8	1	11	14	8	11	1	13	8	1	12	13	8	2	11
5	15	10	4	12	2	13	7	2	11	14	7	6	15	9	4
12	2	7	13	5	15	4	10	16	5	4	9	12	1	7	14
α				δ				δ				δ			
3	10	5	16	3	6	15	10	3	6	15	10	3	12	5	14
13	8	11	2	12	8	1	13	13	8	1	12	15	8	9	2
12	1	14	7	5	9	16	4	4	9	16	5	6	1	16	11
6	15	4	9	14	11	2	7	14	11	2	7	10	13	4	7

	δ				δ				δ				γ		
3	13	4	14	3	14	11	6	3	2	16	13	3	6	13	12
15	8	9	2	16	9	8	1	14	9	7	4	16	9	2	7
6	1	16	11	2	7	10	15	11	8	10	5	10	15	8	1
10	12	5	7	13	4	5	12	6	15	1	12	5	4	11	14
	α				α				δ				δ		
3	6	12	13	3	6	15	10	3	5	12	14	3	8	13	10
16	9	7	2	16	9	4	5	8	9	6	11	16	9	4	5
5	4	14	11	2	7	14	11	13	4	15	2	1	6	15	12
10	15	1	8	13	12	1	8	10	16	1	7	14	11	2	7
	β				β				β						
3	8	13	10	3	8	13	10	3	8	10	13	3	2	16	13
14	9	4	7	14	9	4	7	14	9	7	4	11	10	8	5
2	5	16	11	12	15	6	1	5	2	16	11	14	7	9	4
15	12	1	6	5	2	11	16	12	15	1	6	6	15	1	12
													δ		
3	2	13	16	3	11	14	6	3	11	14	6	3	5	12	14
11	10	5	8	13	10	7	4	16	10	7	1	6	10	7	11
14	7	12	1	2	5	12	15	2	8	9	15	16	4	13	1
6	15	4	9	16	8	1	9	13	5	4	12	9	15	2	8
	γ				β				β				δ		
3	5	14	12	3	5	12	14	3	6	16	9	3	15	2	14
16	10	1	7	16	10	7	1	15	10	4	5	16	10	7	1
9	15	8	2	6	4	13	11	2	7	13	12	6	4	13	11
6	4	11	13	9	15	2	8	14	11	1	8	9	5	12	8

	γ				γ				δ				β		
3	5	14	12	3	8	14	9	3	6	13	12	3	6	13	12
16	10	1	7	13	10	4	7	8	10	1	15	15	10	1	8
2	8	15	9	2	5	15	12	9	7	16	2	2	7	16	9
13	11	4	6	16	11	1	6	14	11	4	5	14	11	4	5
	γ				β				δ				δ		
3	8	14	9	3	8	9	14	3	13	6	12	3	2	16	13
13	10	4	7	13	10	7	4	15	10	1	8	14	11	5	4
12	15	5	2	6	1	16	11	2	7	16	9	7	6	12	9
6	1	11	16	12	15	2	5	14	4	11	5	10	15	1	8
	δ				δ				δ				δ		
3	14	7	10	3	5	12	14	3	6	15	10	3	8	13	10
16	11	6	1	6	11	8	9	16	11	2	5	14	11	2	7
2	5	12	15	15	2	13	4	1	8	13	12	1	6	15	12
13	4	9	8	10	16	1	7	14	9	4	7	16	9	4	5
	δ				δ				δ				δ		
3	13	8	10	3	6	12	13	3	6	12	13	3	2	13	16
14	11	2	7	8	11	5	10	10	11	5	8	14	11	7	1
1	6	15	12	9	2	16	7	7	2	16	9	11	5	10	8
16	4	9	5	14	15	1	4	14	15	1	4	6	15	4	9
	δ														
3	13	2	16	3	2	15	14	3	2	16	13	3	7	10	14
14	12	7	1	16	12	1	5	7	12	6	9	16	12	1	5
11	5	10	8	9	13	8	4	14	5	11	4	9	13	8	4
6	4	15	9	6	7	10	11	10	15	1	8	6	2	15	11

				β				β				β			
3	7	14	10	3	5	16	10	3	5	16	10	3	5	10	16
16	12	5	1	14	12	1	7	14	12	1	7	14	12	7	1
2	6	11	15	2	8	13	11	9	15	6	4	8	2	13	11
13	9	4	8	15	9	4	6	8	2	11	13	9	15	4	6
α				γ				α							
3	6	15	10	3	6	16	9	3	6	9	16	3	7	14	10
13	12	1	8	13	12	2	7	13	12	7	2	9	12	5	8
2	7	14	11	10	15	5	4	8	1	14	11	16	13	4	1
16	9	4	5	8	1	11	14	10	15	4	5	6	2	11	15
												δ			
3	7	10	14	3	7	14	10	3	9	8	14	3	2	15	14
16	12	1	5	16	12	5	1	16	12	1	5	6	13	4	11
2	6	15	11	9	13	4	8	2	6	15	11	16	7	10	1
13	9	8	4	6	2	11	15	13	7	10	4	9	12	5	8
γ				β				γ				β			
3	2	14	15	3	2	15	14	3	6	9	16	3	6	16	9
16	13	1	4	16	13	4	1	12	13	2	7	12	13	7	2
9	12	8	5	6	7	10	11	14	11	8	1	5	4	10	15
6	7	11	10	9	12	5	8	5	4	15	10	14	11	1	8
δ															
3	12	5	14	3	1	16	14	3	1	16	14	3	8	9	14
16	13	4	1	15	13	2	4	15	13	2	4	15	13	2	4
6	7	10	11	6	8	11	9	10	12	7	5	10	12	7	5
9	2	15	8	10	12	5	7	6	8	9	11	6	1	16	11

					δ				β				γ		
3	12	5	14	3	2	15	14	3	2	15	14	3	2	14	15
15	13	2	4	10	13	4	7	16	13	4	1	16	13	1	4
6	8	11	9	16	11	6	1	10	11	6	7	5	8	12	9
10	1	16	7	5	8	9	12	5	8	9	12	10	11	7	6
	β				γ				δ				γ		
3	8	9	14	3	8	14	9	3	8	9	14	3	6	15	10
10	13	4	7	10	13	7	4	16	13	4	1	12	13	8	1
16	11	6	1	5	2	12	15	10	11	6	7	14	11	2	7
5	2	15	12	16	11	1	6	5	2	15	12	5	4	9	16
	γ				γ				γ				γ		
3	8	14	9	3	2	13	16	3	2	16	13	3	5	16	10
10	13	7	4	15	14	1	4	15	14	4	1	12	14	7	1
15	12	2	5	10	11	8	5	6	7	9	12	6	4	9	15
6	1	11	16	6	7	12	9	10	11	5	8	13	11	2	8
	γ				γ				γ				γ		
3	5	10	16	3	2	16	13	3	2	13	16	3	8	13	10
12	14	1	7	15	14	4	1	15	14	1	4	9	14	7	4
13	11	8	2	10	11	5	8	6	7	12	9	6	1	12	15
6	4	15	9	6	7	9	12	10	11	8	5	16	11	2	5
	γ				γ				γ						
3	8	10	13	3	5	16	10	3	8	13	10	3	12	5	14
9	14	4	7	12	14	7	1	9	14	7	4	13	15	4	2
16	11	5	2	13	11	2	8	16	11	2	5	8	6	9	11
6	1	15	12	6	4	9	15	6	1	12	15	10	1	16	7

													β		
3	1	14	16	3	1	16	14	3	1	14	16	3	2	13	16
12	15	2	5	13	15	4	2	13	15	2	4	14	15	4	1
13	10	7	4	8	6	9	11	12	10	7	5	12	9	6	7
6	8	11	9	10	12	5	7	6	8	11	9	5	8	11	10
	β				β				β						
3	2	16	13	3	2	16	13	3	2	13	16	3	1	14	16
14	15	1	4	14	15	1	4	14	15	4	1	8	15	2	9
5	8	10	11	9	12	6	7	8	5	10	11	13	6	11	4
12	9	7	6	8	5	11	10	9	12	7	6	10	12	7	5
													δ		
3	1	14	16	3	1	16	14	3	8	9	14	3	2	16	13
13	15	2	4	13	15	4	2	13	15	4	2	8	15	1	10
8	6	11	9	12	10	5	7	12	10	5	7	9	6	12	7
10	12	7	5	6	8	9	11	6	1	16	11	14	11	5	4
	δ				γ				γ				δ		
3	2	16	13	3	6	13	12	3	6	16	9	3	4	13	14
10	15	1	8	10	15	8	1	10	15	5	4	6	16	1	11
7	6	12	9	16	9	2	7	13	12	2	7	15	9	8	2
14	11	5	4	5	4	11	14	8	1	11	14	10	5	12	7
	δ								δ				δ		
3	4	13	14	3	4	14	13	3	5	12	14	3	5	12	14
15	16	1	2	15	16	2	1	6	16	1	11	15	16	1	2
6	9	8	11	6	9	7	12	15	9	8	2	6	9	8	11
10	5	12	7	10	5	11	8	10	4	13	7	10	4	13	7

	δ				β				γ				β		
3	2	15	14	3	2	15	14	3	2	14	15	3	5	12	14
10	16	1	7	13	16	1	4	13	16	4	1	10	16	1	7
13	11	6	4	10	11	6	7	8	5	9	12	13	11	6	4
8	5	12	9	8	5	12	9	10	11	7	6	8	2	15	9
	γ				δ				δ				γ		
3	5	14	12	3	5	12	14	3	2	15	14	3	2	14	15
10	16	7	1	13	16	1	4	6	16	1	11	13	16	4	1
8	2	9	15	10	11	6	7	13	7	10	4	12	9	5	8
13	11	4	6	8	2	15	9	12	9	8	5	6	7	11	10
	β				γ				β				δ		
3	2	15	14	3	6	12	13	3	6	13	12	3	9	8	14
13	16	1	4	9	16	2	7	9	16	7	2	13	16	1	4
6	7	10	11	14	11	5	4	8	1	10	15	6	7	10	11
12	9	8	5	8	1	15	10	14	11	4	5	12	2	15	5
3	2	15	14	3	7	10	14	3	7	10	14	3	9	8	14
12	16	5	1	12	16	5	1	12	16	5	1	12	16	5	1
13	9	4	8	13	9	4	8	6	2	11	15	6	2	11	15
6	7	10	11	6	2	15	11	13	9	8	4	13	7	10	4
	γ				γ				β				β		
3	5	14	12	3	6	15	10	4	16	5	9	4	16	9	5
10	16	7	1	9	16	5	4	13	1	12	8	13	1	8	12
15	9	2	8	14	11	2	7	11	7	14	2	6	10	15	3
6	4	11	13	8	1	12	13	6	10	3	15	11	7	2	14

β				β				α				γ			
4	16	9	5	4	16	5	9	4	15	6	9	4	15	9	6
13	1	8	12	13	1	12	8	14	1	12	7	14	1	7	12
7	11	14	2	10	6	15	3	11	8	13	2	5	10	16	3
10	6	3	15	7	11	2	14	5	10	3	16	11	8	2	13
α				γ				δ				δ			
4	15	10	5	4	15	5	10	4	15	6	9	4	15	10	5
14	1	8	11	14	1	11	8	11	2	13	8	11	2	7	14
7	12	13	2	9	6	16	3	14	7	12	1	6	9	16	3
9	6	3	16	7	12	2	13	5	10	3	16	13	8	1	12
δ				δ				δ				δ			
4	15	10	5	4	9	8	13	4	14	11	5	4	10	15	5
14	2	7	11	14	3	10	7	16	3	6	9	13	3	6	12
3	9	16	6	11	6	15	2	1	10	15	8	8	14	11	1
13	8	1	12	5	16	1	12	13	7	2	12	9	7	2	16
δ				δ				β				γ			
4	13	8	9	4	9	15	6	4	9	15	6	4	10	13	7
15	3	14	2	10	5	3	16	16	5	3	10	15	5	2	12
10	6	11	7	7	12	14	1	1	12	14	7	6	16	11	1
5	12	1	16	13	8	2	11	13	8	2	11	9	3	8	14
β				δ				β				δ			
4	10	7	13	4	15	9	6	4	16	1	13	4	16	1	13
15	5	12	2	16	5	3	10	9	5	12	8	14	5	12	3
9	3	14	8	1	12	14	7	14	2	15	3	9	2	15	8
6	16	1	11	13	2	8	11	7	11	6	10	7	11	6	10

γ				β				δ				γ			
4	14	7	9	4	14	9	7	4	11	6	13	4	15	1	14
11	5	16	2	11	5	2	16	9	5	12	8	10	5	11	8
13	3	10	8	6	12	15	1	14	2	15	3	13	2	16	3
6	12	1	15	13	3	8	10	7	16	1	10	7	12	6	9
γ				α				γ				α			
4	14	1	15	4	15	1	14	4	15	5	10	4	15	10	5
11	5	10	8	9	6	12	7	9	6	16	3	9	6	3	16
13	3	16	2	16	3	13	2	14	1	11	8	7	12	13	2
6	12	7	9	5	10	8	11	7	12	2	13	14	1	8	11
δ				δ				β				β			
4	16	9	5	4	13	2	15	4	13	7	10	4	13	10	7
13	6	3	12	9	6	11	8	11	6	16	1	11	6	1	16
2	11	14	7	16	3	14	1	14	3	9	8	5	12	15	2
15	1	8	10	5	12	7	10	5	12	2	15	14	3	8	9
β				δ				δ				δ			
4	13	1	16	4	15	2	13	4	15	2	13	4	12	5	13
11	6	10	7	7	6	11	10	14	6	11	3	7	6	11	10
14	3	15	2	14	1	16	3	7	1	16	10	14	1	16	3
5	12	8	9	9	12	5	8	9	12	5	8	9	15	2	8
δ				δ				δ				γ			
4	14	7	9	4	9	8	13	4	10	15	5	4	9	15	6
12	6	1	15	10	7	14	3	16	7	2	9	14	7	1	12
5	11	16	2	15	2	11	6	1	14	11	8	5	16	10	3
13	3	10	8	5	16	1	12	13	3	6	12	11	2	8	13

	α				α				β				β		
4	9	6	15	4	9	16	5	4	13	1	16	4	13	6	11
14	7	12	1	14	7	2	11	10	7	11	6	10	7	16	1
11	2	13	8	1	12	13	8	15	2	14	3	15	2	9	8
5	16	3	10	15	6	3	10	5	12	8	9	5	12	3	14
	β				δ				δ				δ		
4	13	11	6	4	11	6	13	4	5	16	9	4	5	16	9
10	7	1	16	16	7	10	1	11	7	2	14	14	7	2	11
5	12	14	3	5	2	15	12	6	10	15	3	3	10	15	6
15	2	8	9	9	14	3	8	13	12	1	8	13	12	1	8
	δ				δ				δ				δ		
4	14	3	13	4	9	6	15	4	9	16	5	4	9	16	5
16	7	10	1	11	8	13	2	11	8	1	14	14	8	1	11
5	2	15	12	14	1	12	7	6	15	10	3	3	15	10	6
9	11	6	8	5	16	3	10	13	2	7	12	13	2	7	12
	δ				δ				δ				δ		
4	5	16	9	4	5	14	11	4	5	14	11	4	10	7	13
13	8	1	12	10	8	1	15	15	8	1	10	14	8	9	3
3	10	15	6	7	9	16	2	2	9	16	7	5	1	16	12
14	11	2	7	13	12	3	6	13	12	3	6	11	15	2	6
	δ														
4	14	5	11	4	1	15	14	4	1	14	15	4	12	13	5
15	8	1	10	12	9	7	6	12	9	6	7	14	9	8	3
2	9	16	7	13	8	10	3	13	8	11	2	1	6	11	16
13	3	12	6	5	16	2	11	5	16	3	10	15	7	2	10

				δ				β				γ			
4	12	13	5	4	5	15	10	4	5	15	10	4	6	13	11
15	9	8	2	6	9	3	16	16	9	3	6	15	9	2	8
1	7	10	16	11	8	14	1	1	8	14	11	10	16	7	1
14	6	3	11	13	12	2	7	13	12	2	7	5	3	12	14
β				δ				δ				β			
4	6	11	13	4	15	5	10	4	5	14	11	4	5	14	11
15	9	8	2	16	9	3	6	7	9	2	16	16	9	2	7
5	3	14	12	1	8	14	11	10	8	15	1	1	8	15	10
10	16	1	7	13	2	12	7	13	12	3	6	13	12	3	6
γ				β				δ				γ			
4	7	13	10	4	7	10	13	4	14	5	11	4	6	13	11
14	9	3	8	14	9	8	3	16	9	2	7	15	9	2	8
11	16	6	1	5	2	15	12	1	8	15	10	1	7	16	10
5	2	12	15	11	16	1	6	13	3	12	6	14	12	3	5
γ				δ				δ				δ			
4	7	13	10	4	1	15	14	4	13	12	5	4	3	14	13
14	9	3	8	13	10	8	3	15	10	7	2	6	10	7	11
1	6	16	11	12	7	9	6	1	8	9	16	15	5	12	2
15	12	2	5	5	16	2	11	14	3	6	11	9	16	1	8
δ												δ			
4	3	14	13	4	3	14	13	4	6	11	13	4	6	15	9
15	10	7	2	16	10	1	7	16	10	1	7	16	10	5	3
6	5	12	11	9	15	8	2	9	15	8	2	1	7	12	14
9	16	1	8	5	6	11	12	5	3	14	12	13	11	2	8

δ				γ				α				α			
4	15	6	9	4	5	14	11	4	5	11	14	4	5	16	9
16	10	5	3	15	10	1	8	15	10	8	1	15	10	3	6
1	7	12	14	9	16	7	2	6	3	13	12	1	8	13	12
13	2	11	8	6	3	12	13	9	16	2	7	14	11	2	7
δ				δ				β				β			
4	5	16	9	4	13	2	15	4	7	14	9	4	7	14	9
13	10	3	8	16	10	7	1	13	10	3	8	13	10	3	8
2	7	14	11	5	3	14	12	1	6	15	12	11	16	5	2
15	12	1	6	9	8	11	6	16	11	2	5	6	1	12	15
β				δ				δ							
4	7	9	14	4	1	14	15	4	13	12	5	4	1	15	14
13	10	8	3	13	11	8	2	14	11	6	3	8	11	5	10
6	1	15	12	12	6	9	7	1	8	9	16	13	6	12	3
11	16	2	5	5	16	3	10	15	2	7	10	9	16	2	7
												γ			
4	1	16	13	4	8	9	13	4	8	13	9	4	5	15	10
15	11	2	6	15	11	2	6	15	11	6	2	14	11	1	8
10	14	7	3	10	14	7	3	1	5	12	16	9	16	6	3
5	8	9	12	5	1	16	12	14	10	3	7	7	2	12	13
α				α				β				β			
4	5	10	15	4	5	16	9	4	6	15	9	4	6	15	9
14	11	8	1	14	11	2	7	13	11	2	8	13	11	2	8
7	2	13	12	1	8	13	12	1	7	14	12	10	16	5	3
9	16	3	6	15	10	3	6	16	10	3	5	7	1	12	14

	β												δ		
4	6	9	15	4	8	13	9	4	8	13	9	4	1	16	13
13	11	8	2	10	11	6	7	15	11	6	2	6	12	5	11
7	1	14	12	15	14	3	2	10	14	3	7	15	7	10	2
10	16	3	5	5	1	12	16	5	1	12	16	9	14	3	8
	δ				δ								δ		
4	1	16	13	4	6	15	9	4	6	9	15	4	14	3	13
15	12	5	2	14	12	7	1	14	12	1	7	15	12	5	2
6	7	10	11	3	5	10	16	11	13	8	2	6	7	10	11
9	14	3	8	13	11	2	8	5	3	16	10	9	1	16	8
	δ				δ								γ		
4	1	15	14	4	13	8	9	4	6	15	9	4	1	14	15
13	12	6	3	15	12	5	2	14	12	7	1	16	13	2	3
8	5	11	10	1	6	11	16	11	13	2	8	9	12	7	6
9	16	2	7	14	3	10	7	5	3	10	16	5	8	11	10
	γ				γ				γ				γ		
4	1	15	14	4	6	15	9	4	6	9	15	4	1	15	14
16	13	3	2	11	13	8	2	11	13	2	8	16	13	3	2
5	8	10	11	5	3	10	16	14	12	7	1	9	12	6	7
9	12	6	7	14	12	1	7	5	3	16	10	5	8	10	11
	γ				γ				γ				γ		
4	1	14	15	4	7	9	14	4	7	14	9	4	6	15	9
16	13	2	3	10	13	3	8	10	13	8	3	11	13	8	2
5	8	11	10	15	12	6	1	5	2	11	16	14	12	1	7
9	12	7	6	5	2	16	11	15	12	1	6	5	3	10	16

	γ				δ				γ				β		
4	7	14	9	4	1	16	13	4	1	13	16	4	1	16	13
10	13	8	3	5	14	3	12	15	14	2	3	15	14	3	2
15	12	1	6	15	8	9	2	10	11	7	6	5	8	9	12
5	2	11	16	10	11	6	7	5	8	12	9	10	11	6	7
	γ				β				δ						
4	5	10	15	4	5	15	10	4	11	6	13	4	2	13	15
11	14	1	8	11	14	8	1	15	14	3	2	9	14	3	8
13	12	7	2	6	3	9	16	5	8	9	12	16	11	6	1
6	3	16	9	13	12	2	7	10	1	16	7	5	7	12	10
													δ		
4	2	13	15	4	2	13	15	4	2	13	15	4	1	16	13
16	14	3	1	5	14	3	12	16	14	3	1	9	14	3	8
9	11	6	8	16	7	10	1	5	7	10	12	15	12	5	2
5	7	12	10	9	11	8	6	9	11	8	6	6	7	10	11
	β				γ				β				β		
4	1	16	13	4	1	13	16	4	7	10	13	4	7	13	10
15	14	3	2	15	14	2	3	9	14	3	8	9	14	8	3
9	12	5	8	6	7	11	10	15	12	5	2	6	1	11	16
6	7	10	11	9	12	8	5	6	1	16	11	15	12	2	5
	δ				γ				γ				δ		
4	7	10	13	4	5	16	9	4	7	13	10	4	3	14	13
15	14	3	2	11	14	7	2	9	14	8	3	5	15	2	12
9	12	5	8	13	12	1	8	16	11	1	6	16	10	7	1
6	1	16	11	6	3	10	15	5	2	12	15	9	6	11	8

δ								δ				δ			
4	3	14	13	4	3	13	14	4	5	16	9	4	6	11	13
16	15	2	1	16	15	1	2	6	15	10	3	16	15	2	1
5	10	7	12	5	10	8	11	11	2	7	14	5	10	7	12
9	6	11	8	9	6	12	7	13	12	1	8	9	3	14	8
δ				γ				β				γ			
4	1	16	13	4	1	13	16	4	1	16	13	4	5	11	14
5	15	2	12	14	15	3	2	14	15	2	3	10	15	1	8
14	8	9	3	11	10	6	7	5	8	9	12	13	12	6	3
11	10	7	6	5	8	12	9	11	10	7	6	7	2	16	9
β				δ				δ				β			
4	5	14	11	4	10	7	13	4	1	16	13	4	1	16	13
10	15	8	1	14	15	2	3	9	15	2	8	14	15	2	3
7	2	9	16	5	8	9	12	14	12	5	3	9	12	5	8
13	12	3	6	11	1	16	6	7	6	11	10	7	6	11	10
γ				β				γ				δ			
4	1	13	16	4	6	11	13	4	6	13	11	4	6	11	13
14	15	3	2	9	15	2	8	9	15	8	2	14	15	2	3
7	6	10	11	14	12	5	3	7	1	10	16	9	12	5	8
9	12	8	5	7	1	16	10	14	12	3	5	7	1	16	10
								γ				γ			
4	1	16	13	4	8	9	13	4	5	16	9	4	6	13	11
11	15	6	2	11	15	6	2	10	15	6	3	9	15	8	2
14	10	3	7	14	10	3	7	13	12	1	8	16	10	1	7
5	8	9	12	5	1	16	12	7	2	11	14	5	3	12	14

δ				δ				δ				δ			
4	2	15	13	4	2	15	13	4	2	15	13	4	2	15	13
5	16	1	12	14	16	1	3	7	16	1	10	14	16	1	3
14	9	8	3	5	9	8	12	14	11	6	3	7	11	6	10
11	7	10	6	11	7	10	6	9	5	12	8	9	5	12	8

δ				δ				δ				δ			
4	5	12	13	4	5	12	13	4	5	14	11	4	7	10	13
7	16	1	10	14	16	1	3	7	16	9	2	14	16	1	3
14	11	6	3	7	11	6	10	10	1	8	15	5	9	8	12
9	2	15	8	9	2	15	8	13	12	3	6	11	2	15	6

β				β				β				β			
4	1	14	15	4	1	15	14	4	1	15	14	4	1	14	15
13	16	3	2	13	16	2	3	13	16	2	3	13	16	3	2
11	10	5	8	6	7	9	12	10	11	5	8	7	6	9	12
6	7	12	9	11	10	8	5	7	6	12	9	10	11	8	5

								γ				γ			
4	3	14	13	4	6	11	13	4	5	14	11	4	5	15	10
10	16	7	1	10	16	7	1	9	16	7	2	9	16	6	3
15	9	2	8	15	9	2	8	15	10	1	8	14	11	1	8
5	6	11	12	5	3	14	12	6	3	12	13	7	2	12	13

γ				β				γ				β			
5	11	10	8	5	12	9	8	5	10	11	8	5	12	9	8
16	2	3	13	15	2	3	14	16	3	2	13	14	3	2	15
4	14	15	1	4	13	16	1	4	15	14	1	4	13	16	1
9	7	6	12	10	7	6	11	9	6	7	12	11	6	7	10

γ				γ				δ				β			
5	9	12	8	5	9	12	8	5	10	11	8	5	10	11	8
16	4	1	13	16	4	1	13	14	4	1	15	15	4	1	14
3	15	14	2	2	14	15	3	3	13	16	2	2	13	16	3
10	6	7	11	11	7	6	10	12	7	6	9	12	7	6	9
β				δ				δ				δ			
5	11	10	8	5	11	10	8	5	4	13	12	5	11	8	10
14	4	1	15	15	4	1	14	11	6	3	14	15	6	9	4
3	13	16	2	2	13	16	3	8	9	16	1	2	3	16	13
12	6	7	9	12	6	7	9	10	15	2	7	12	14	1	7
δ				δ											
5	4	13	12	5	10	8	11	5	2	15	12	5	13	4	12
10	7	2	15	14	7	9	4	16	8	1	9	16	8	1	9
8	9	16	1	3	2	16	13	3	11	14	6	3	11	14	6
11	14	3	6	12	15	1	6	10	13	4	7	10	2	15	7
								α				α			
5	3	14	12	5	13	4	12	5	4	14	11	5	4	15	10
16	8	1	9	16	8	1	9	16	9	7	2	16	9	6	3
2	10	15	7	2	10	15	7	3	6	12	13	2	7	12	13
11	13	4	6	11	3	14	6	10	15	1	8	11	14	1	8
δ				δ				δ				δ			
5	3	16	10	5	3	16	10	5	6	11	12	5	15	2	12
6	9	4	15	15	9	4	6	16	9	8	1	16	9	8	1
11	8	13	2	2	8	13	11	3	4	13	14	3	4	13	14
12	14	1	7	12	14	1	7	10	15	2	7	10	6	11	7

δ				δ				δ				β			
5	2	15	12	5	8	10	11	5	3	14	12	5	3	14	12
8	9	4	13	16	9	7	2	4	10	7	13	16	10	7	1
10	7	14	3	1	4	14	15	16	6	11	1	4	6	11	13
11	16	1	6	12	13	3	6	9	15	2	8	9	15	2	8
β				δ											
5	4	16	9	5	15	2	12	5	1	16	12	5	14	4	11
15	10	6	3	16	10	7	1	14	10	3	7	15	10	8	1
2	7	11	14	4	6	11	13	4	8	13	9	2	3	13	16
12	13	1	8	9	3	14	8	11	15	2	6	12	7	9	6
δ				β				β				δ			
5	2	15	12	5	2	15	12	5	14	3	12	5	14	3	12
4	11	6	13	16	11	6	1	4	11	6	13	16	11	6	1
16	7	10	1	4	7	10	13	16	7	10	1	4	7	10	13
9	14	3	8	9	14	3	8	9	2	15	8	9	2	15	8
γ				γ				δ				δ			
5	2	16	11	5	3	16	10	5	3	16	10	5	3	16	10
15	12	6	1	14	12	7	1	11	13	8	2	2	13	8	11
4	7	9	14	4	6	9	15	6	4	9	15	15	4	9	6
10	13	3	8	11	13	2	8	12	14	1	7	12	14	1	7
δ				δ				δ				δ			
5	2	15	12	5	11	6	12	5	4	14	11	5	4	14	11
16	13	4	1	16	13	4	1	16	13	3	2	2	13	3	16
3	8	9	14	3	8	9	14	1	8	10	15	15	8	10	1
10	11	6	7	10	2	15	7	12	9	7	6	12	9	7	6

	δ				δ										
5	3	16	10	5	3	16	10	5	1	16	12	5	10	8	11
4	14	1	15	15	14	1	4	10	14	7	3	15	14	4	1
13	11	8	2	2	11	8	13	8	4	9	13	2	7	9	16
12	6	9	7	12	6	9	7	11	15	2	6	12	3	13	6
	β				γ				δ				δ		
5	3	16	10	5	4	16	9	5	2	16	11	5	2	16	11
12	14	1	7	11	14	2	7	4	15	1	14	14	15	1	4
9	15	4	6	10	15	3	6	13	10	8	3	3	10	8	12
8	2	13	11	8	1	13	12	12	7	9	6	12	7	9	6
	β				γ										
5	2	16	11	5	4	16	9	5	2	15	12	5	8	11	10
12	15	1	6	10	15	3	6	8	16	9	1	13	16	3	2
9	14	4	7	11	14	2	7	11	3	6	14	4	9	6	15
8	3	13	10	8	1	13	12	10	13	4	7	12	1	14	7
									δ				β		
5	8	10	11	5	8	10	11	5	2	15	12	5	2	15	12
13	16	2	3	3	16	2	13	10	16	1	7	11	16	1	6
4	9	7	14	14	9	7	4	11	13	4	6	10	13	4	7
12	1	15	6	12	1	15	6	8	3	14	9	8	3	14	9
	β				δ				γ				γ		
5	3	14	12	5	3	14	12	5	4	14	11	5	4	15	10
10	16	1	7	11	16	1	6	9	16	2	7	9	16	3	6
11	13	4	6	10	13	4	7	12	13	3	6	12	13	2	7
8	2	15	9	8	2	15	9	8	1	15	10	8	1	14	11

β				γ				γ				δ			
6	11	10	7	6	12	9	7	6	10	11	7	6	9	12	7
16	1	4	13	15	1	4	14	15	3	2	14	13	3	2	16
3	14	15	2	3	13	16	2	4	16	13	1	4	14	15	1
9	8	5	12	10	8	5	11	9	5	8	12	11	8	5	10
β				β				δ				γ			
6	9	12	7	6	12	9	7	6	12	9	7	6	10	11	7
16	3	2	13	13	3	2	16	16	3	2	13	15	3	2	14
1	14	15	4	4	14	15	1	1	14	15	4	1	13	16	4
11	8	5	10	11	5	8	10	11	5	8	10	12	8	5	9
γ				β				δ				δ			
6	9	12	7	6	11	10	7	6	7	12	9	6	7	12	9
15	4	1	14	13	4	1	16	14	4	1	15	15	4	1	14
3	16	13	2	3	14	15	2	3	13	16	2	2	13	16	3
10	5	8	11	12	5	8	9	11	10	5	8	11	10	5	8
δ				δ				δ				δ			
6	12	7	9	6	12	7	9	6	3	14	11	6	12	7	9
14	4	1	15	15	4	1	14	12	5	4	13	16	5	10	3
3	13	16	2	2	13	16	3	7	10	15	2	1	4	15	14
11	5	10	8	11	5	10	8	9	16	1	8	11	13	2	8
								δ				β			
6	1	16	11	6	14	3	11	6	3	15	10	6	3	15	10
15	7	2	10	15	7	2	10	4	9	5	16	16	9	5	4
4	12	13	5	4	12	13	5	13	8	12	1	1	8	12	13
9	14	3	8	9	1	16	8	11	14	2	7	11	14	2	7

β				δ				α				α			
6	4	13	11	6	15	3	10	6	3	13	12	6	3	16	9
15	9	8	2	16	9	5	4	15	10	8	1	15	10	5	4
3	5	12	14	1	8	12	13	4	5	11	14	1	8	11	14
10	16	1	7	11	2	14	7	9	16	2	7	12	13	2	7
γ				γ				δ				β			
6	1	15	12	6	4	15	9	6	1	16	11	6	1	16	11
16	11	5	2	13	11	8	2	3	12	5	14	15	12	5	2
3	8	10	13	3	5	10	16	15	8	9	2	3	8	9	14
9	14	4	7	12	14	1	7	10	13	4	7	10	13	4	7
β				δ				δ				δ			
6	3	15	10	6	13	4	11	6	3	14	11	6	4	15	9
13	12	8	1	15	12	5	2	4	13	12	5	16	13	2	3
4	5	9	16	3	8	9	14	15	2	7	10	1	12	7	14
11	14	2	7	10	1	16	7	9	16	1	8	11	5	10	8
γ				β											
6	3	15	10	6	4	15	9	6	7	12	9	6	7	12	9
12	13	1	8	11	13	2	8	14	15	4	1	1	15	4	14
9	16	4	5	10	16	3	5	3	10	5	16	16	10	5	3
7	2	14	11	7	1	14	12	11	2	13	8	11	2	13	8
γ				δ				β				β			
6	3	13	12	6	1	16	11	6	1	16	11	6	4	13	11
10	15	1	8	9	15	2	8	12	15	2	5	9	15	2	8
11	14	4	5	12	14	3	5	9	14	3	8	12	14	3	5
7	2	16	9	7	4	13	10	7	4	13	10	7	1	16	10

	δ				γ				δ				δ		
6	4	13	11	6	3	16	9	6	2	15	11	6	2	15	11
12	15	2	5	10	15	4	5	7	16	1	10	12	16	1	5
9	14	3	8	11	14	1	8	12	13	4	5	7	13	4	10
7	1	16	10	7	2	13	12	9	3	14	8	9	3	14	8
	δ				δ				β				γ		
6	3	14	11	6	3	14	11	6	1	15	12	6	3	15	10
7	16	1	10	12	16	1	5	11	16	2	5	9	16	4	5
12	13	4	5	7	13	4	10	10	13	3	8	12	13	1	8
9	2	15	8	9	2	15	8	7	4	14	9	7	2	14	11
	δ				δ										
7	6	11	10	7	12	5	10	7	5	12	10	7	11	6	10
14	3	2	15	14	3	2	15	16	4	1	13	16	4	1	13
4	13	16	1	4	13	16	1	2	14	15	3	2	14	15	3
9	12	5	8	9	6	11	8	9	11	6	8	9	5	12	8
	δ				δ										
7	2	15	10	7	16	1	10	7	1	16	10	7	15	2	10
12	5	4	13	12	5	4	13	14	6	3	11	14	6	3	11
6	11	14	3	6	11	14	3	4	12	13	5	4	12	13	5
9	16	1	8	9	2	15	8	9	15	2	8	9	1	16	8
	δ				δ										
7	2	15	10	7	4	14	9	7	1	16	10	7	6	12	9
4	13	12	5	16	13	3	2	6	14	11	3	15	14	4	1
14	3	6	11	1	12	6	15	12	4	5	13	2	11	5	16
9	16	1	8	10	5	11	8	9	15	2	8	10	3	13	8

	δ					δ									
7	2	16	9	7	2	16	9	7	4	14	9	7	4	14	9
6	15	1	12	12	15	1	6	11	16	2	5	5	16	2	11
11	14	4	5	5	14	4	11	6	13	3	12	12	13	3	6
10	3	13	8	10	3	13	8	10	1	15	8	10	1	15	8

α	48
β	192
γ	192
δ	328
. . . .	120
Somme	880

NOMBRE DES TABLES
de chaque sorte.

De celles qui ont 1 à l'un des coins, il y en a		208	208
De celles qui ont	2	200	200
	3	204	166
	4	238	178
	5	216	64
	6	206	48
	7	230	16
			Somme 880

Mais parce que des Tables qui ont à l'un des coins, 3, 4, 5, 6, ou 7, ont aussi à d'autres coins des nombres moindres, comme 1 ou 2, &c. on a mis ensuite la multitude des Tables qui ont quelqu'un de ces nombres à l'un de leurs coins, & aux autres coins des nombres plus grands. Ainsi il y a 204 Tables, qui ont trois à l'un de leurs coins; mais il n'y en a que cent soixante-six qui ayent 3 à l'un de leurs coins, & aux autres coins des nombres plus grands que 3. De même il y a deux cens trente Tables qui ont 7 à l'un de leurs coins; mais il n'y en a que seize qui n'ayent à aucun de leurs coins des nombres moindres que 7.

A	6	3	13	12
	15	10	8	1
	4	5	11	14
	9	16	2	7

Les Tables qui ont cette marque α en tête, ont cette proprieté,

proprieté, que quatre nombres étant pris en quarré dans cette Table en quelque façon que ce soit, font autant qu'un des côtez. Ainsi en la Table A, les nombres pris en quarré en tout sens, comme 6, 15, 3, 10, | 3, 10, 13, 8, | 13, 8, 12, 1, | 15, 10, 4, 5, | 10, 8, 5, 11, | 8, 1, 11, 14, | 4, 9, 16, 5, | 5, 16, 11, 2, | & 11, 2, 14, 7, | font 34, sçavoir autant que chacun des côtez. De même si

6	3	13	12
15	10	8	1
4	5	11	14
9	16	2	7

on prend les angles des quarrez de 3 de côté; sçavoir 6, 4, 11, 13, | 3, 5, 14, 12, | 15, 8, 9, 2, | & 10, 1, 16, 7, & aussi les angles du quarré total, 6, 12, 9, 7, ils feront tous pareille somme de 34; & de ces Tables il y en a en tout 48, & on peut faire 12 Tables qui auront chacune des nombres à un des angles. Par exemple, il y a 12 Tables qui ont 1 à l'un des angles, 12 qui ont 2, autant qui ont 3, 4, 5 ou 6, &c. mais parce qu'il y a quatre nombres ensemble à chaque Table, cela se réduit à 48.

B	6	3	15	10	C	6	1	16	11
	13	12	8	1		12	15	2	5
	4	5	9	16		9	14	3	8
	11	14	2	7		7	4	13	10

Les Tables qui ont cette marque β au-dessus, ont la même égalité que devant, sinon qu'au milieu d'un des côtez & à son opposé, il y a un des quarrez dont les nombres ne sont pas égaux à ceux d'un des côtez. Ainsi en la Table B, les nombres 3, 15, 12, 8, & 5, 9, 14, 2, ne font pas 34; & en la Table C, les nombres 12, 16, 9, 14, & 2,

5, 3, 8 ne font pas 34. Mais si on prend les huit ensemble, ils font le double de 34, puisqu'ils comprennent deux lignes; & de ces Tables il y en a en tout 192.

D

6	3	15	10
12	13	1	8
9	16	4	5
7	2	14	11

Les Tables marquées γ, n'ont que les quarrez des angles qui ayent cette égalité avec celui du milieu, mais non pas ceux du milieu des côtez. Ainsi la Table D a égalité dans les nombres 6, 12, 3, 13, | 15, 1, 8, 10, | 9, 16, 7, 2, | 4, 5, 14, 11, | & 13, 1, 16, 4, | & pareillement aux nombres des angles des quarrez de 3 de côté; sçavoir 6, 15, 4, 9, | 10, 3, 16, 5, | 7, 12, 1, 14, | & 2, 13, 8, 11; & enfin au quarré total, 6, 7, 10, 11: & de ces Tables il y en a en tout 192.

E (c, d, a, b)

6	13	4	11
15	12	5	2
3	8	9	14
10	1	16	7

F

6	3	14	11
4	13	12	5
15	2	7	10
9	16	1	8

Les Tables qui ont cette marque δ, n'ont égalité, outre les angles du grand quarré, & ceux du quarré du milieu, (ausquels il y a égalité dans toutes les Tables) que deux autres quarrez aux côtez opposez. Ainsi la Table E n'a égalité qu'aux nombres 13, 14, 12, 5, | & 8, 9, 1, 16, | & en outre aux angles exterieurs, 6, 11, 10, 7, & au quarré du milieu, 12, 5, 8, 9. Et la Table F n'a égalité

qu'aux nombres 4, 13, 15, 2, & 12, 5, 7, 10; & aux angles exterieurs 6, 11, 9, 8; & au quarré du milieu, 13, 12, 2, 7: & de ces Tables il y en a 328. Or ces égalitez ſe doivent toûjours entendre outre les lignes qui ſont ſuppoſées égales entr'elles.

Les autres Tables qui n'ont point de marque, n'ont rien que ce qui eſt commun à toutes; ſçavoir le petit quarré du milieu, & le grand du dehors, où il y ait égalité aux nombres des angles; & de ces Tables il y en a 120.

Or on démontrera, comme il s'enſuit, que les nombres qui ſont aux angles de l'enceinte exterieure de la Table de 4, & pareillement les quatre interieurs, ſont égaux à une des lignes. Par exemple, au quarré E les quatre nombres 6, 11, 10, 7 valent neceſſairement 34, & pareillement 12, 5, 8, 9, ſçavoir autant qu'une des lignes.

En la Table E, ſi les quatre nombres *a*, *b*, *c*, *d*, ne valent pas enſemble 34, il faut qu'ils faſſent plus ou moins de 34, qu'ils valent moins. Mais parce que les nombres de chaque ligne doivent faire 34, les lignes *a b*, & *c d* feront chacune 34. Il faudra donc que les quatre nombres qui ſont entre les angles dans les lignes *a b*, & *c d*, faſſent enſemble plus de 34, & ils doivent ſurpaſſer 34 d'un nombre égal à celui de l'excès de 34, pardeſſus les nombres des angles *a*, *b*, *c*, *d*, & pareillement les quatre nombres qui ſont entre les angles des lignes *c a*, & *d b*; ſçavoir ceux qui ſeront à la place où ſont 15, 3, 2, 14, excederont 34 d'un nombre égal à celui dont 34 excede les nombres des angles; & par conſéquent les nombres qui ſont à l'enceinte exterieure entre les angles, excederont deux fois 34 du double du même excès. Mais les 16 nombres enſemble doivent faire quatre fois 34: & partant les huit nombres qui reſtent, ſçavoir les quatre des angles, *a*, *b*, *c*, *d*, & les quatre interieurs qui doivent être mis à la place où ſont 12, 5, 8, 9, ſeront moindres que deux fois 34, du double du même excès; mais les quatre qui ſont aux angles

a, *b*, *c*, *d*, ſont moindres que 34, ſelon le même excès, donc les quatre interieurs ſeront moindres auſſi que 34, ſelon le même excès. Et parce que toutes les lignes doivent être égales, poſons que l'une des lignes tranſverſales, comme *c b*, contienne quatre nombres, qui enſemble faſſent 34, il s'enſuivra que les quatre autres contenus en la ligne *a d*, feront moins de 34, du double de l'excès de 34, par-deſſus les quatre qui ſont aux angles *a*, *b*, *c*, *d*, ce qui eſt abſurde & contre l'hypotheſe: la même choſe ſe fera voir, ſi on ſuppoſe les quatre nombres *a*, *b*, *c*, *d*, plus grands que 34; car on montrera de même, que les nombres d'une des lignes tranſverſales ſeront plus grands que 34 du double de l'excès; & partant les quatre nombres *a*, *b*, *c*, *d*, ſont égaux à 34. Ce qu'il falloit démontrer.

a	*b*	*c*	*d*
e	*f*	*g*	*h*
i	*k*	*l*	*m*
n	*o*	*p*	*q*

Mais la même choſe ſe démontrera bien plus briévement, comme s'enſuit. En la Table *a*, *d*, *n*, *q*, les quatre nombres des angles *a*, *d*, *n*, *q*, ſont égaux aux quatre interieurs *f*, *g*, *k*, *l*; car les quatre, *a*, *d*, *n*, *q*, ſont complémens à deux lignes (ſçavoir à 68) des quatre nombres, *b*, *c*, *o*, *p*, & les quatre *f*, *g*, *k*, *l*, des quatre *e*, *i*, *h*, *m*. Mais les mêmes huit nombres, *a*, *d*, *n*, *q*, *f*, *g*, *k*, *l*, font enſemble deux lignes, ſçavoir les deux diagonales; & partant, tant les quatre *a*, *d*, *n*, *q*, que les quatre *f*, *g*, *k*, *l*, font autant qu'une ligne. Et de là il s'enſuit auſſi, qu'en toute Table les quatre *b*, *c*, *o*, *p*, font une ligne, & pareillement les quatre *e*, *i*, *h*, *m*.

En toute Table ou quarré qui a quatre de côté, les quatre nombres qui ſont à l'un des angles de la figure, com-

me *a*, *b*, *e*, *f*, ſont égaux aux quatre nombres, *l*, *m*, *p*, *q*, qui ſont à l'angle diametralement oppoſé, parce que les uns & les autres ſont le complément à deux lignes des quatre nombres, *c*, *d*, *g*, *h*.

Pareillement, en toute Table les quatre nombres des angles d'un des quarrez de trois, comme *a*, *e*, *l*, *i*, ſont égaux aux quatre *f*, *h*, *q*, *o*, du quarré oppoſé, parce que les uns & les autres ſont le complément à deux lignes des quatre *b*, *d*, *m*, *k*.

Si en quelque Table de 4, les quatre nombres d'un des petits quarrez des angles, comme de *a*, *b*, *f*, *e*, ſont enſemble égaux à une ligne; les autres petits quarrez des angles, comme *c*, *d*, *g*, *h*, &c. le ſeront auſſi; & pareillement les nombres des angles du quarré de 3, comme *a*, *c*, *l*, *i*, ou *b*, *d*, *m*, *k*, &c.

La raiſon eſt, que *a*, *b*, *f*, *e*, étant égaux aux quatre *l*, *m*, *q*, *p*, comme on vient de démontrer, ſi les uns valent une ligne, les autres en vaudront autant. Et pareillement les autres petits quarrez, ſçavoir *c*, *d*, *g*, *h*, & *i*, *k*, *n*, *o*, qui ſont leurs complémens à deux lignes.

Mais puiſque les huit, *c*, *d*, *g*, *h*, & *i*, *k*, *n*, *o*, valent deux lignes par ſuppoſition, ſi on en ôte une ligne, ſçavoir *d*, *g*, *k*, *n*, le reſte, qui ſont les quatre *c*, *h*, *i*, *o*, vaudront auſſi une ligne; & ainſi les huit, *a*, *c*, *l*, *i*, & *h*, *f*, *o*, *q*, qui ſont les angles des deux quarrez de trois oppoſez, vaudroient deux lignes, puiſque les huit nombres ſont les quatre *c*, *i*, *o*, *h*, qui valent une ligne, & les quatre de la diagonale, *a*, *f*, *l*, *q*: mais on a démontré, que les quatre *a*, *c*, *l*, *i*, ſont égaux aux quatre *h*, *f*, *o*, *q*,: donc tant les uns que les autres valent une ligne.

On montrera de même, que ſi les quatre des angles du quarré de trois, comme *a*, *c*, *l*, *i*, valent une ligne, chacun des petits quarrez des angles, comme *a*, *b*, *e*, *f*, &c. vaudront une ligne.

Car ſi les quatre *a*, *c*, *l*, *i*, valent une ligne, les quatre

h, *f*, *o*, *q*, qui leur ſont égaux, en vaudront une pareillement : & ſi de ces huit, qui valent deux lignes, on ôte la diagonale *a*, *f*, *l*, *q*, reſtera une ligne pour la valeur des quatre autres, *c*, *h*, *i*, *o*, auſquels ajoûtant la diagonale *d*, *g*, *k*, *n*, on aura deux lignes pour la valeur des huit nombres, *c*, *h*, *d*, *g*; *k*, *n*, *i*, *o*, mais on a montré qu'en toute Table de quatre, les quatre *i*, *k*, *n*, *o*, ſont égaux aux quatre *c*, *d*, *g*, *h* : donc tant les uns que les autres valent une ligne.

RESOLUTION
DES
QUATRE PRINCIPAUX
PROBLEMES
D'ARCHITECTURE.

Par M. BLONDEL.

A MONSEIGNEUR COLBERT, MINISTRE ET SECRETAIRE D'ETAT, SURINTENDANT DES BASTIMENS, ARTS ET MANUFACTURES DE FRANCE.

MONSEIGNEUR,

L'estime que vous avez pour les beaux Arts, oblige tous ceux qui en font profession, de vous re-

garder comme leur Protecteur. Chacun vous offre les fruits de ſon travail comme des biens qui vous appartiennent ; & je vous préſente celui-ci dans le même ſentiment, & avec une parfaite reconnoiſſance de la bonté que vous avez eüe de m'aſſurer qu'il ne vous ſeroit pas déſagréable.

Vous ſçavez, Monseigneur, *que toutes les parties des Mathématiques ſont recommandables par les avantages qu'elles apportent dans les affaires du monde ; qu'elles ſont utiles dans la Guerre & dans la Paix ; & que les grands Hommes s'en ſervent en tout temps, ou pour exercer leur valeur, ou pour montrer leur magnificence.*

Néanmoins l'Architecture eſt celle qu'ils conſidérent le plus, parce qu'elle acheve, pour ainſi dire, leur réputation, & qu'elle conſerve le ſouvenir de leurs victoires, en leur élevant de ſuperbes Trophées.

Un grand Roy comme le nôtre, dont la vie eſt pleine de merveilles, & qui a fait tant de choſes qui paroîtront incroyables à la poſtérité, doit en laiſſer des témoignages immortels, qui confirment ceux de l'Hiſtoire, & qui empêchent que les ſiecles ſuivans ne la traitent de fabuleuſe. Et rien ne le peut mieux faire que l'Architecture. Certaine-

ment, Monseigneur, *j'ose dire que cet Art admirable servira plus à éterniser la mémoire de* Louis le Grand, *que tous les autres Arts qui se vantent de donner l'immortalité.*

Mais, Monseigneur, *c'est un bonheur bien particulier pour nous, qui en faisons notre principale étude, que Sa Majesté se soit reposé sur vos soins, pour remettre l'Architecture dans son premier lustre. Ce bel Art avoit besoin que vous lui donnassiez un peu de ce temps précieux que vous employez si utilement au service du Roy & de l'Etat, afin qu'il puisse non-seulement égaler aujourd'hui ses ouvrages à la beauté de l'Antique, mais même les porter à un degré de perfection, où les anciens Edifices n'ont jamais été, ni dans la Grece, ni dans l'Empire Romain.*

Et comme le nom du Roy surpasse maintenant celui de tous les Heros de l'antiquité, il falloit un Ministre, aussi habile & aussi zelé pour sa gloire, que vous l'êtes, pour laisser dans la France des Monumens si magnifiques & si durables de la prosperité de son regne, qu'ils puissent effacer un jour la grandeur de ces anciens Edifices, dont le temps semble respecter les ruines.

Pendant que la renommée va répandre par

toute la terre le bruit de ses Exploits & célébrer ses Conquêtes & les prodiges inoüis de son courage, il est bien juste que l'Architecture & tous les beaux Arts travaillent à l'envi pour rehausser l'éclat de ses Triomphes, & consacrer la mémoire de ses grandes actions. Je voudrois bien, MONSEIGNEUR, *que ce Traité y pût contribuer quelque chose: Du moins vous puis-je assurer que je ne l'ai composé que dans cette vûë, & pour communiquer au Public ce que je puis avoir acquis de nouvelles connoissances touchant les pratiques les plus difficiles qui se rencontrent dans les Bâtimens. Je m'estimerai trop recompensé de mon travail, si vous me faites la grace de l'approuver, & d'être persuadé que je suis avec beaucoup de respect,*

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très obéïssant
serviteur, BLONDEL.

PREMIER PROBLEME RESOLU.

DECRIRE *Géometriquement en plusieurs manieres, & tout d'un trait, le Contour de l'enflûre & diminution des Colonnes.*

SECOND PROBLEME RESOLU.

L'APOLLONIUS *François des Tactions; ou trouver une Section Conique qui touche trois lignes droites données en un même plan, & deux de ces lignes en un point donné de chacune: ou bien, décrire Géometriquement les Arcs rampans sur toutes sortes de pieds droits & de hauteur.*

TROISIEME PROBLEME RESOLU.

TROUVER *Géometriquement les joints de tête de toutes sortes d'Arcs rampans.*

QUATRIEME PROBLEME RESOLU.

TROUVER *la ligne sur laquelle les Poutres doivent être coupées en leur hauteur & largeur, pour les rendre par tout également fortes & résistantes.*

Avec la démonstration des Pratiques, accompagnées de diverses réflexions sur le mouvement,

ſur la proportion Harmonique, & ſur les erreurs de Pappus au ſujet de l'inſcription des trois médiétez au demi-cercle, & de Galilée au ſujet du dernier Problême.

RESOLUTION
DES
QUATRE PRINCIPAUX
PROBLEMES
D'ARCHITECTURE.

PREMIER PROBLEME RESOLU.

Décrire Géometriquement en plusieurs manieres & tout d'un trait, le Contour de l'enflûre & diminution des Colonnes.

PREMIER DISCOURS.

SI les divers emplois que j'ai eûs pour le service du Roy chez les Etrangers & dans les principales Provinces de ce Royaume, m'ont donné l'avantage de pouvoir considérer à loisir la plus grande partie des Bâtimens anciens & modernes qui sont

dans le monde ; & si cette facilité jointe à une inclination particuliere que j'ai toujours euë pour l'Architecture, & qui m'a fait soigneusement rechercher ce qui pouvoit être de plus remarquable en chacun d'eux, peut m'avoir accoutumé les yeux à quelque discernement de ce qu'on appelle *Grand* & *Beau* dans cet Art : il me semble que j'ai quelque droit de dire mes sentimens sur son sujet & d'assurer que l'Architecture a besoin d'étude, pour arriver à sa perfection. Et quoique je ne sois pas assez sçavant pour me vanter de connoître ce qui lui manque, (cet Art supposant un trop grand amas de connoissances profondes & une expérience consommée ;) je ressens au moins une joye extraordinaire, lors que je voi qu'il s'y fait quelque progrès.

C'est ce qui fait que j'ai beaucoup estimé la pensée de celui qui proposa pour *Etrénes à tous les Architectes*, au commencement de l'année 1664. un *Paradoxe*, comme il dit, c'est-à-dire, un Problême *à résoudre touchant la perfection de l'enflûre ou* ἔντασις *des Colonnes, touchée imparfaitement par Vitruve & non encore resoluë ni reglée qu'imparfaitement, quoi qu'Architectoniquement elle le puisse être parfaitement*, qui sont les termes dont il s'est servi.

Et j'ai crû, dis-je, qu'un homme étoit doublement loüable, qui ne se contentant pas de rechercher ce qui n'est pas encore connu dans les Sciences, & de consacrer au Public le fruit de son travail & de ses veilles, vouloit encore exciter les autres à son exemple, & réveilloit leur vertu endormie, en leur proposant à résoudre ce qu'il auroit déja pû reconnoître par son étude. D'autant plus que c'est à un sentiment tout semblable que nous devons ce que nous avons de plus beau dans les Mathématiques, & qu'il paroît qu'il ne s'est jamais fait de plus notables progrès dans ces sciences, que lors que les grands Genies se sont, dans divers siécles, proposez l'un à l'autre des questions, & que par une espece d'émulation honnête leur ame s'est enflammée de cette généreuse ambition, qui nous a produit

duit des Ouvrages si excellens, qu'ils semblent être plûtôt partis de l'intelligence des Anges, que de la méditation laborieuse de l'esprit humain.

Et comme l'Architecture n'a reçû ce qu'elle a de bon & de magnifique que des Sciences Mathématiques, qui par l'indubitable verité de leurs démonstrations remplissent entierement la capacité de notre esprit, & ne lui laissent rien à désirer sur le sujet qu'elles lui ont expliqué : il est aisé de comprendre que c'est d'elles qu'elle doit encore attendre ce qui manque à sa perfection ; & que cette lumiere, par qui l'on connoît la difference qu'il y a de pouvoir rendre raison de son Ouvrage, ou de travailler en tâtonnant, & à l'aveugle, ne lui peut venir que des mains libérales de la Géometrie.

Combien donc seroit-il à souhaiter, que ceux qui travaillent en Architecture voulussent aussi s'appliquer aux Mathématiques, ou que ceux qui se sont avancez dans ces sciences donnassent aussi quelque partie de leur temps à l'Architecture ? Et l'on doit pour ce sujet estimer & recevoir agréablement toutes les choses qui peuvent contribuer à porter les hommes à cette étude, au nombre desquelles je mettrois ce *Paradoxe*, si l'Auteur s'y étoit un peu plus clairement expliqué qu'il n'a fait, & s'il avoit donné à entendre quelle est cette maniere de diminuer les Colonnes qu'il appelle *Parfaite :* parce que ces sortes de dispositions, qui ne sont que pour la satisfaction de l'œil, & qui n'ont point de fondement certain ni arrêté dans la nature, dépendent tellement du goût, & de la diversité des opinions, qu'une Colonne peut paroître aux uns trop *Suelte*, ainsi que les Italiens les appellent, ou déliée, que d'autres la trouveront trop écrasée.

De sorte, qu'il semble que pour travailler avec quelque fruit à la solution de son *Paradoxe*, il auroit été juste qu'il eut déterminé ce qu'il entend par ce mot de *Parfaitement*, & qu'on put comprendre, si cette façon de des-

cription qu'il propose *à résoudre Architectoniquement*, est déja en quelque usage, au moins méchanique, parmi les Ouvriers, ou si c'est une maniere toute nouvelle, & d'une forme differente de toutes celles dont on a jusqu'ici diminué les Colonnes: étant vrai que ces Propositions vagues & indéterminées, & en l'explication desquelles le sort a plus de part que le raisonnement ou la vivacité de l'imagination, sont d'autant plus défectueuses, que l'honneur même qui seroit dû à celui qui auroit expliqué l'enigme, ne dépend que du caprice de celui qui propose, lequel peut dissimuler tant qu'il lui plaît, & toujours dire que l'on n'a pas encore trouvé ce qu'il demande.

Tant y a, que m'étant souvenu d'avoir autrefois remarqué, en traçant des Colonnes à la maniere que Vignole enseigne pour les Ioniques & Corinthiennes, que la ligne de leur Contour étoit celle de Nicomédes: je dis à M. Bosse, qui me fit voir au mois de Janvier de la même année 1664. ces *Etrênes à tous les Architectes*, que bien que je n'eusse point l'art de deviner, & que je confessasse ingenuëment mon ignorance sur le sujet de ce *Paradoxe*, je voulois néanmoins proposer plus nettement un Problême de la même nature à son Auteur, que je mis par maniere de jeu sur le dos de son écrit, en ces termes. *Autre Problême. Le moyen de décrire tout d'un trait, & sans s'embarasser de plusieurs points trouvez dont on se sert pour les Cherches, la maniere la plus élegante qui soit en usage parmi les Architectes modernes pour l'ἔντασις & diminution des Colonnes? Et quelle en est la figure?*

Quelques jours après le sieur Bosse m'ayant prié de lui vouloir expliquer ma pensée, je lui fis sur ce sujet la Lettre qui fait le discours suivant.

SECOND DICOURS, OU LETTRE A M. BOSSE

Sur le même sujet de l'enflûre & diminution des Colonnes, & de la description de la ligne qui fait le Contour des Ioniques, Corinthiennes, & Composées.

MOnsieur, je n'ai pas la science de deviner pour vous dire quels sont les sentimens de celui dont vous me parlez sur le Problême ou *Paradoxe*, comme il dit, qu'il a proposé pour *Etrênes à tous les Architectes:* mais je puis bien vous entretenir de la solution de celui que j'écrivis dernierement au dos de son imprimé, dans laquelle je vous assurerai premierement avec franchise que je n'ai aucune part, puisqu'il y a plus de deux mille ans qu'elle est trouvée, & que je ne puis tout au plus me glorifier d'autre chose, que de m'être autrefois apperçû, en dessignant des Colonnes diminuées à la maniere élegante que Vignole dit avoir inventée pour les Ioniques & Corinthiennes, que *la Cherche courbe qui la décrit, est la ligne de Nicomédes, que l'on appelle la premiere Conchoïde des Anciens*; & par le moyen de laquelle, au rapport d'Eutocius, ce Géometre prétendit avoir résoulu ce fameux Problême *de la Duplication du Cube commandée par l'Oracle*, & qui a tant exercé les esprits du siecle de Platon dans la recherche *de deux moyennes proportionnelles entre deux droites données.* C'est celle-là méme que M. Viette a de notre temps supposée comme une pétition ou demande au supplément de Géométrie pour résoudre tous les Problêmes solides, & dont les Equations vont au Cube ou au quarré quarré; ne jugeant pas que sa description, par le moyen de l'Instrument de Nicomédes, fut plus méchanique, ou pour mieux

dire, moins Géometrique, que celle du Cercle par le moyen du Compas, dont l'usage est néanmoins reçû par ce principe de pétition ou demande dans le premier des Elemens d'Euclide. Et quoique ces mêmes Equations se resolvent plus noblement dans les livres de M. Descartes, par la seule intersection du Cercle & de la Parabole, qui sont lignes d'un genre plus simple & moins composé que la Conchoïde; celle-ci ne laisse pas d'avoir ses usages pour les solutions des Equations plus élevées; & les suppositions de M. Viette sont très-sçavantes & très-véritables.

Mais pour retourner à notre propos: Quoique vous sçachiez parfaitement cette invention élegante de Vignole, & que vous la puissiez voir dans son Livre, je ne laisserai pas de vous en tracer ici la figure avec son discours, selon la tradúction de l'illustre M. le Muet, afin que vous puissiez mieux juger du raisonnement que je ferai ensuite.

Fig. I. de la I. Planche. *Quant à cette autre façon*, dit-il, *je l'ai trouvée de moi-même; & quoiqu'elle soit moins connuë, elle est néanmoins facile à concevoir par les lignes. Je dirai donc qu'ayant résolu les mesures de la Colonne*, c'est-à-dire, sa hauteur & grosseur, & la diminution qu'elle doit avoir au bout d'enhaut, *on doit tirer une ligne à l'infini en commençant par C*, qui est au tiers du fust de la Colonne, *& continuant par D; puis rapportant la mesure C D au point A*, où finit la diminution du haut, *jusqu'à ce qu'elle coupe la perpendiculaire au point B, & que A B soit continuée jusqu'en E. De là on pourra tirer tant de lignes qu'on voudra qui partiront de la perpendiculaire, & iront à la circonférence de la Colonne, sur lesquelles appliquant la mesure C D, on trouvera tant en haut qu'en bas l'enflûre de la Colonne; & cette maniere peut être appliquée à l'Ionique, Corinthien & Composé.*

Ou vous voyez, Monsieur, que toutes ces lignes qui, partant du point E, sont comprises entre la Perpendiculaire ou Axe de la Colonne & sa Circonférence, sont toutes égales entre elles, & à la droite C D. De sorte que

ſi nous appellons le point E, le *Pole*; l'Axe de la Colonne, *La Regle* ou *Canon*; & la ligne C D, *l'Intervalle* : je ne voi plus rien qui m'empêche d'appeller la ligne courbe qui paſſe depuis A par toutes les extrémitez recherchées, *la premiere Conchoïde des Anciens*, puiſque c'eſt toute la même; & que vous connoîtrez encore mieux par l'Inſtrument que Nicomédes a inventé pour la décrire, dont la figure eſt la ſeconde de la premiere Planche; en laquelle, *Fig. II. de la I. Planche.* après avoir déterminé comme deſſus la largeur de la Colonne, dont la moitié eſt C D, & trouvé la longueur de la ligne C E, il faut prendre trois regles de bois ou de métail G F, I D, H A, dont les deux G F, & I D, ſont attachées enſemble à l'équerre ou à angles droits comme en D; & par le milieu de la regle G F il faut entailler un petit canal à queuë d'aronde qui s'étende en toute la longueur de la regle. Il s'en fait une autre de même dans le milieu de la regle H A, qui s'étende indéfiniment vers le bout H, mais qui vers l'autre bout ſe termine en K, en ſorte néanmoins que la diſtance A K, ne ſoit pas plus grande que la diſtance C E. Enſuite il faut faire au bout de la regle H A vers le point A, la ligne A B égale à la ligne C D, & attacher par deſſous la regle au point B un bouton de bois ou de métail qui puiſſe couler juſte dans le canal de la regle G F. Il en faut attacher un autre ſemblable au point E, dans le milieu de la regle I D, qui coule juſte dans le canal de la regle A H, afin que la regle G F étant appliquée à l'Axe de la Colonne, en ſorte que le point D réponde au renflement, & la regle A H ſe mouvant en avançant ou reculant ſur le bouton E, comme ſur un pivot ou Pole, tandis que le bouton B ſe meut au long dudit Axe, c'eſt-à-dire, au long du Canal de la regle G F; le point A décrive par ces deux mouvemens la ligne courbe A *a a* C *a*, pour le contour de la diminution & renflement de la Colonne qui eſt appellée ἔντασις par Vitruve, & dans laquelle ligne toutes les droites, comme *b a*, tirées du Pole, &

comprises entre le Canal de la regle G F, c'est à-dire, entre l'Axe de la Colonne & sa Circonference, sont toutes égales entr'elles, & à l'intervalle A B, ou C D. En quoi il paroît que la ligne courbe que cet instrument a décrite, est la même que celle que Vignole a prétendu décrire. Et si vos regles étant d'une grandeur indéfinie, vous faites en sorte que les boutons B & E puissent tellement s'avancer ou reculer au long des regles A H & D I, que les intervalles, comme A B & C E, puissent aussi être pris sur lesdites regles de telle grandeur que l'on voudra; il est évident que cet instrument pourra servir à décrire les Courbes des Colonnes, de quelque hauteur ou grosseur qu'elles puissent être, puisque toute leur difference ne consiste qu'en celle desdits intervalles. L'autre côté de la Colonne sera décrit en la même maniere en changeant l'instrument de place, & le rapportant de l'autre part.

Ainsi, Monsieur, il me semble que mon Problême est assez bien résolu par cet instrument; & que sans s'embarasser à rechercher ces points infinis, comme veut Vignole, par lesquels on puisse mener doucement cette cherche, qui de soi dans la rigueur est toujours imparfaite, on peut dorénavant tirer cette ligne tout d'un trait, uniformement & en sa perfection.

C'est de quoi j'ai voulu vous faire part, en attendant que nous ayons de l'Auteur du *Paradoxe* quelque chose de considérable sur cette matiere, ainsi qu'il y a lieu de l'esperer par ses *Etrénes.* Vous assurant au reste que bien qu'il y ait raison d'être surpris, que depuis tant de siecles qui ont produit de si grands Hommes pour l'Architecture, lesquels ont si bien tracé les diminutions & l'enflûre des Colonnes, personne, au moins que je sçache, n'ait fait réflexion à cette maniere de description, que le seul Vignole, & que depuis lui tant de braves Architectes se soient heureusement servis de son invention, sans avoir rien dit de la nature de la Courbe qu'elle produit, ni du

moyen de la desseigner tout d'un trait : Quoiqu'il y ait, dis-je, beaucoup de sujet de s'en étonner, je vous proteste néanmoins que je n'ai aucune vanité que cette pensée me soit venuë, de laquelle je me glorifie moins que de l'honneur que vous me faites de m'aimer. Je suis, *&c.*

Ce 24. Janvier 1664.

TROISIEME DISCOURS.

SUR LA NATURE ET DESCRIPTION de la ligne qui fait le Contour des Colonnes Doriques & Toscanes.

AYant ainsi discouru sur les proprietez de la ligne Courbe qui fait le Contour des Colonnes Ioniques, Corinthiennes & composées, j'ai voulu considérer l'autre maniere que Vignole décrit, & dont il se sert pour la diminution des Colonnes Toscanes & Doriques. Et après avoir soigneusement médité sur la nature de la Ligne qu'elle produit ; j'ai reconnu que c'étoit une ligne de la même nature que celle que décriroit une fléche, ou toute autre chose tirée & jettée horizontalement, dans l'opinion de ceux qui croyent qu'un poids tombant de la surface de la terre se trouveroit justement au bout de six heures au Centre (si la terre se mouvoit du mouvement journalier,) & passant outre par la force qu'il auroit acquise en sa chûte, il arriveroit au bout d'autres six heures à la surface des Antipodes, si le chemin lui étoit ouvert : D'où descendant & repassant en six heures une autre fois par le Centre, il se trouveroit au bout d'un jour préfix au même lieu d'où il étoit premierement parti, si l'air, ou les autres empêchemens du dehors ne l'arrêtoient.

Je dis donc qu'un trait poussé vigoureusement, & parallele à l'horizon décriroit en son passage une Ligne de la

même nature de celle dont on se sert pour la diminution des Colonnes Toscanes & Doriques, si cette opinion étoit véritable: parce qu'étant porté d'un mouvement de Lation égale & uniforme, qui lui est imprimé par l'impulsion, & qui fait que les distances qu'il parcourt sont entre elles en même proportion que les temps qu'il employe à les parcourir, (c'est-à-dire, comme les Arcs de l'Equateur qui passent cependant sous le Méridien,) & d'un autre mouvement inégal, & qui s'augmente continuellement, que son propre poids lui inspire, & qui dans l'opinion susdite se fait sur la proportion des Sinus verses des mêmes Arcs de l'Equateur; il paroît que la Ligne, que ce trait décriroit en son passage, seroit composée de ces deux mouvemens, dont l'un est égal, uniforme, & répondant aux Arcs de l'Equateur; l'autre inégal, continuellement précipité, & répondant aux Sinus verses des mêmes Arcs.

Mais la Ligne du Contour des Colonnes Toscanes & Doriques se fait par la composition de deux mouvemens pareils, ainsi que je le démontrerai cy-dessous; & partant la Ligne que décrivent les corps jettez horizontalement, comme un trait ou une fléche dans l'opinion susdite, est à peu-près la même que celle dont on se sert pour la diminution des Colonnes Toscanes & Doriques.

Fig. I. de la II. Planche.

Pour la démonstration de ce que je viens de dire, il ne faut que se souvenir de la pratique ordinaire des Ouvriers pour la description de cette Ligne, qui se fait en cette maniere. La Ligne A C, soit l'Axe d'une Colonne à diminuer, & les deux tiers de sa longueur, si on veut que la diminution commence au tiers; ou la moitié, si on desire qu'elle commence dans le milieu de la Colonne: La Ligne A B, soit le module ou la moitié de sa grosseur, sur laquelle comme rayon soit fait le Cercle B S T V Z. Ensuite il faut prendre la partie A G, pour le demi-diametre de la Colonne par le haut, en sorte que B G soit sa plus grande diminution, & tirer la ligne G E parallele à A C, qui

coupera

coupera le Cercle en F, la portion duquel B F, doit être partagée en autant de parties égales qu'on voudra, comme aux points S, T, V, auſſi bien que l'Axe A C, aux points H, K, M, en ſorte que la ligne A C contienne autant de parties égales que l'Arc B F. Enfin des points des diviſions de l'Axe il faut élever des Perpendiculaires, comme H I, K L, M N, qui ſoient rencontrées aux points O, X & Y, par d'autres lignes paralleles à l'Axe, & tirées des points de l'Arc B F, de telle maniere qu'elles ſe répondent réciproquement l'une à l'autre, c'eſt-à-dire, que celle qui part du premier point de l'Axe H, comme H O I, ſoit rencontrée en O, par celle qui vient du premier point de l'Arc S, comme P S O, & celle qui part du ſecond point de l'Arc T, comme Q T X, ſe termine en X, ſur celle qui vient du ſecond point de l'Axe K, comme K X L, & ainſi des autres. Et paſſant par tous les points B O X Y E une ligne adoucie, elle fera celle que l'on cherche pour la diminution des Colonnes Toſcanes & Doriques.

Et ſi nous appellons le point B, *le ſommet* de cette ligne Courbe la ligne A B, l'*Axe* ou *le Diametre*, les lignes P O, Q X, R Y, G E, *&c. les ordonnées*; on verra que l'ordonnée Q X, contenant autant de parties de la ligne A C, ou de ſon égale G E, que l'Arc B T en contient de celles de l'Arc B F, l'ordonnée Q X, eſt à l'ordonnée G E, comme l'Arc B T, eſt à l'Arc B F; & la même choſe ſe pouvant dire de toutes les autres, il paroîtra que les ordonnées ſeront entre elles comme les Arcs qui ſont compris entre le ſommet & leſdites ordonnées: & partant que cette ligne Courbe eſt une eſpece de *Spirale ou Ovale.*

De plus, ſi nous prenons le rayon A B, pour Sinus total, les portions de l'Axe B P, B Q, B R, B G, *&c.* ſeront les Sinus verſes des Arcs B S, B T, B V, B F, *&c.* & par conſéquent nous pourrons appeller cette Courbe *une ligne Spirale ou Eliptique, dans laquelle les portions de l'Axe*

sont les Sinus verses des Arcs, qui sont entre eux comme les ordonnées.

Maintenant si nous faisons une autre hypothese, & si nous prenons le point A, pour le centre de la terre, la ligne B A, pour le demi-diametre, & l'Arc B V F, pour une portion de l'Equateur : Il est constant que dans la pensée de ceux, qui ainsi que nous avons dit ci-dessus, croyent qu'un poids tombant librement de la surface de la terre parcoureroit les espaces de son Diamétre, en la même raison que sont les Sinus verses des Arcs de l'Equateur, qui passeroient cependant sous le Méridien ; ce même poids (supposé que la terre se mût du mouvement journalier) arriveroit nécessairement au centre, quand le quart de l'Equateur auroit passé depuis le moment de sa chûte, je veux dire, au bout de six heures. C'est-à-dire, que le poids tombant du point B, arriveroit au point P, lors que le premier Arc de l'Equateur B S, auroit coulé, & qu'il parcoureroit la ligne B Q, en autant de temps qu'il faudroit à l'Arc B T, pour passer sous le Méridien ; & la ligne B G en autant de temps qu'il en faudroit à l'Arc B F ; & enfin la ligne B A, c'est-à-dire, tout le demi-diametre, en autant de temps que l'Arc B Z, c'est-à-dire, le quart de Cercle de l'Equateur. Et comme le quart de Cercle de l'Equateur passe précisément en six heures, il se voit qu'en cette opinion le poids tombant du point B, & passant par les portions du demi-diametre B A, dans les mêmes temps qu'il faudroit pour passer les Arcs de l'Equateur dont lesdites portions sont les sinus verses ; ce même poids (supposé le mouvement journalier de la terre) arriveroit au bout de six heures précises au centre : d'où remontant en proportion contraire à sa chûte, & par la même raison des Sinus verses, il arriveroit au bout d'autres six heures à la surface de la terre opposée, de laquelle il retomberoit une autre fois en même espace de temps jusqu'au centre ; & enfin il retourneroit au bout de vingt quatre heures pré-

cises au point B, d'où il étoit premierement parti.

Supposé donc que ce soit là le génie & la nature des choses pesantes; si nous prenons la ligne B D pour l'espace qu'une fléche tirée horizontalement du point B doit parcourir dans le temps que l'Arc BF de l'Equateur ou son Parallele aura passé sous le Méridien, il est constant que la fléche sera cependant descenduë par son propre poids de toute la longueur de la ligne B G, qui est le Sinus verse du même Arc B F. Et si nous divisons le susdit Arc B F en parties égales comme aux points S, T, V, & la ligne B D, ou son égale A C, en autant d'autres aux points I, L, N, ou H, K, M, ainsi qu'il s'est dit; il se verra que le mouvement de Lation, qui a été communiqué à la fléche par l'impulsion, selon la ligne B D, étant uniforme, la fléche aura couru l'espace B I dans le même temps que l'Arc B S aura passé: & comme cependant elle sera descenduë par son poids de la longueur de la ligne B P ou I O, la fléche se trouvera alors au point O, où les deux lignes, de Lation uniforme B I, ou P O, & de chûte B P ou I O, se rencontrent. Tout de même elle sera en X quand l'Arc B T aura passé, parce que c'est en ce point où se trouvent la ligne de Lation égale B L ou Q X, & celle de la chûte B Q ou L X, qui se font l'une & l'autre dans le même temps du passage de l'Arc B T. Et la même chose se pouvant dire de tous les points de la courbe B O X Y E; il est évident que c'est celle que décriroit une fléche en l'hypotese susdite; & que par conséquent cette ligne est la même que celle qui est décrite pour la diminution des Colonnes Toscanes & Doriques: ce qu'il falloit démontrer.

Instrument pour décrire le trait de la diminution des Colonnes Toscanes & Doriques. Fig II. de la I L Planche.

Que si l'on désire en décrire la figure tout d'un trait, & sans être obligé de se servir de plusieurs points trouvez, on peut faire un Instrument assez commode pour cet effet, qui doit être composé d'un Secteur de Cercle, d'une rouë avec son pignon, d'une regle endentée & d'une autre regle, (comme en la seconde Figure de la seconde Planche)

où le Secteur A B F est le même que celui de la premiere Figure de la seconde Planche que nous avons expliquée ; c'est-à-dire, que les lignes A B & A F de la seconde Figure sont égales au module, & l'Arc B F à celui qui est compris entre les deux lignes B D & G E de la premiere Figure, qui font l'intervalle de la plus grande diminution de la Colonne. Cet Arc B F dans ladite seconde Figure doit être entrecoupé de dents, qui s'enchassant dans les dents du pignon C, le fassent mouvoir, & donner le tour à la rouë L I K, qui dans la circonférence a d'autres dents égales & entrelacées avec celles de la regle G H, afin que par le mouvement circulaire de la rouë, la regle G H se puisse également avancer en ligne droite. Enfin il faut prendre une autre regle comme E S qui soit égale & parallele à la premiere G H, & tellement attachée à ses extrémitez E & S, qu'elle se meuve en avançant avec elle, & conservant son parallelisme, en sorte toutefois que rien ne l'empêche cependant de s'approcher vers le point A, & de suivre l'attraction continuelle qui est faite par une autre petite regle comme B D, qui étant attachée à un pivot sur lequel elle puisse tourner au bout de l'Arc en B, embrasse de son autre extrémité D ladite regle E S, & la contraigne de suivre la descente de l'Arc, sans embarasser cependant le mouvement droit & en avant qui lui est communiqué par la regle G H.

Il paroît par cette construction que si le diametre de la rouë L I K est au diametre du pignon C, comme la ligne I H, c'est-à-dire, les deux tiers de la Colonne, est à la longueur de l'Arc B P F ; & si les dents du pignon sont égales à celles du susdit Arc, & celles de la rouë L I K à celles de la regle G H ; il s'ensuivra que la regle endentée G H s'avancera uniformement depuis I jusqu'en H dans les mêmes intervalles de temps que l'Arc B F passera aussi uniformement sous le pignon C depuis F jusqu'en B ; de telle sorte que le bout de la regle H se trouvera précisé-

ment en R, lors que le point B se trouvera en P, & qu'il y aura même proportion de toute la ligne I H à sa partie I R, que de tout l'Arc B F à sa partie B P, & ainsi des autres.

Il s'ensuivra de plus, que tandis que la ligne E S sera portée uniformement en avant vers H par le mouvement de Lation égale de la régle G H, elle sera encore portée d'un autre mouvement vers le point A, qui lui sera communiqué par l'attraction continüelle de la régle B D, laquelle étant attachée au point B, fera que la ligne E S descendra selon la proportion des Sinus verses des portions de l'Arc B F; c'est-à-dire, que lorsque la partie de l'Arc B F aura passé depuis le point F jusqu'en P, & que cependant la ligne E S aura coulé par le mouvement de la régle G H depuis I jusqu'en R; la même E S sera aussi descenduë de toute la distance R Q ou F N, qui est le Sinus verse de l'Arc F P, en telle sorte qu'elle se trouve alors au point Q. Et lorsque l'Arc entier B F aura passé depuis F jusqu'en B, & que cependant la ligne E S aura coulé jusqu'en H, elle sera aussi descenduë de toute la ligne H S ou F M, qui est le Sinus verse dudit Arc F B, & en cette maniére elle se trouvera au point S, après avoir décrit, en son passage composé des mouvemens des deux régles G H & B D, la ligne Courbe I Q S, qui est celle que l'on cherche.

Cette description est la même que celle de Vignole, qui fait ses Colonnes Toscanes & Doriques également grosses depuis la base jusqu'au tiers de leur hauteur, où il commence leur diminution, & la continuë jusques sous le chapiteau. Mais si on vouloit que la diminution commençant au susdit tiers se fist aussi uniformément de part & d'autre, & aussi-bien vers la base que vers le chapiteau; il ne faudroit qu'ajoûter au Secteur A B F, une autre Secteur A B T égal à la moitié dudit Arc A B F; afin que passant sous le pignon C de la part de K, & donnant un mouve-

ment contraire au haut de la rouë L I K, la régle I G fût poussée également vers le point X, où elle arriveroit lors que le susdit Arc B T auroit passé sous le pignon, & que cependant la régle E S, ou plûtôt O V, seroit descenduë depuis F jusqu'en N, c'est-à-dire, depuis X jusqu'en V, où elle se trouveroit, après avoir décrit en son passage la ligne Courbe I V, qui est la même que la ligne I Q S continuée de la part de V. Et ainsi l'on auroit toute la ligne V I Q S pour le Contour d'un côté de la Colonne, lequel pourra être transferé de l'autre part, si on veut avoir son entiere description.

Et quoique cette maniere paroisse defectueuse, en ce qu'elle semble ne pouvoir être propre que pour la délinéation de la diminution d'une Colonne, dont la longueur & grosseur seroit déterminée, & qu'il faudroit autant d'instrumens differens, qu'il y peut avoir de differentes mesures de Colonnes, c'est-à-dire, infinies; il s'y peut néanmoins trouver un remede assez facile, & donner à cette Machine la même universalité pour les Colonnes Toscanes & Doriques, que nous l'avons attribuée au discours ci-dessus, à celle de Nicomédes pour les Ioniques, Corinthiennes & Composées.

Il ne faut que faire la régle endentée & le Secteur d'une grandeur indéfinie, & marquer ses dents en forme de rayons partans du Centre, & remplir les espaces qu'ils font entr'eux en s'écartant, en sorte qu'ils soient toûjours égaux aux intervalles des dents du pignon, afin que sur la longueur du Rayon qui passe par le point B, on puisse hausser ou baisser le pivot, sur lequel tourne la régle B D selon la mesure du module donné de quelque Colonne que l'on propose.

QUATRIE'ME DISCOURS.

APPLICATION DES SECTIONS Coniques au Trait de la diminution des Colonnes.

J'Aurois terminé ces raiſonnemens ſur leſquels il ſemble que je me ſuis ſuffiſamment étendu, ſi le diſcours précedent ne m'avoit fait faire une nouvelle réflexion ſur le même ſujet, qui eſt que tout ainſi que ſur l'opinion de quelques-uns touchant la nature du mouvement d'un poids qui tombe, nous avons démontré que les corps jettez horizontalement décrivoient une ligne à peu-près pareille à celle dont on ſe ſert pour le trait de la diminution des Colonnes Toſcanes & Doriques; il me ſemble que ces mêmes corps jettez décrivant une autre eſpece de ligne dans l'opinion que quelques-autres ont euë du même mouvement, on peut préſumer que cette ligne pourroit être de quelque utilité pour la délinéation des mêmes Colonnes.

Et comme l'une & l'autre de ces deux opinions eſt fondée ſur des raiſons également probables, & marchent ſur des proportions ſi prochaines, qu'il eſt preſque impoſſible que l'eſprit humain les puiſſe diſcerner l'une de l'autre par l'expérience, ou les convaincre de faux dans les hauteurs qui ſont à notre connoiſſance; il y a auſſi grande apparence que les lignes des corps jettez, que nous pouvons appeller *lignes de Projection* tirant leur origine de principes ſi ſemblables & ſi proches, ne doivent pas auſſi être fort differentes, ou d'une nature ou figure extrémement éloignée l'une de l'autre.

Tant y a que les mêmes eſpaces qui dans l'opinion ci-deſſus expliquée, étoient parcourus par un poids qui tombe en certains intervalles de temps égaux, ſelon la ſuite des Sinus verſes des Arcs égaux de l'Equateur; les mêmes

intervalles, dis je, font paſſez dans une autre opinion en mêmes temps ſelon la ſuite des nombres impairs, en ſorte que ſi dans le premier moment de ſa chûte il parcourt 1 de ces eſpaces, il en paſſera 3 dans le ſecond, 5 dans le troiſiéme, 7 dans le quatriéme, 9 dans le cinquiéme, 11 dans le ſixiéme, & ainſi à l'infini.

Et parce que dans le premier temps il a paſſé 1 eſpace & 3 eſpaces dans le ſecond temps, il aura parcouru 4 eſpaces dans le premier & ſecond temps enſemble, c'eſt-à-dire, en 2 temps; & 1, 3, & 5 eſpaces, c'eſt-à-dire, 9 dans le premier, ſecond & troiſiéme, c'eſt-à-dire, en 3 temps; & 1, 3, 5, & 7, c'eſt-à-dire, 16 eſpaces dans le premier, ſecond, troiſiéme & quatriéme, c'eſt-à-dire, en 4 temps, & ainſi des autres. Où il ſe voit que comme le nombre 4 des ſeconds eſpaces, eſt le Quarré de 2 qui eſt le nombre des ſeconds temps, & 9 qui eſt le nombre des troiſiémes eſpaces, eſt le Quarré de 3 nombre des troiſiémes temps, & 16 nombre des quatriémes eſpaces, eſt le Quarré de 4 nombre des quatriémes temps, & ainſi des autres; c'eſt-à-dire en un mot, que parce que les nombres impairs ajoûtez conſécutivement l'un à l'autre produiſent la ſuite des premiers quarrez; il s'enſuit par conſéquent que les nombres des eſpaces ſont entr'eux comme les Quarrez des nombres des temps, & que la raiſon de ceux-là eſt double de celle de ceux-ci.

La vrai-ſemblance de ces deux opinions ſe connoît auſſi par la proximité des nombres des eſpaces qui ſe parcourent en l'une & en l'autre dans les mêmes temps, qui eſt telle, que ſi au premier moment il ſe fait un eſpace, au ſecond il s'en fera 3 dans une opinion, & environ 3 moins $\frac{1}{12}$ dans l'autre, au troiſiéme il s'en paſſera 5 dans l'une, & 5 moins $\frac{1}{6}$ dans l'autre, au quatriéme 7 dans l'une, & 7 moins $\frac{1}{4}$ dans l'autre, au cinquiéme 9 dans l'une, & 9 moins $\frac{1}{3}$ dans l'autre; & ainſi conſécutivement à l'infini. Où il paroît que ces différences ſont ſi petites, & ſi peu remarquables

quables dans les hauteurs où nous pouvons faire les expériences, qu'il eſt abſolument impoſſible d'aſſûrer avec certitude de la verité ou fauſſeté de l'une ou l'autre de ces deux opinions.

Ce que Galilée a ſi bien reconnu, que bien qu'il ſoit l'Auteur de l'opinion qui ſoûtient que les eſpaces ſuivent la progreſſion des nombres impairs, & que ſur ce principe il ait composé un Livre entier du mouvement rempli d'un grand nombre de propoſitions ingénieuſes; il a néanmoins trouvé l'autre opinion ſi belle, qu'il n'a pû s'empêcher de la produire comme ſi elle venoit de lui dans le deuxiéme de ſes Dialogues du Siſtême du Monde, & d'en parler d'une maniere à faire croire que ce fût ſon veritable ſentiment. Il y explique même quelques proprietez de ce mouvement ſur ce principe, leſquelles ſont tout-à-fait admirables; & celle-ci entr'autres, que ſuppoſé le mouvement de la Terre, la ligne qu'un poids tombant de ſa ſurface au Centre décriroit par ſa chûte, ſeroit circulaire, & égale à celle qu'il deſigneroit, s'il ne partoit pas de ladite ſurface.

Galil. de motu.

Galil. 2 de Siſtem. coſm.

Sur quoi je dirai en paſſant, que pour faire en ſorte que cette propoſition ſoit veritable, il faut non ſeulement ſuppoſer que la Terre ſe meut, mais même qu'elle ne ſe meut que de ſon mouvement journalier, c'eſt-à-dire, ſur ſon propre centre; parce que ſi l'on y veut ajoûter l'annuel, ces lignes ceſſeront d'être circulaires, & deviendront plûtôt des eſpeces de Cycloïdes ou Roulettes, *ou même des Spirales*, auſſi-bien celle que décrit un poids qui tombe, que celle qui eſt faite par le point de la ſurface de la Terre, duquel il eſt parti pour tomber. Et c'eſt peut-être la raiſon qui fait dire ſur la fin de ſon diſcours ſur ce ſujet à Galilée, que n'oſant pas aſſûrer que ce ſoit là la nature des corps qui tombent, il peut au moins avancer cette propoſition, que ſi la ligne de leur chûte n'eſt pas cette cir-

culaire, c'en est une autre qui lui ressemble, & qui ne s'en éloigne que de fort peu.

Mais pour retourner à notre propos, le même Galilée ayant démontré que sur l'hypothese de la chûte des poids en proportion des nombres impairs, la ligne de Projection est parabolique, qui dans l'autre hypothese étoit Spirale; & comme la Parabole & la Spirale ont d'ailleurs un si grand nombre de proprietez communes, qu'elles ont fait dire à un grand Géometre de notre temps, que *la Parabole n'étoit qu'une Spirale développée*; il y a grande apparence que l'effet de l'une en la diminution des Colonnes pourroit aussi être heureusement produit par l'autre.

P. Greg. à S. Vincentio.

I.

Pour la Parabole.

C'Est ce qui m'a fait résoudre à expliquer présentement une maniere assez facile de décrire & d'appliquer la ligne Parabolique aux Colonnes, afin que l'on en puisse faire l'expérience, & la mettre desormais en usage, si elle satisfait aux yeux de ceux qui s'y connoissent.

Fig III. de la II. Planche.

Pour l'appliquer, il y faut proceder en cette façon. La ligne A B soit la longueur de toute la Colonne, C D le demi-diamétre de sa plus grande grosseur, C G ou B F le demi-diamétre de sa moindre grosseur sous le Collet ou Gorgerin, A C le tiers de la Colonne, ou telle autre partie où on voudra que la diminution commence. Après quoi la ligne C D doit être continuée en N, en sorte que D N soit égale à D G ou E F; & sur la ligne C N, comme diamétre on décrit le demi-cercle N O C, qui coupe la ligne D E en O, & l'on fait D H égale à D O, laquelle sera par conséquent moyenne proportionnelle entre C D & D G; puis il faut mener H I parallele à A B, qui soit coupée en I par la ligne D I, tirée du point D par le point

F, & l'on fait les lignes C K & C M égales à H I. Enfin du point D comme sommet, sur l'axe D C & sur l'amplitude M K, on décrit la ligne Parabolique M L D F K, laquelle passera nécessairement par le point F, & laissera de part & d'autre la ligne, L D F pour la diminution que l'on demande.

La démonstration en est aisée, parce que la ligne H D étant moyenne proportionnelle entre les deux C D & D G, il s'ensuit que le quarré de H D sera au quarré de D G, comme la ligne C D est à la ligne D G; mais le quarré de D H est au quarré de G D, comme le quarré de H I ou C K est au quarré de G F; donc le quarré de l'ordonnée C K sera au quarré de l'ordonnée G F, comme la portion de l'axe C D est à la portion G D. Et partant le point F sera dans la Parabole dont l'axe sera C D, le sommet D, & l'ordonnée C K, c'est-à-dire, l'amplitude M K.

Je ne grossirai point ce discours de toutes les differentes manieres dont on se sert pour décrire les Paraboles, soit par le moyen de plusieurs points trouvez, ou tout d'un trait, par des instrumens qui se trouvent aisément dans les Livres. J'avertirai seulement les Ouvriers que Galilée leur en enseigne une dans ses Méchaniques, que j'estime facile & ingénieuse, & que j'ai fait heureusement pratiquer par les Charpentiers du Roy, en la fabrique des Vaisseaux & Galeres, pour ce qu'ils appellent leur donner beau Galbe à la Pouppe.

Elle est telle, qu'il ne faut que faire la description ci-dessus, au plan d'un mur qui soit à plomb, en sorte que la ligne M K soit de niveau, & attacher deux clous aux deux repaires K & M qui terminent l'amplitude de la Parabole, sur lesquels il faut laisser librement pendre une ficelle ou chaînette, jusqu'à ce que de son milieu elle vienne à toucher le point D, c'est-à-dire, le sommet de la Parabole, afin qu'elle la marque dans toute son étenduë; en sorte que si cette cordelette est frotée de crayon ou sanguine,

& qu'on la fasse toucher doucement au mur sans la changer de situation ni la varier, la ligne Parabolique se trouve désignée sur le plan du mur, laquelle passera nécessairement par le point F.

I I.

Pour l'Ellipse.

Figure III. de la I. Planche.

QUE si l'on veut éprouver quel effet peut faire la ligne Elliptique, il faut (dans la 3. Figure de la 1. Planche) décrire un demi-cercle sur tout le diamétre de la plus grande grosseur de la Colonne K D, lequel coupe G F en H, & abaisser la ligne H I parallele à D K; puis tirer la ligne I D, à laquelle du point B il faut mener une parallele B O qui rencontre la ligne K D continuée en O, & faire les quatre lignes C N & C M, D P & D Q égales à la ligne C O; & par ce moyen l'on aura les deux axes de l'Ellipse M N & K D, laquelle passera nécessairement par le point F; & les deux points Q & P en seront les foyers, qui sont appellez Singliots par les Ouvriers, & par le moyen desquels l'Ellipse ou ovale peut être facilement décrite.

La démonstration en est telle, parce que B O est parallele à I D; la ligne C O sera à C B, c'est-à-dire, C N à G F, comme C D est à C I ou G H; & le quarré de l'ordonnée C N au quarré de l'ordonnée G F, comme le quarré de C D est au quarré de G H, c'est-à-dire, comme le rectangle K C D est au rectangle K G D; & partant le point F sera dans l'Ellipse dont M N & D K seront les Axes. Le reste au sujet des foyers Q & P, se voit clairement par la 52. du 3. des Coniques d'Apollonius.

I I I.

Pour le Cercle.

PEut-être que la ligne circulaire même tombera dans le goût de quelques-uns. Elle se peut appliquer en cette maniere. Il faut (dans la 4. Figure de la 2. Planche) méner la ligne droite D F, sur laquelle au point H, où elle est partagée en deux également, il faut tirer une perpendiculaire H I, laquelle rencontre la ligne D C continuée en I, où sera le centre du cercle, qui ayant I D pour rayon, passera aussi par le point F. *Figure IV. de la II. Planche.*

Mais comme ce centre I peut se trouver tellement éloigné, que la pratique de la description du Cercle en deviendroit difficile, ou même impossible ; l'on peut se servir de deux régles, comme D O & D N de grandeur indéterminée, & attachées en D, en sorte qu'elles contiennent l'angle F D M ; & mettant deux repaires fermes aux deux points F & M, que je suppose également distans du point G ; il faut faire marcher le sommet de l'angle D depuis L jusqu'en F, en sorte que la régle D N touche toûjours le point M, & la régle D O le point F ; & par ce moyen le point D décrira par son passage la ligne circulaire L D F que l'on demande.

I V.

Pour l'Hyperbole.

ET si l'on veut sçavoir si l'Hyperbole y est utile, il faut (dans la 4. Figure de la 1. Planche) continuer indéfiniment la ligne C D, & prendre les deux D I & I K égales à D C, en sorte que D K soit égale au plus grand diamétre de la Colonne ; puis sur les deux lignes D K & G I comme diamétres, il faut décrire deux demi-cercles s'entrecoupans au point H, & du point G tirer la ligne G H, & la continuer en R, en sorte que G R soit égale à *Figure IV. de la I. Planche.*

G F ; puis du point R, il faut mener R L paralléle à H I, c'est-à-dire, perpendiculaire à G R, & qui rencontre la ligne G K continuée en L. Ensuite on prend la ligne D M égale à R L, & ayant tiré la ligne I M, on fait de part & d'autre du point I sur la ligne C K continuée, les lignes I O & I P égales à I M. Et par ce moyen sont trouvez les foyers ou Singliots O & P de l'Hyperbole, dont l'Axe transverse est D K, son Axe conjugué T S double de la ligne D M, le centre I, le sommet D, où elle touchera la ligne D E, & passera par le point F.

Voici comme je le démontre, parce que l'angle I H G est droit dans le demi-cercle I H G, & la ligne H I demi-diamétre du Cercle D H K ; la ligne G H touchera le susdit Cercle au point H, & partant le rectangle K G D sera égal au quarré G H, & le rectangle K G D sera au quarré de l'ordonnée G F, comme le quarré G H au même quarré G F, ou de son égale G R, c'est-àdire, comme le quarré H I, ou de son égale D I, au quarré R L, ou de son égale I S ; c'est-à-dire, en prenant leurs quadruples, comme le quarré du diametre K D au quarré du diametre T S. Et partant le point F sera dans l'Hyperbole, dont les deux Axes seront D K & T S, le centre I, & le sommet D. Maintenant parce que D M est égale à I S, le quarré I M ou I O sera égal aux quarrez I D, & I S ; mais le quarré I O est aussi égal au quarré I D, & au rectangle K O D ; donc le rectangle K O D est égal au quarré I S, c'est-à-dire, au quart de la Figure, & excédent d'un quarré, dont le côté est la ligne D O ; & par conséquent le point O & le point P qui est également distant du centre I, seront les foyers de l'Hyperbole susdite : ce qu'il falloit démontrer.

Il y a mille moyens de décrire les Hyperboles, quand on a trouvé ses Axes & ses foyers ; & le plus aisé pour les Ouvriers est celui de M. Descartes qui se pratique ainsi : On prend une grande regle, comme P Q, que l'on atta-

Instrument pour la delinéation de l'Hyperbole.

che par un bout au Singliot P, ſur lequel elle tourne, & par l'autre bout Q à une fiſcelle Q F O, qui doit être plus courte que la regle de toute la longueur de la ligne D K; l'autre extrémité de la corde s'attache à l'autre Singliot O.

Cela fait, il faut tenir la fiſcelle tout près de la regle, comme ſi elle y étoit collée, ainſi qu'il ſe voit dans la Figure, depuis Q juſqu'en F, ou depuis V juſqu'en X; & en tournant la regle ſur le Pivot P, & tenant toujours la corde joignant la regle, le point où elles ſe joindront décrira par ce mouvement l'Hyperbole F X D que l'on demande, laquelle pourra être continuée de l'autre côté, en changeant la regle de face.

CINQUIEME DISCOURS.

DETERMINATION DES MANIERES infinies d'appliquer les Sections Coniques au Trait de la diminution des Colonnes.

IL faut ici remarquer que bien que je n'aye parlé cy-deſſus que d'une ſeule maniere d'Ellipſe & d'Hyperbole, ſçavoir de celle où l'Axe tranſverſe de l'une & de l'autre eſt égal au plus grand diametre de la Colonne; il y a pourtant un nombre infini d'autres eſpeces de l'une & de l'autre qui peuvent être décrites, & ſervir utilement à la diminution des Colonnes, & de ſorte qu'elles touchent la ligne D E en D, & paſſent par le point F. Ce que j'explique en cette maniere.

Aux deux lignes D G & G F (dans la 1. Figure de la 3. Planche) ſoit faite une troiſiéme proportionnelle G H; *Fig. I. de la III. Planche.* & du point H ſoient menées des lignes de tous côtez, comme H D, H L, H δ, H M, &c. leſquelles coupent la ligne D E continuée en D, Q, P, I, O, &c. en ſorte qu'elles rencontrent diverſement la ligne D G continuée indéfiniment: C'eſt à ſçavoir que H D la coupe au point

D, H L au-dessus du susdit point D, H δ lui soit parallele, H M la coupe en M au-dessous du point G, & H N en N, en sorte que G N soit égale à G D, & enfin H λ au point λ, en sorte que G λ soit moindre G D; ensuite de tous les points de la ligne G D, compris entre G & D, soient entenduës être menées des lignes paralleles à G H, & qui soient moyennes proportionnelles entre les portions de la susdite ligne G D, comprises respectivement entre le sommet D & lesdites paralleles, & les portions desdites paralleles contenuës entre ladite D G & les lignes tirées du point H. Ces choses ainsi supposées.

Je dis que toutes ces moyennes proportionnelles seront les ordonnées des lignes regulières, dont l'Axe sera G D, le sommet D, où la plusspart touchera la ligne D E, & passeront par le point F, suivant cet ordre.

I.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de l'Axe D G, & les portions des paralleles coupées par la ligne H D, comme A Z moyenne entre A D & A S, seront *les ordonnées à une ligne droite D Z F*.

II.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de G D, & les paralleles coupées par la ligne H L comme A T moyenne entre A D, & A B, *seront dans l'Hyperbole D T F*, dont D L sera l'Axe transverse, & D Q le droit. Où il paroît que ce sera l'Hyperbole que nous avons décrit cy-dessus, si la ligne D L est égale au plus grand diametre de la Colonne, & G F égale aux deux tiers de sa longueur.

III.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de G D, & les paralleles coupées par la ligne H δ, comme

A V

A V moyenne entre A D & A C, *seront les ordonnées à la Parabole D V F*, qui est celle que nous avons expliquée cy-dessus, & dont G D sera l'Axe, & G H ou D P le diametre droit ou contigu.

IV.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de G D, & les paralleles coupées par la ligne H M, comme A X moyenne entre A D & A K, *seront les ordonnées à une Ellipse D X F*, dont l'Axe transverse est D M, & son droit ou contigu est D I. Où il se voit qu'elles seront au cercle que nous avons décrit au précédent discours, si les lignes G H & M G sont égales, & qu'elles seront dans l'Ellipse que nous avons expliquée au même endroit, si la ligne D M est égale au plus grand diametre de la Colonne.

V.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de G D & les paralleles coupées par la ligne H N, comme A Y moyenne entre A D & A R *sont aussi dans une Ellipse D Y F*, dont l'Axe transverse est D N, & le droit D O. Où il faut remarquer que G N ayant été faite égale à G D dans cette hypothese, la ligne G F sera la moitié de l'Axe de même conjugaison avec D N, & partant cette Ellipse est la derniere de celles qui peuvent servir aux Colonnes parce que toutes les autres, dont les Axes transverses sont moindres que D N, ont quelques ordonnées au susdit Axe & au-dessus du point G qui sont plus longues que G F, & qui font par conséquent passer la courbe de l'Ellipse au-delà de la ligne E F, comme il se voit en l'hypothese qui suit.

VI.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de G D, & les paralleles coupées par la ligne H λ, comme A ρ

moyenne entre A D & A μ, *ſont ordonnées à une Ellipſe D ρ F*, dont l'Axe tranſverſe eſt D λ, & le droit D ν; où il ſe voit que ſi le point A eſt plus près du point milieu de la ligne D λ que le point G, la ligne A ρ ſera plus longue que G F; & par conſequent le point ρ de l'Ellipſe paſſera au-delà de la ligne E F en ρ, d'où elle retournera en F, après avoir fait une Courbure en dehors: ce qui ne peut pas ſervir aux Colonnes.

VII.

Enfin, ſi la ligne du point H coupe D G entre D & G comme en π; il arrivera 1. Que toutes les moyennes proportionnelles entre les parties de π D & les paralleles tirées entre les points π & D, & coupées par la ligne H π continuée en τ, comme A β moyenne entre A D & A ξ, *ſeront ordonnées à un cercle* D β π ſi les lignes π D, τ D ſont égales, *ou à une Ellipſe*, ſi elles ſont inégales, dont l'Axe tranſverſe π D & le droit τ D.

2. Et toutes les moyennes entre les parties de G D & les paralleles tirées de tous les points de la ligne G π, & coupées par la ligne H π, comme ψ χ moyenne entre ψ D & ψ φ, *ſeront ordonnées à une Hyperbole* π χ F, qui touchera la ſuſdite Ellipſe au point π, & aura mêmes Axes qu'elle, ſçavoir π D pour tranſverſe, & D τ pour droit.

En quoi il ſe voit encore que ni l'une ni l'autre de ces deux lignes ne peuvent avoir aucune utilité pour les Colonnes, parce que l'Ellipſe ne paſſe point par F, & l'hyperbole ne touche point la ligne D E en D, qui ſont conditions néceſſaires pour leſdites Colonnes.

Maintenant, comme on peut tirer une infinité de lignes du point H entre les deux lignes H G & H δ qui couperont la ligne G D en quelque point au-deſſus de D, lequel terminera l'Axe tranſverſe *d'une Hyperbole utile aux Colonnes*; & comme on peut tirer une autre infinité de lignes du même point H, qui couperont la même G D au-deſſous du

point N en quelque point qui terminera l'Axe tranſverſe *d'une Ellipſe auſſi utile aux Colonnes.*

De plus, comme les unes & les autres deſdites lignes ſont régulieres, uniformes, & qui ſe peuvent décrire par une infinité de manieres differentes, auſſi-bien que par celles que nous avons cy-deſſus expliquées, & qui (a la reſerve de celles dont les Axes tranſverſes ſont coupez par les lignes tirées du point H entre les points D & N) touchent toutes la ligne D E en D, & paſſent par le point F.

Il s'enſuit que l'on peut utilement décrire une infinité de ces lignes pour le trait de la diminution des Colonnes, entre leſquelles la Parabole ſera la moyenne, ſous laquelle paſſeront les Hyperboles dans l'eſpace contenu entre la Parabole & la ligne droite D F, & toutes les ellipſes paſſeront au-deſſus, c'eſt-à-dire, dans l'eſpace compris entre la Parabole & la droite D E.

Et quoi qu'entre ces lignes j'aye ſeulement choiſi pour exemple celles dont l'Axe tranſverſe étoit égal au plus grand diametre de la Colonne, ce n'a pas été pour être plus aiſées ou plus utiles que les autres, mais ſeulement parce que cette grandeur s'eſt trouvée ainſi déterminée.

De toutes ces choſes, on peut juger ſi je n'ai pas eu raiſon de ſouhaiter au premier Diſcours de ce Problême, que l'Auteur *du Paradoxe propoſé à réſoudre à tous les Architectes*, ſe fut un peu plus clairement fait entendre de la nature de la ligne, que l'on peut, comme il dit, décrire *Architectoniquement parfaitement* pour le renflement & diminution des Colonnes; puis qu'après que quelqu'un en aura décrit *Architectoniquement parfaitement* une infinité par les manieres cy-deſſus dites, il dépendra toujours de la volonté de l'Auteur *du Paradoxe* de s'en réſerver une infinité d'autres, & dire qu'on n'aura pas encore trouvé la ſienne.

Outre que cette même infinité de lignes qui ſe trouve dans ces trois ſections de Cone, que M. Deſcartes appelle

lignes du premier Genre, dont les Equations ne montent qu'aux quarrez, ſe rencontrent de même dans toutes les lignes des Genres plus élevez, leſquels étant d'ailleurs infinis, produiſent encore une infinité d'infinité de lignes régulieres, uniformes, que l'on peut décrire *Architectoniquement parfaitement*, & qui ſont propres à réſoudre *le Paradoxe* propoſé.

Sans parler d'une autre infinité de lignes, qui ne ſont pas compriſes ſous ces Genres, comme de la Roulette, Ovales de M. Deſcartes, Spirales, Cyſſoïdes, Conchoïdes, Quadratices, &c. leſquelles ſont auſſi lignes uniformes & régulieres, & qui par conſéquent peuvent faire effet dans cette deſcription.

SECOND PROBLEME RESOLU.

L'Appollonius François des Tactions, ou décrire Géometriquement les Arcs rampans sur toutes sortes de pieds droits & de hauteur.

PREMIER DISCOURS.

IL y a deux choses qui méritent d'être considerées au sujet des Arcs rampans, qui sont ordinairement mis en pratique sur des ouvertures & hauteurs données ou non données; l'une regarde la maniere de les décrire, & qui fait le sujet du présent Problême; l'autre traite du moyen de tirer leurs joints de tête, qui est expliqué dans le Problême suivant.

Premiere Observation.

Sur la maniere de décrire les Arcs rampans, je me suis souvent étonné que la pratique que Pappus enseigne dans le 8. de ses Collect. Mathem. de trouver les Axes d'une Ellipse, dont les diamétres de même conjugaison sont donnez, ne fut pas en usage parmi les Ouvriers pour la description de ces Arcs, vû qu'elle y est si utile & si aisée.

Et après avoir médité sur les causes qui peuvent l'avoir jusqu'ici fait négliger, j'en ai trouvé deux assez apparentes. La premiere est, qu'il ne paroît pas facilement qu'il y ait aucun rapport entre la proposition de Pappus, & la description de ces Arcs rampans, parce qu'il faut une préparation assez difficile sur les lignes données, que l'Ellipse ou l'Arc proposé doit toucher en certains points, afin de trouver ses diamétres de même conjugaison, au-

paravant que l'on y puiſſe appliquer ce Problême de Pappus. L'autre raiſon eſt, que ce Problême dans l'Auteur n'eſt expliqué que méchaniquement, quoique ſa réſolution ſoit purement Géométrique, & n'ayant été démontré ni par Pappus, ni même par Commandin qui l'a commenté, on a dû juſqu'ici douter de ſa verité ; & l'apprehenſion que l'on a euë de travailler ſur une fauſſe ſuppoſition, a pû être en partie la cauſe qu'on ne s'y ſoit pas étudié.

Pour ſatisfaire à l'une & à l'autre de ces raiſons, j'ai travaillé à donner une deſcription aiſée de ce qu'il faut faire pour cette préparation, c'eſt-à-dire, pour trouver les diamétres de même conjugaiſon d'une Ellipſe, ou autre ſection qui doive toucher certaines lignes données en certains points dans tous les cas qui ſe peuvent propoſer ; (ce qui peut en Géométrie porter le nom d'Apollonius des Tactions.) Et après y avoir joint des Pratiques entieres & démontrées, j'ai auſſi voulu faire connoître, que l'on pouvoit ſe ſervir aſſûrément de la régle de Pappus, de laquelle j'ai fait une Démonſtration purement Géométrique, afin que les Ouvriers la puiſſent dorénavant mettre en uſage au lieu de celles qu'ils employent, qui ſont ou fautives & défectueuſes, ou trop embarraſſées.

Seconde Obſervation.

On peut donc conſtruire les Arcs rampans par des Ovales qui ſont faites par l'attouchement de certaines portions de Cercles, ou par le moyen des Sections Coniques, ou même par une infinité d'autres lignes de divers genres. Je ne dirai rien de la premiere maniere, parce qu'elle a été curieuſement recherchée & heureuſement décrite par le ſieur Boſſe dans ſes derniers Ouvrages d'Architecture. La troiſiéme façon de les décrire par des lignes d'un autre genre que les Sections Coniques eſt ſi vaſte, ou

pour mieux dire ſi embarraſſée, qu'elle ne peut pas avoir grand uſage dans la pratique.

Ce ſera donc la ſeconde qui ſe ſert des Sections Coniques que j'expliquerai dans ce Diſcours, & particulierement ce qui regarde les conſtructions de l'Ellipſe comme de la Section, dont l'uſage eſt plus fréquent que des autres en cette matiere.

Mais avant que de paſſer plus outre, il n'eſt pas hors de propos d'enſeigner une choſe, qui tombe très-ſouvent en uſage quand on traite des Sections Coniques, & dont la connoiſſance abregera de beaucoup les pratiques que nous déduirons ci-après. C'eſt ce Problême.

Trouver une moyenne Harmonique entre deux lignes données.

Les deux lignes ſoient A B & C (dans la 2. Figure de la 3. Planche,) & de la plus grande A B ſoit retranchée la partie B D égale à C, & le reſte A D diviſé en deux également en E. Enſuite ſur les deux lignes A D & E B comme diamétres, il faut faire les deux demi-cercles A G D, E G B ſe coupans en G, d'où il faut mener les droites G B, G E, & abaiſſer G F perpendiculaire à A B. Je dis que la ligne B F ſera celle que l'on cherche, & moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux droites données AB & C; parce que l'angle E G B au demi-cercle étant droit, auſſi-bien que les angles au point F, la ligne B E ſera à EG, comme E G eſt à E F; c'eſt-à-dire, que E G ou E D ſera moyenne Geométrique entre les deux E B & E F; & partant par converſion de raiſon, doublant les antécédens, & diviſant, la ligne A F ſera à la ligne F D comme A B eſt à B D; c'eſt-à-dire, que comme la premiere A B eſt à la troiſiéme B D, ainſi A F, qui eſt l'excès de la premiere A B ſur la ſeconde B F, eſt à F D, qui eſt l'excès de la ſeconde B F ſur la troiſiéme B D. Et par conſéquent les trois lignes A B, F B, D B ſont en continuelle proportion Har-

Figure II. de la III. Planche.

monique, & la ligne B F est moyenne Harmonique entre les deux extrêmes A B & B D ou C. Ce qu'il falloit faire.

Il paroît de plus que le quarré de la Touchante B G étant égal au rectangle des mêmes extrêmes A B & B D, la même B G sera moyenne Géométrique entre ces lignes. Et parce que la ligne A B surpasse E B du même excès que la ligne E B surpasse D B, il s'ensuit que cette ligne E B est la moyenne Arithmétique entre les mêmes extrêmes A B & B D ou C. Voilà donc entre deux extrêmes données A B & C, trois moyennes trouvées, sçavoir l'Arithmétique B E, la Géométrique B G, & l'Harmonique B F.

Or comme dans le Triangle E B G, la ligne E B est à B G, comme B G est à B F; il s'ensuit que la même B G est aussi moyenne proportionnelle Géométrique entre les deux E B & B F. Et partant que *la moyenne Géométrique entre deux lignes extrêmes, est aussi moyenne Géomètrique entre les deux moyennes Arithmétique & Harmonique des mêmes extrêmes.* Ce qu'il faut remarquer.

Troisiéme Observation.

Sur ce propos il y a deux choses que je ne sçaurois dissimuler. La premiere est l'étonnement que j'ai eu, qu'encore que l'on ait écrit de si belles choses des Sections Coniques, & qu'entre les propriétez de leurs Contingentes, celle-ci ait été reconnuë pour une des principales & plus fréquentes, puisqu'il arrive en mille façons qu'une ligne s'y trouve divisée comme A B l'est en F & en D; de sorte que la Toute A B soit à sa Partie D B comme A F est à FD. Et quoique les plus grands Géométres ayent particulierement recherché les admirables effets de cette espéce de proportion, je n'ai pourtant vû jusqu'ici personne qui se soit avisé de l'appeller *Harmonique.* Il y en a quelques-uns qui l'ont appellée *Involution*; d'autres ont dit que c'étoit *une moyenne & extrême raison proportionnelle*; mais pas un, au

M. Dezargues
P. Greg. à S. Vincent.

au moins que je ſçache, ni des Anciens ni des Modernes, ne lui ont donné ſon veritable nom.

Quatriéme Obſervation.

Sur les Erreurs de Pappus pour l'inſcription de trois médiétez au demi-cercle.

La ſeconde des choſes que je ne ſçaurois diſſimuler au ſujet des proportionnalitez, c'eſt que Pappus ayant propoſé la queſtion que j'ai expliquée ci-deſſus ſous le nom du ſecond Problême dans le 3. Livre de ſes Collections Mathématiques de *trouver*, ainſi qu'il dit, *trois médiétez dans un demi-cercle*, il ſemble qu'il n'ait pas trop bien entendu lui-même la nature de la propoſition, en laquelle il a fait, à mon ſens, deux fautes conſiderables. La premiere eſt, d'avoir repris aſſez légérement la ſolution qu'un autre en avoit faite avant lui, quoiqu'elle fût légitime. La ſeconde eſt, de l'avoir lui-même mal réſoluë.

L'une & l'autre ſe reconnoîtra par ſon diſcours & dans ſes Figures. La queſtion commence par ce titre. *Le ſecond Problême étoit tel.*

Prendre trois médiètez dans le demi-cercle.

Un autre, dit-il, *l'a expliqué en cette maniére, & expoſant un demi-cercle A B C* (dans la 3. Figure de la 3. Planche) *dont le centre eſt E, & prenant dans la droite A C quelque point comme D, & élevant la Perpendiculaire D B, il a mené la ligne E B, ſur laquelle ayant tiré du point D la perpendiculaire D F, il s'eſt contenté d'affirmer ſimplement qu'il avoit expoſé trois médiétez dans le demi-cercle, ſçavoir E C, moyenne Arithmétique, D B, Géometrique, & B F, Harmonique. Or il eſt conſtant que B D eſt la moyenne en proportion Géometrique entre les deux A D & D C; & que E C eſt moyenne Arithmétique entre les deux mêmes extrêmes A D & D C: parce que A D eſt à D B comme D B eſt à D C; & comme* Figure III. de la III. Planche.

A D est à elle-même, ainsi l'excès des deux A D, A E, c'est-à-dire, A D, E C est à l'excès des deux E C & C D. Mais il n'a point dit en quelle sorte B F fût moyenne en médiété Harmonique, ni de quelles lignes droites, c'est-à-dire, entre quelles extrêmes; mais il a seulement assûré qu'elle étoit la troisiéme proportionnelle aux deux E B & B D, ne sçachant pas que des trois lignes E B, B D, B F, qui sont en proportion Géometrique, il se forme une médiété Harmonique: car nous montrerons ci-dessous que deux E B, trois D B & B F ajoûtées ensemble, font le plus grand terme d'une médiété Harmonique, de laquelle deux B D & B F font le moyen, & B D & B F le moindre.

Voilà tout le discours de Pappus que j'ai traduit du Latin de Commandin, dans lequel il paroît que Pappus n'a pas connu que la ligne B F fût la moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux extrêmes A D & D C, entre lesquelles les deux E C ou E B & D B sont aussi respectivement moyennes Arithmétique & Géometrique; parce qu'il ne s'est pas souvenu de ce que nous avons fait remarquer ci-dessus, que *la moyenne Géometrique entre deux extrêmes étoit aussi moyenne Géometrique entre les moyennes Arithmétique & Harmonique des mêmes extrêmes*; n'étant pas possible qu'il n'eût vû, si la pensée lui en étoit venuë, que la ligne B D étant moyenne Géometrique entre les deux extrêmes A D & D C, & entre les deux lignes E B & B F, dont E B est moyenne Arithmétique entre les mêmes extrêmes A D & D C, la ligne B F ne dût être aussi la moyenne Harmonique entre les mêmes.

Figure IV. de la III. Planche.

Ce qui se pourroit encore démontrer d'une autre maniere, en prenant (dans la 4. Figure de la 3. Planche) la ligne E G égale à D C, & ménant la ligne D K qui touche le Cercle A K H fait du centre G & intervalle A G, & la ligne K I, perpendiculaires à A C & G K, parce que la toute A E étant égale à la toute E C, & l'ôtée G E égale à l'ôtée D C, le reste A G ou G H sera égal au reste E D;

& ôtant le commun E H, la ligne E G ou C D ſera égale à D H ; & comme A D à D C, ainſi A D à D H ; mais la raiſon de A D à D C eſt double de celle de A D à D B, & la raiſon de A D à D H double de celle de A D à D K : Donc la raiſon de A D à D B ſera égale à celle de A D à D K ; & partant la ligne D K ſera égale à D B. Maintenant ſi aux lignes égales G H & E D on ajoûte les égales H D & D C, les toutes G D & E C ou E B ſeront égales ; & partant G D ſera à D K comme E B à B D ; mais comme G D eſt à D K, ainſi D K eſt à D I ; comme E B eſt à B D, ainſi B D eſt à B F : Donc D K ſera à D I, comme D B eſt à B F ; & partant la ligne D I ſera égale à la ligne B F. De plus, la ligne D K touchant le cercle, & K I étant perpendiculaire à A D, il s'enſuit que A D premiere eſt à D H troiſiéme, comme A I différence de la premiere A D & ſeconde D I eſt à I H différence de la ſeconde I D & troiſiéme H D, c'eſt-à-dire, que la ligne D I eſt moyenne Harmonique entre les deux extrêmes A D & D H ou D C. Et partant que la ligne B F égale à D I eſt auſſi moyenne proportionnelle entre les deux A D & D C, dont D B eſt la moyenne Géometrique, & E B ou E C l'Arithmétique.

Il paroît donc que le Problême de Pappus a été parfaitement reſolu par les trois lignes E C, B D, B F, qui ſont moyennes Arithmétique, Géometrique & Harmonique en un demi-cercle A B C, & entre mêmes extrêmes A D & D C.

Et pour ce qu'il dit enſuite, que des trois lignes en proportion Géometrique E B, B D, B F ajoûtées l'une à l'autre en certaine maniére, il s'en forme une médieté Harmonique : Quoique cela ſoit vrai, & d'une analogie, (comme il dit) ingénieuſe, ainſi que nous l'avons expliqué dans un autre diſcours ; cela n'a point de rapport à la queſtion préſente, parce que cette médieté produite donne d'autres termes & d'autres proportions que celles qui ſont propoſées.

L'autre défaut se reconnoîtra dans la 16. Prop. du même Livre, où il propose lui-même à résoudre le Problème ci-dessus, qu'il prétend avoir été mal résolu par d'autres. Il dit donc ainsi.

Faire trois médiétez dans le demi-cercle.

Figure V. de la III. Planche.

Tout ce que nous avons dit ci-dessus (dit-il) *de trois médiétez, est selon l'opinion des Anciens ; mais nous montrerons maintenant qu'il est possible de faire aussi en six lignes droites & les plus petites, trois médietez dans le demi-cercle.*

Que l'on expose (dans la 5. Figure de la 3. Planche) *un demi-cercle, dans lequel B D soit perpendiculaire, E B demi-diamétre, sur qui D F soit aussi à angles droits ; & par B soit menée G B H qui touche le cercle ; & après avoir continué A C en G, soit faite B G égale à B H, & tiré la ligne DKH. Je dis que E K est moyenne en médieté Harmonique, dont B E est la plus grande, & E F la moindre, parce que les angles aux points B & F étant droits, &c..... Or nous avons démontré que les droites A D, E C, D C faisoient une médieté Arithmétique, & que les droites E G, E C, E D, faisoient une autre médieté Géometrique. Nous avons donc fait trois médietez dans le demi-cercle.*

Dans tout ce discours de Pappus je ne vois pas bien ce qu'il entend par ces mots, de *faire au demi-cercle trois médietez en six lignes les plus petites* ; car quoique les trois lignes B E, E K, E F fassent une médieté Harmonique, que les trois A D, E C, D C une Arithmétique, & les trois E G, E C, E D une Géometrique ; elles sont néanmoins plus de six lignes différentes, & elles ne sont pas toutes dans le demi-cercle, hors duquel s'étend la ligne E G. De plus, il ne peut pas entendre par ces six lignes trois couples d'extrêmes comme A D, D C : B E, E F : & E G, E D : entre lesquelles il faille trouver trois moyennes dans le demi-cercle, tant parce que pas une de ces extrêmes n'est déterminée, & qu'elles ne se trouvent non

plus que les moyennes que par la construction, que parce que, comme nous venons de dire, il y a une de ces extrêmes, sçavoir E G, qui tombe hors du demi-cercle.

Le Problême seroit élegant, si ayant proposé trois couples de lignes disposées en certaine maniere, comme A D, D C : E G, E D : A G, & une autre, comme A L : il falloit trouver le demi-diamétre d'un cercle comme E C, qui fût respectivement moyenne Arithmétique, Géometrique, & Harmonique aux trois couples proposez en la même sorte qu'elle l'est Arithmétique & Géometrique aux deux couples A D, D C : & E G, E D : Mais comme elle n'est plus moyenne, mais plus grand terme au troisiéme couple proposé E B, E F : la proposition est défectueuse.

Ou bien à la maniere que les Anciens l'ont entendu & résolu, comme il dit, en cinq lignes seulement, sçavoir qu'il fallût trouver dans le demi-cercle les trois moyennes entre deux extrêmes; comme entre les deux A D, D C, trouver A E moyenne Arithmétique, B D Géométrique, & B F Harmonique, ou entre les deux B E, E F, après avoir divisé B F en deux également en I, trouver E I moyenne Arithmétique, E D Géometrique, & E K Harmonique; ou enfin entre les deux A G, G C trouver E G, Arithmétique, B G, Géometrique, & D G, Harmonique. Et ainsi une infinité d'autres.

Et Pappus auroit en cette maniere évité l'obscurité qui se trouve dans son Problême, qui fait douter qu'il l'ait bien entendu lui-même, aussi-bien que son Interprete Commandin.

SECOND DISCOURS.

TROUVER LES DIAMETRES de même conjugaison des Sections, selon les differentes sujétions des Arcs à décrire.

MAis pour retourner à notre propos, après une si longue digression, il faut se souvenir de ce que nous avons enseigné pour trouver une moyenne Harmonique entre deux lignes données. Et pour commencer aux pratiques de nos Arcs rampans, nous dirons que l'on suppose un Arc à décrire sur deux pieds droits à une hauteur déterminée, ou non déterminée ; & en l'un & l'autre cas ces deux pieds droits sont paralleles ou inclinez l'un à l'autre, soit en talu ou en surplomb. De plus, si la hauteur est donnée, le plan qui la détermine est parallele au plan de la rampe de l'Arc, ou bien l'un & l'autre étant continuez se rencontrent.

Il faut donc parler de tous ces cas, & trouver premierement sur toutes ces Hypotheses, deux diametres de même conjugaison d'une section Conique qui fasse l'Arc que l'on demande ; & ensuite appliquer à ces diametres le Problême de Pappus, si c'est dans une Ellipse, ou d'autres pratiques, si c'est une autre Section, pour en trouver les Axes & les Foyers ou Singliots, par le moyen desquels la Section proposée puisse être facilement désignée.

Et pour y travailler avec ordre, nous commencerons premierement par l'explication de ceux dont la hauteur n'est point déterminée, pour passer ensuite aux autres.

PREMIERE OBSERVATION.

Décrire les Arcs, dont la hauteur n'est point déterminée.

PROBLEME PREMIER.

SOit donc (dans les 6. 7. & 8. Figures de la 3. Planche) les deux pieds droits A C, B D paralleles, soit qu'ils soient à plomb (comme en la 6. & 7. Figure,) ou que l'un soit en talu, & l'autre en surplomb (comme en la 8. Figure). La ligne de la rampe A B (qui conjoint les deux points A & B,) où l'Arc doit toucher les pieds droits, soit qu'elle soit horizontale (comme en la 6. Figure) ou inclinée à l'horizon (comme en la 7. & 8.) soit divisée en deux également en H, & par H soit menée I H G parallele aux pieds droits; je dis que si l'on prend deux lignes égales de part & d'autre du point H sur la ligne I G comme H G & H I à quelque distance qu'on les veüille étendre, les deux lignes A B & I G seront les diametres d'un cercle, si les lignes A H & H G sont égales, ou les Axes d'une Ellipse, si elles sont inégales, & si la ligne A B est perpendiculaire aux pieds droits (comme en la 6. Figure); ou si elle leur est inclinée (comme aux deux autres Figures) elles seront les diametres de même conjugaison d'une Ellipse, qui passant par les points I & G, & ayant le point H pour centre, touchera les deux pieds droits en A & B. La démonstration en est claire par la converse de la 27. du 2. des Coniques d'Apollonius. *Fig. VI. VII. VIII. de la III. Planche.*

Au reste, en cette Hypothese il n'y a que le cercle au seul cas cy-dessus, ou l'Ellipse en tous les autres, qui puissent résoudre le Problême, n'étant pas possible de décrire aucune autre Section qui touche deux lignes paralleles.

PROBLEME SECOND.

Si les pieds droits A C & B D étans tous deux en talu, (comme en la 1. Figure de la 4. Planche) se rencontrent, *Fig. I. de la IV. Planche.*

étant continuez en G, la ligne de la rampe A B doit être divisée en deux également en Z ; & du point G par Z, il faut mener la ligne G Z Y continuée indéfiniment. De plus, si vous partagez G Z en deux également en E, & qu'entre les deux points E & Z vous en preniez un autre en quelque endroit que ce puisse être, comme en F ; je dis que ce point F déterminera le sommet d'une Ellipse, qui touchera les deux pieds droits en A & B. Et que si en prenant la ligne F H égale à F Z, vous faites que comme G H est à H F, ainsi F Z soit à une quatrieme Z Y, le point Y en sera le centre ; D'où si vous faites Y N egale à F Y, la toute F N en sera le diametre.

Pour trouver l'autre diametre de même conjugaison, il faut du point Y mener une ligne K Y I parallele a A B, & qui rencontre en K & I les lignes des pieds droits C A, D B continuées. Puis du point B il faut mener B L parallele à Z Y, & entre les deux I Y & L Y, trouver la moyenne Géometrique Y O, à laquelle il faut faire Y M égale, afin que la toute M I soit divisée Harmoniquement en L & O ; & que par conséquent la ligne M O soit l'autre diametre de même conjugaison avec F N d'une ellipse, qui passant par les points A & B, y touche les lignes des pieds droits C A & D B.

La démonstration s'en fait en cette sorte ; parce que la ligne G H est à H F, comme F Z est à Z Y, en composant, permutant & composant G Y sera à F Y, comme F Y à Z Y ; & partant le quarré de F Y sera égal au rectangle G Y Z.

De plus, si du point A sur K I vous tirez A P parallele à Z Y, il s'ensuivra que les deux B L, A P seront égales, aussi-bien que les deux Y L, Y P ; & parce que les deux Y K & Y I sont aussi égales, aussi-bien que les deux Y M & Y O ; il s'ensuivra encore que la ligne Y O étant moyenne Géometrique entre les deux Y I & Y L, son égale Y M sera aussi moyenne Géometrique entre les deux Y K

&

& Y P ; & les quarrez égaux des lignes Y O & Y M seront égaux aux rectangles égaux I Y L, K Y P.

Maintenant, le quarré F Y étant égal au rectangle G Y Z, & le quarré Y O au rectangle I Y L, les quarrez seront entre eux comme les rectangles : mais le rectangle G Y Z est au rectangle I Y L en raison composée des lignes G Y à I Y, c'est-à-dire, B L à L I, & de Y Z ou B L à L Y ; donc le quarré F Y sera au quarré Y O en raison composée des lignes B L à I L, & de B L à Y L, c'est-à-dire, comme le quarré de B L au rectangle I L Y : mais le rectangle I L Y est égal au rectangle M L O (comme nous le démontrerons cy-dessous.) Et partant le quarré B L sera au rectangle M L O, comme le quarré F Y est au quarré Y O, ou en prenant leurs quadruples, comme le quarré du diametre F N est au quarré du diametre M O : mais B L est parallele au diametre F N, & partant ordonnée au diametre M O ; donc le point B sera dans l'Ellipse, dont les lignes F N & M O seront diametres de même conjugaison. On démontrera par le même raisonnement, que le point A sera dans la même Ellipse.

Il ne reste donc plus qu'à prouver que les lignes C A & D B toucheront cette Ellipse aux susdits points A & B. Ce qui se fait ainsi. D'autant que les trois lignes G Y, F Y, Z Y, sont en continuelle proportion Géometrique, & que Y N est égale à Y F ; il s'ensuit, par ce que nous avons dit cy-dessus, que la toute G N est divisée Harmoniquement aux deux points Z & F ; & partant par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius, que les deux droites G A & G B touchent l'Ellipse en A & B. Ce qu'il falloit démontrer.

Maintenant, afin de faire voir, (comme je l'ai promis dans la suite de la démonstration de ce Problême) que le rectangle I L Y est égal au rectangle M L O ; je dirai ainsi. Le quarré Y O est égal au rectangle I Y L, par ce qui a été dit cy-dessus ; mais le quarré Y O est aussi égal au

quarré Y L, & au rectangle M L O; & le rectangle I Y L aussi égal au même quarré Y L, & au rectangle I L Y; le quarré Y L avec le rectangle M L O sera égal au même quarré Y L avec le rectangle Y L I; & partant, si on ôte le commun quarré Y L, le rectangle M L O restera égal au rectangle I L Y. Ce qu'il falloit montrer.

Pour avoir une entiere détermination de ce Problême, nous dirons que G Y étant à F Y comme F Y à Z Y; par conversion de raison, & en permutant G Y sera à F Y, comme G F est à F Z, où il se voit que la ligne G Y étant plus grande que F Y, il faut aussi nécessairement que la ligne G F soit plus grande que F Z; c'est à-dire, que F Z soit moindre que la ligne E Z, qui est la moitié de G Z, & que par conséquent, pour faire en sorte que le Problême soit possible, il faut prendre le point du sommet F entre les deux E & Z. Où il paroît que plus on le prendra éloigné du point Z, plus l'Ellipse montera & s'agrandira à l'infini, à mesure que le sommet F s'approchera du point E; comme au contraire, elle diminuëra & deviendra plus plate en s'approchant de la ligne de la rampe A B, à mesure que le même sommet F s'approchera du point Z.

Que si les lignes A G & B G sont égales, l'on pourra se servir d'un cercle pour la solution de ce Problême, dont le centre sera dans la ligne G Z, au point où elle sera coupée par les lignes tirées des points A & B perpendiculaires aux lignes A C & B D. Mais en tous les autres cas de cette hypothese, il n'y a que la seule Ellipse qui puisse servir à la solution du Problême, étant impossible de trouver aucune autre section qui touche les deux pieds droits, & dont le sommet se trouve en dehors vers le point N.

PROBLEME TROISIEME.

Fig. II. III. IV. de la IV. Planche.

Si les deux pieds droits A C & B D sont tous deux en surplomb (comme aux 2. 3. & 4. Figures de la 4. Planche) & étans continüez, se rencontrent en G, la ligne

de la rampe A B doit être divisée en deux également en Z ; & du point G par Z, il faut mener G Z indéfiniment, & partager la ligne G Z en deux également en E. Après quoi, il faut sçavoir que cette proposition contient trois cas differens, à chacun desquels il convient une particuliere Section Conique. Car ou l'on prendra le sommet en E, auquel cas la Section qui résout le Problême est une Parabole (comme en la 2. Figure ;) ou bien entre E & Z, auquel cas il faut une Ellipse (comme en la 3. Figure ;) ou enfin entre E & G, & alors il faut une Hyperbole pour satisfaire à la question (comme en la 4. Figure.) Il faut donc examiner les susdits cas l'un après l'autre.

Premier Cas du troisiéme Problême.

Si donc vous prenez le sommet de votre section en E, point du milieu entre G & Z (comme en la 2. Figure de la 4. Planche) ; & qu'aux deux lignes E Z & Z B vous trouviez une troisiéme proportionnelle E F, que vous fassiez en E parallele à A B ; je dis que la Parabole dont le sommet est E, le diametre E Z, & son parametre ou diametre contigu sous un angle Z E F égal à A Z E, est la ligne E F, passera par les points A & B, où elle touchera les lignes A C & B D : car la ligne E F étant troisiéme proportionnelle Géometrique aux deux E Z & Z B, le quarré de Z B ou de son égal Z A sera égal au rectangle Z E F ; & partant les lignes Z A, Z B seront ordonnées au diametre E Z d'une Parabole dont le sommet sera E, & le diametre contigu E F. Et parce que E Z est égal à G E, les deux lignes G A & G B toucheront la Parabole aux points A & B, par la 33. du 1. des Coniques d'Apollonius. *Fig. II. de la IV. Planche.*

Second Cas du troisiéme Problême.

Si vous prenez le sommet de votre section entre les points E & Z (comme en la 3. Figure) au point F ; & qu'après avoir fait F H égal à F Z, vous faites que comme la *Fig. III. de la IV. Planche.*

ligne G H eſt à H F, ainſi F Z ſoit à une quatriéme Z Y. Et ſi vous tirez par le point Y la ligne K Y I parallele à la rampe A B, & rencontrant les lignes A C, B D continüées en K & I, ſur laquelle K I des points A & B, vous menez des lignes A P & B L paralleles à G Y, & qu'entre les deux K Y & Y P, ou leurs égales I Y & Y L, vous faites des moyennes Géométriques de part & d'autre Y M & Y O; & enfin ſi vous prenez Y N égale à Y F, je dis que les deux lignes F N & M O ſont diametres de même conjugaiſon d'une Ellipſe, qui touchera les deux lignes des pieds droits A C & B D aux points A & B.

La démonſtration en eſt quaſi la même que celle du Problême précédent, & elle ſe fait ainſi. Parce que G H eſt à H F comme F Z à Z Y, en compoſant, permutant, & compoſant, G Y ſera à F Y comme F Y à Z Y; & partant le Quarré F Y ſera égal au rectangle G Y Z. Mais le rectangle K Y P ou I Y L eſt auſſi égal au quarré M Y ou Y O; partant le rectangle ſera au rectangle comme le quarré eſt au quarré. Maintenant le rectangle G Y Z eſt au rectangle K Y P en raiſon compoſée des lignes G Y à K Y, c'eſt-à-dire, A P à K P, & Z Y ou ſon égale A P à Y P: Donc le quarré F Y ſera au quarré M Y en raiſon compoſée des lignes A P à K P, & A P à P Y, c'eſt-à-dire, comme le quarré A P eſt au rectangle K P Y. Mais le rectangle K P Y eſt égal au rectangle M P O (comme nous dirons cy-deſſous.) Donc le quarré F Y eſt au quarré M Y, ou prenant leurs quadruples, le quarré du diametre F N eſt au quarré du diametre M O, comme le quarré A P eſt au rectangle M P O. Nous prouverons par le même diſcours que le quarré B L a auſſi la même raiſon au rectangle M L O; mais les lignes A P & B L ſont paralleles au diametre F N, elles ſeront donc ordonnées au diametre M O, & les points A & B ſeront dans l'Ellipſe, dont le centre ſera Y, & les lignes F N, M O diametres de même conjugaiſon.

Je dis de plus, que ladite Ellipſe touchera les lignes

AC, BD aux mêmes points A & B : parce que la ligne FY eſt moyenne Géometrique entre les deux GY & YZ, & YN eſt égale à FY ; la toute GN ſera diviſée Harmoniquement aux deux points F & Z, & la ligne GZ ſera moyenne Harmonique entre les deux extrêmes GN & GF ; & la ligne AZ eſt égale à ZB & parallele à MO ; donc les deux lignes AG & BG toucheront aux points A & B l'Ellipſe dont le ſommet eſt F, les diametres de même conjugaiſon FN & MO, & les ordonnées AZ & BZ, par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius.

Il ne reſte donc plus qu'à démontrer que les deux rectangles KPY & MPO ſont égaux, ce qui ſe fait en cette maniere. Le quarré MY & le rectangle KYP ſont égaux ; mais le quarré MY eſt égal au rectangle MPO avec le quarré PY ; & le rectangle KYP eſt égal au rectangle KPY avec le même quarré PY ; ôtant donc des égaux le même quarré PY, les reſtes ſeront égaux, ſçavoir le rectangle KPY au rectangle MPO. Ce qu'il falloit démontrer.

Que ſi les lignes AG & BG ſont égales, & que des points A & B l'on mene des lignes perpendiculaires aux mêmes AC & BD, elles ſe rencontreront dans la ligne GZ en un point qui ſera le centre d'un cercle utile pour la ſolution de ce Problême.

Troiſiéme Cas du troiſiéme Problême.

Enfin, ſi vous prenez le point F entre E & G (comme en la 4. Figure) ; & que FH étant priſe égale à GF, vous faſſiez que comme ZH eſt à HF, ainſi FG ſoit à une quatriéme GY ; puis par le point Y, ſi vous tirez indéfiniment la ligne KYI parallele à la ligne de la rampe AB, & rencontrant les lignes CA & DB continüées en K & I, ſur laquelle IK des points A & B vous faſſiez tomber les lignes AP & BL paralleles à ZY, afin qu'entre les deux PY & YK, ou leurs égales LY & IY vous puiſſiez prendre les *Fig. IV. de la IV. Planche.*

Nnniij

moyennes Géometriques de part & d'autre Y M & Y O, & qu'enfin vous fassiez Y N égale à Y F.

Je dis que Y est le centre d'une Hyperbole, dont les diametres de même conjugaison sont F N & M O, & le sommet F, laquelle passant par les points A & B, y touchera les deux pieds droits A C & B D.

Parce que la ligne M Y ou O Y est moyenne Géometrique entre les deux P Y & Y K, ou leurs égales L Y & I Y; le quarré de M Y ou de Y O sera égal au rectangle K Y P. De plus, parce que Z H est à H F, comme F G est à G Y, en composant, & permutant Z F sera à F Y comme H F ou son égale F G à G Y, & en composant Z Y sera à F Y com- F Y à G Y; & partant le quarré de F Y sera égal au rectangle Z Y G. Donc le quarré F Y sera au quarré M Y, comme le rectangle Z Y G est au rectangle K Y P: Mais le rectangle est au rectangle en raison composée des lignes Z Y à Y P ou son égale A Z, & de Y G à Y K, c'est-à dire, (à cause de la similitude des triangles G Z A, G Y K,) de G Z à la même A Z: Donc le quarré F Y, sera au quarré M Y, en raison composée des lignes Y Z à A Z, & G Z à A Z, c'est-à-dire, comme le rectangle Y Z G au quarré A Z. Mais le rectangle Y Z G est égal au rectangle N Z F, (ainsi que nous le démontrerons cy-après;) Et partant le quarré F Y sera au quarré M Y, ou prenant leurs quadruples, le quarré du diametre N F sera au quarré du diametre M O, comme le rectangle N Z F est au quarré A Z: Mais la ligne A B est parallele à M O, & divisée en deux également en Z; Donc l'Hyperbole dont le sommet est F, le centre Y, & les diametres de même conjugaison N F & M O, passera par les points A & O.

Je dis de plus, qu'elle y touchera les lignes des pieds droits A C & B D: ce que je prouve en cette maniere. D'autant que la ligne F Y est moyenne Géometrique entre les deux Z Y & G Y, & que N Y est égale à F Y, la toute N Z sera divisée Harmoniquement aux deux points G &

F ; & la ligne G Z ſera la moyenne Harmonique entre les deux extrêmes N Z & F Z ; & par conſéquent, par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius, les deux lignes A G & B G toucheront l'Hyperbole en A & B.

Il ne reſte plus qu'à prouver que le rectangle Y Z G eſt égal au rectangle N Z F : ce que je fais ainſi. Puis que Z Y eſt à F Y, comme F Y eſt à Y G ; par converſion de raiſon, & permutant Z Y ſera à F Y ou ſon égale Y N comme F Z à F G ; & compoſant Z N ſera à Y N comme Z G à F G ; & par converſion de raiſon Z N ſera à Z Y comme Z G eſt à Z F ; & partant le rectangle des moyennes Y Z G ſera égal au rectangle des extrêmes N Z F. Ce qu'il falloit démontrer.

SECONDE OBSERVATION.

Décrire les Arcs rampans dont les hauteurs ſont données.

PREMIERE HYPOTHESE.

Quand les lignes des pieds droits ſont paralleles.

PROBLEME QUATRIE'ME.

SI les pieds droits A C, B D ſont paralleles (comme aux 5. & 6. Figures de la 4. Planche) & la ligne E F, qui détermine la hauteur, eſt auſſi parallele à celle de la rampe A B ; en ce cas il ne faut que diviſer la ligne A B en deux également en H, & tirer par le point H la ligne I H G parallele aux lignes des pieds droits, & rencontrant E F en G ; puis en prenant de l'autre part du point H la ligne H I égale à H G, le point H ſera le centre, & les deux lignes A B, G I diametres de même conjugaiſon d'une Ellipſe, laquelle touchera les deux pieds droits aux points donnez A & B, & la ligne E F en G ; avec cette difference, que ſi A B eſt perpendiculaire aux pieds droits, *Fig. V. VI. de la IV. Planche.*

& que H G soit égale à A H, les deux A B & I G seront les diametres d'un Cercle ; ou les Axes de l'Ellipse proposée, si H G & A H sont inégales.

La démonstration est toute entiere dans la 32. du 1. & la converse de la 27. du 2. des Coniques d'Apollonius.

PROBLEME CINQUIE'ME.

Figure VII. VIII. de la IV. Planche.

Si les pieds droits A C, B D étant paralleles, la ligne E F qui détermine la hauteur rencontre la ligne de la rampe A B comme au point I, soit de la part de B, (ainsi que la 7. Figure de la 4. Planche,) ou de la part de A (comme en la 8. Figure;) il faudra diviser comme dessus la ligne A B en deux également au point H, & tirer H G indéfiniment de part & d'autre du point H, & parallele aux pieds droits, qui coupe la ligne E F au point G. Puis il faut faire G K égale à G F, & mener I K, à laquelle il faut aussi mener du point F une ligne parallele F L, & faire la ligne G M égale à G L. Je dis que le point M sera celui où l'Ellipse que l'on cherche doit toucher la ligne E F ; & que si après avoir mené M N parallele à A B, vous faites H O égale à H N, & sur la ligne G O comme diametre, vous décrivez un Cercle G R O, qui coupe en R la ligne H R, tirée du point H perpendiculaire à H G, faisant ensuite les deux lignes H P, & H Q égales à H R, vous aurez les deux lignes P Q & A B pour ses diametres de même conjugaison.

La démonstration s'en fait en cette maniere, après avoir mené la ligne M V parallele à H G. D'autant que G K est égale à G F, G L à G M, & L F parallele à I K, la ligne I G sera à G K, c'est-à-dire, G F, comme G F est à G L, c'est-à-dire, G M. Et parce que M V est parallele à G H, la ligne I H sera à A H ou H B, comme I G est à G F ; & A H ou H B à H V, comme F G à G M, c'est-à-dire, que H B sera moyenne Géometrique entre les deux I H & H V ; & parce que A H est égale à H B, la toute A I dans la 7. Figure

Figure sera divisée Harmoniquement aux deux points V & B, ou dans la 8. Figure la toute B I aux deux points V & A, & en l'une & en l'autre la ligne V I sera la moyenne Harmonique entre les deux A I & B I: Et par conséquent H V sera à V B, comme H B à B I; & A I à I H, comme V I à I B. Par le même raisonnement nous montrerons que le rectangle G H O, c'est-à-dire, G H N étant égal au quarré de H R ou H P, les trois lignes Q G, N G & P G sont aussi en continuëlle proportion Harmonique.

Maintenant la raison du quarré H B, c'est-à-dire, du rectangle I H V au rectangle A V B étant composée des raisons des lignes I H à A V, & H V à V B, c'est-à-dire, H B à B I; & cette composition étant la même que celle de I H à B I, c'est-à-dire, A I à I V, & de H B à A V; & celle-ci étant encore la même que de A I à A V, & de H B à I V; il s'ensuit que la raison du quarré H B au rectangle A V B sera composée des raisons de A I à A V, & de H B à I V. Mais parceque A I est à I H, comme V I est à B I, en permutant, & par conversion de raison dans la 7. Figure, ou en divisant dans la 8; A I sera à A V, comme I H à H B; & partant la composition de raisons de A I à A V, & de H B à I V, sera la même que celle de I H à H B, & de H B à I V, c'est-à-dire, la même de I H, à I V, le quarré donc de H B, c'est-à-dire, le rectangle A H B sera au rectangle A V B, comme I H est à I V, c'est-à-dire, comme G H est à M V ou H N: Mais comme G H est à H N, ainsi est le quarré P H, c'est-à-dire, le rectangle Q H P au quarré de H N ou M V; Donc le rectangle A H B sera au rectangle A V B; comme le rectangle Q H P est au quarré de M V; & en permutant le rectangle A H B sera au rectangle Q H P, comme le rectangle A V B est au quarré de M V. Et partant l'Ellipse dont A B & Q P seront diametres de même conjugaison, passera par le point M, d'où sont tirées les deux ordonnées M V & M N paralleles ausdits diametres.

Il paroît encore qu'elle touchera les deux pieds droits A C & B D aux points A & B, parce que ces points sont au bout du diametre A B, & que les pieds droits sont paralleles à l'autre diametre P Q. Je dis de plus, qu'elle touchera la ligne E F au point M; ce qui est clair par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius.

Si la ligne de la rampe étant perpendiculaire aux pieds droits, la ligne tirée du point H en M se trouvoit aussi perpendiculaire à celle de la hauteur E F, & égale à l'une des deux A H ou B H, ce seroit un Cercle qui résoudroit la question, dont le centre seroit H, & le diametre A B; ce qui est clair par ce qui a été démontré cy-dessus.

SECONDE HYPOTHESE.

Quand les pieds droits se rencontrent, & la ligne de la hauteur est parallele à celle de la rampe.

PROBLEME SIXIE'ME.

Fig. I. de la V. Planche

SI les pieds droits A C & B D ne sont point parallels, mais en talu (comme en la 1. Figure de la 5. Planche,) en sorte qu'étant continüez, ils se rencontrent au-dessous au point G, de la part de C & D; & si la ligne E F qui détermine la hauteur est parallele à celle de la rampe, il faut couper la susdite ligne A B en deux également au point Z, par lequel de G il faut tirer indéfiniment la ligne G Z, qui coupera aussi E F en deux également en H; duquel point H il faut tirer la ligne H B, & la couper en deux également en X, par où du point F il faut mener la ligne F X qui rencontre G Z en Y, puis mener A H & E Y qui se rencontrent en V. Je dis que Y sera le centre de l'Ellipse, qui touchera les trois lignes A C en A, B D en B, & E F en H. Et que si l'on fait Y N égale à Y H, & que menant par le point Y la ligne K Y I parallelle à A B, & A P, B L paralleles à

GY, l'on faſſe YM moyenne Géometrique entre les deux KY & YP, & YO égale à YM : les deux lignes NH & MO en ſeront les diametres de même conjugaiſon.

La démonſtration s'en fait en cette maniere, après avoir tiré les lignes ZX, ZV, AY & BY. D'autant que la ligne KYI eſt parallele à AB, elle ſera diviſée également en Y : & partant les deux triangles EYK, FYI ſur baſes égales, & entre mêmes paralleles ſeront égaux, auſſi-bien que les deux AYK, BYI. Et partant les deux triangles EYA, FYB ſeront égaux ; mais les deux EHY, FHY ſont auſſi égaux. Il y aura donc même raiſon du triangle EYA au triangle EHY, que du triangle FYB à FHY : Mais les triangles EYA & EYH ayans même baſe EY, ſont entre eux comme les lignes AV & VH ; & les triangles FYB, FYH comme les lignes BX & XH : Donc les lignes AV & VH ſeront entre elles comme les lignes BX & XH ; mais ces dernieres ſont égales par la conſtruction : Donc les deux autres AV & VH ſeront auſſi égales ; & partant VX ſera parallele & égale à la moitié de AB, c'eſt-à-dire, AZ. Et parce que dans le triangle ABH, la ligne HB eſt à BX comme AB eſt à BZ, la ligne XZ ſera parallele & égale à la moitié de la baſe AH, c'eſt-à-dire, à VH. Par la même raſon VZ ſera parallele & égale à XH.

Maintenant, ſi l'on continuë les lignes HB, EY juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en R : Comme nous avons montré que AZ étoit égale à VX ; AZ ſera a EH, c'eſt-a-dire, ZG a GH, comme VX eſt a la même EH, c'eſt-a-dire, XR a RH ; & en changeant, & par converſion de raiſon, GH ſera a HZ, comme RH a HX, ou a ſon égale VZ. Mais a cauſe de la ſimilitude des triangles HYR, VYZ, le côté RH eſt a VZ comme HY eſt a YZ: Donc GH ſera a HZ comme HY eſt a YZ ; & en permutant, & diviſant GY ſera a HY comme HY a YZ, c'eſt-a-dire, que HY, ou ſon égale NY ſera moyenne Géometrique entre les deux GY & YZ ; & partant la toute GH

sera divisée Harmoniquement en Z & N ; & la ligne G Z sera moyenne Harmonique entre les deux G H & G N ; & G Y moyenne Arithmétique entre les mêmes. Par même raisonnement nous montrerons que KP est moyenne Harmonique entre les deux O K & K M ; & K Y moyenne Arithmétique entre les mêmes : aussi-bien qu'entre les deux M I & I O, la ligne I L sera moyenne Harmonique, & I Y Arithmétique.

Maintenant nous pourrons faire voir par le même discours dont nous nous sommes servis aux précedentes propositions, que le rectangle H Y N est au rectangle M Y O, comme le quarré de A P est au rectangle KP Y, ou son égal M P O ; & comme le quarré B L est au rectangle Y L I ou son égal O L M ; & comme A P & B L sont paralleles à N H, elles seront ordonnées au diametre M O ; & l'ellipse, dont les diametres de même conjugaison seront H N & M O, passera par les points A & B, où elle touchera aussi les lignes A G, B G par la 34. du 1. des Coniques, & la ligne E F en H par la converse de la 6. du 2. du même. Ce qu'il falloit démontrer.

Que si les deux lignes A G & B G étant égales, & A Y perpendiculaire à A C, elle se trouvoit égale a Y H ; ce seroit un Cercle, qui résoudroit le Problême dont le centre seroit Y, & Y H demi-diametre.

PROBLEME SEPTIE'ME.

Fig. II. III. IV. de la V. Planche.

Si les pieds droits A C & B D ne sont point paralleles, mais en surplomb (comme aux 2. 3. & 4. Fig. de la 5. Planche), en sorte qu'étant prolongez, ils se rencontrent au-dessus, comme au point G de la part de A & B ; & si la ligne E F, qui détermine la hauteur de l'Arc à décrire est parallele à celle de la rampe A B. Il y a trois cas differens en cette proposition, qui demandent chacun une Section Conique pour leur solution, en la même maniere que nous avons dit en l'explication du troisiéme Problême cy-

dessus : car après avoir divisé la ligne de la rampe A B en deux également en Z, & tiré du point G la ligne G Z : il arrivera que la ligne E F passera par le milieu de la susdite ligne G Z en H (comme en la 2. Figure,) ou bien elle passera au-dessous (comme en la 3. Figure); en sorte que la ligne Z H soit moindre que H G ; ou enfin elle passera au-dessus (comme en la 4. Figure,) en sorte que G H soit moindre que H Z. Au premier cas il faudra une Parabole pour résoudre la question ; au second une Ellipse ; au troisiéme une Hyperbole. Et pour les traiter avec ordre.

Premier Cas du Problême septiéme.

Soit (comme en la 2. Figure de la 5. Planche,) la ligne de la hauteur E F, qui passe au point H, où la ligne G Z est divisée en deux également ; & après avoir tiré les deux lignes A H & B H, soit B H aussi partagée en deux également en X, & tirée indéfiniment F X, à laquelle du point E il faut mener E V parallele. Je dis que la section qui touchera les trois lignes A C, B D, & E F aux points A, B, & H, sera une Parabole. Ce que je démontre en cette maniere. *Fig II. de la V. Planche.*

D'autant que la ligne G Z est double de H Z, & que E F est parallele à A B, la ligne G B sera aussi double de B F, & G A double de E A : Mais la ligne B H est aussi double de B X ; & partant dans le triangle G H B, la ligne G B sera à B F comme H B à B X : Donc la ligne F X sera parallele à G H. De plus, la ligne E V ayant été faite parallele à F X, elle le sera aussi à G H ; & partant dans le triangle G H A, la ligne G A sera à A E comme H A à A V : Mais G A est double de A E ; donc H A sera aussi double de A V ; c'est-à-dire, que la ligne E V divisera A H en deux également en V ; aussi-bien que F X la ligne B H en X ; & G Z la ligne AB en Z. Et partant par la 29. du 2. des Coniques d'Apollonius, les trois lignes G Z, F X, E V seront diamétres d'une section, que les lignes A C, B D & E F toucheront

aux points A, B, & H : Mais ces trois diamétres sont paralleles ; donc la section sera une Parabole par la 46. du 1. des mêmes Coniques. Si donc nous faisons H I troisiéme proportionnelle Géometrique aux deux lignes H Z & A Z ; & si nous décrivons une Parabole, dont le diamétre soit H Z, son paramétre ou diamétre contigu H I, le sommet H, & l'angle des ordonnées G H F ; elle passera par les points susdits A, B, & H, où elle touchera les trois lignes A C, B D, & E F.

Et premierement, il est constant qu'elle passera par le point H, puisqu'il en est supposé le sommet ; ensuite H I étant troisiéme proportionnelle Géometrique aux deux H Z & A Z, le quarré A Z ou B Z sera égal au rectangle Z H I ; & partant les deux points A & B seront dans la Parabole, laquelle touchera les lignes A C & B D aux mêmes points, par la 33. du 1. des mêmes Coniques, & la ligne E F en H par la converse de la 46. du même.

Second Cas du Problème septiéme.

Fig. III. de la V. Planche.

Que si la ligne de la hauteur E F coupe G Z, en sorte que G H soit plus grande que H Z (comme en la 3. Figure de la 5. Planche,) après avoir tiré les lignes A H & B H, & divisé H B en deux également en X, tiré F X, jusqu'à ce qu'elle rencontre G Z au point Y, & mené E Y. Je dis que le point Y sera au-dessous du point H vers Z, & que la section qui touchera les trois lignes A C, B D, E F aux points A, B, H, sera une Ellipse, dont le centre sera Y. Et partant si nous faisons Y N égale à Y H, & qu'après avoir mené par le point Y la ligne K Y I paralléle à A B, & sur laquelle tombent les lignes A P & B L paralléles à G Z, nous faisons (ainsi qu'il s'est dit tant de fois) Y M & Y O moyennes Géometriques entre K Y & Y P, ou entre I Y & Y L, les deux lignes H N & M O en seront les diamétres de même conjugaison.

Il se démontre en cette maniere, après avoir continué

les lignes V E, B X juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en R, & mené les lignes V X, V Z, X Z: A Y, B Y: & F ♪ paralléle à G Y. D'autant que G H eſt plus grande que H Z, & E F paralléle à A B, la ligne G F ſera auſſi plus grande que F B: Mais H X eſt égale à B X; donc dans le triangle G H B la ligne G F aura plus grande raiſon à F B que H X à B X, & en compoſant G B aura plus grande raiſon à F B que H B à B X: Mais comme G B eſt à F B, ainſi H B eſt à B ♪: Et par conſéquent H B aura plus grande raiſon à B ♪ qu'à B X; & partant B X ſera plus grande que B ♪; & le point X ſera entre ♪ & H; & l'angle BFY ſera plus grand que l'angle B F ♪, c'eſt-à-dire, B G Z: Et partant la ligne F Y rencontrera G Z continuée de la part de Z au point Y.

De plus, comme les triangles K E Y, I F Y, ſur baſes égales K Y, & I Y, & entre mêmes parallèles K I, E F, ſont égaux; auſſi-bien que les triangles K A Y, I B Y, & E Y H, F Y H. Si des égaux K E Y, I F Y on ôte les égaux K A Y, I B Y; les reſtes ſeront égaux, c'eſt-à-dire, les triangles A E Y, B F Y: Et partant le triangle A E Y aura même raiſon au triangle E Y H que B F Y à F Y H. Mais les triangles A E Y, E Y H ayant même baſe E Y, ſont entr'eux comme les lignes A V & V H; & les triangles B F Y, F Y H ayant auſſi même baſe F Y, ſont comme les lignes B X & X H; la ligne A V ſera à V H comme B X eſt à X H: Mais B X eſt égale à X H par la conſtruction; donc A V ſera auſſi égale à V H; & partant la ligne E Y coupera A H en deux également en V; auſſi-bien que F Y la ligne B H en X; & G Y la ligne A B en Z; & le point Y a été démontré au deſſous du point G vers Z: Et par conſéquent les trois lignes E Y, F Y, G Y ſeront diamétres d'une Ellipſe qui touchera les trois lignes A G, B G, E F aux points A, B, & H, par la 29. du 2. des Coniques d'Apollonius.

Je dis de plus, que les lignes H N & M O en ſeront les diamétres de même conjugaiſon. Comme A H eſt double de H V, auſſi-bien que B H double de H X: la ligne V X

dans le triangle A H B ſera parallele, & égale à la moitié de la ligne A B, c'eſt-à-dire, à A Z. Par la même raiſon X Z dans le même triangle ſera égale, & paralléle à la moitié de la ligne A H, c'eſt-à-dire, à V H ; & V Z égale & paralléle à H X ; & partant A Z ſera à E H, c'eſt-à-dire, Z G à G H, comme V X à la même E H, c'eſt-à-dire, X R à R H : & en changeant & diviſant G H ſera à H Z comme R H à H X, ou à ſon égale V Z. Mais parce que dans le triangle R H Y, la ligne R H eſt à V Z comme H Y à Y Z ; la ligne G H ſera à H Z comme H Y à Y Z ; & en permutant & compoſant G Y ſera à H Y comme H Y à Y Z ; c'eſt-à-dire, que H Y ſera moyenne Géometrique entre les deux G Y & Y Z : Mais Y N eſt égale à Y H. Donc la toute N G eſt diviſée Harmoniquement aux points Z & H: & G Z eſt moyenne Harmonique entre les deux N G & G H ; & G Y moyenne Arithmétique entre les mêmes.

Maintenant nous démontrerons, ainſi qu'en la précedente propoſition, que le quarré de A P ou B L eſt au rectangle M P O ou O L M, comme le quarré du diamétre H N eſt au quarré du diamétre M O. Mais les lignes A Z & B Z ſont égales entr'elles, & paralléles à M O ; elles ſont donc ordonnées à l'autre diamétre H N dans l'Ellipſe, dont les diamétres de même conjugaiſon ſont H N & M O, laquelle touchera les lignes A C, B D en A & B, par la 34. du 1. des Coniques, & E F en H par la converſe de la 6. du 2. des mêmes.

Que ſi les lignes A G & B G étoient égales, & A Y étant perpendiculaire à A C ſe trouvoit égale à Y H ; ce ſeroit un cercle qui ſatisferoit au Problême dont le centre ſeroit Y, & le demi-diamétre Y H, ou A Y.

Troiſiéme Cas du ſeptiéme Problême.

Fig. IV. de la V. Planche. Enfin ſi la ligne de la hauteur E F coupe G Z, en ſorte que G H ſoit moindre que H Z (comme en la 4. Figure de la 5. Planche,) aprés avoir tiré comme ci-deſſus les lignes A H,

A H, B H, & divisé B H en deux également en X, & mené F X indéfiniment de part & d'autre, laquelle rencontre G Z prolongée en Y, & A B en T, & tiré E Y indéfiniment de part & d'autre, qui rencontre A H en λ, & A B en S.

Je dis que le point Y sera dans la ligne G Z prolongée de la part de G, & que la section qui touchera les trois lignes A C, B D, E F aux points A, B & H, sera une Hyperbole, dont le centre sera Y. Et partant si nous faisons Y N égale à Y H, & ayant mené la ligne P Y L par le centre Y, & parallele à A B, si nous continuons A G & B G jusqu'en K & I; & tirant A P & B L paralleles à G Z, si nous prenons Y M & Y O moyennes Géometriques entre les deux K Y & Y P, ou leurs égales I Y & Y L : les lignes N H & M O en seront les diametres de même conjugaison.

Il se démontre ainsi, après avoir mené la ligne X Q V parallele à A B, & rencontrant la ligne Y E au point V. D'autant que E F est parallèle à A B, & A Z égale à B Z; E H sera aussi égale à F H; mais dans le Triangle Y Z S, la ligne E H est à Z S comme Y H est à Y Z; Et dans le Triangle Y Z T, comme Y H à Y Z, ainsi H F à Z T. Donc E H sera à Z S comme H F à Z T; & partant Z S sera égale à Z T. Mais Z T est à Q X comme Z S à V Q: Donc Q X sera aussi égale à Q V; & partant B Z sera à Q X, c'est-à-dire, Z H à H Q comme A Z à V Q; & par conséquent le point V est dans la ligne A H, & le même que le point λ, & en la même raison de A H à H V, comme de Z H à H Q, ou B H à H X; c'est-à-dire, que la ligne Y E S coupera A H en deux également en V, comme Y F T la ligne B H en X, & Y H Z la ligne A B en Z : & le point Y est au-dessus du point G, comme nous le démontrerons ci-dessous; & par conséquent les trois lignes Y E S, Y F T, Y H Z, seront diametres d'une Hyperbole qui touchera les trois lignes A C, B D, E F aux points A, B, & H, par la 29. du 2. des Coniques.

Je dis de plus, que les lignes H N & M O en sont les

diamétres de même conjugaiſon, après avoir continué la ligne BH juſqu'à ce qu'elle rencontre la ligne EY en R, & mené V Z. Nous démontrerons comme en la propoſition précédente, que V X eſt paralléle & égale à A Z, & V Z paralléle & égale à H X; & que par conſéquent A Z ſera à E H, c'eſt-à-dire, Z G à G H comme V X à la même E H, c'eſt-à-dire, X R à R H; & en changeant & diviſant G H ſera à H Z comme R H à H X ou à ſon égale V Z. Mais dans le triangle Y V Z, la ligne R H eſt à V Z comme Y H eſt à Y Z; Donc Y H ſera à Y Z comme G H à H Z; & en changeant, permutant, & par converſion de raiſon Y Z ſera à Y H comme Y H à Y G; c'eſt-à-dire, que Y H ſera moyenne Géometrique entre les deux Y Z & Y G: Et comme Y N eſt égale à Y H, la toute N Z ſera diviſée Harmoniquement aux points G & H, & la ligne G Z ſera moyenne Harmonique entre les deux N Z & Z H, & la ligne Y Z moyenne Arithmétique entre les mêmes.

Maintenant, parce que le quarré Y H eſt égal au rectangle Z Y G, & le quarré Y O au rectangle P Y K; le quarré ſera au quarré comme le rectangle eſt au rectangle: Mais la raiſon du rectangle Z Y G au rectangle K Y P eſt compoſée des raiſons des lignes Z Y à P Y, ou à ſon égale A Z, & & de Y G à Y K, c'eſt-à dire, (à cauſe de la ſimilitude des triangles Y G K & Z G A) de G Z à A Z: Donc le quarré Y H ſera au quarré Y O en raiſon compoſée des raiſons de Z Y à A Z; & de G Z à A Z, c'eſt-à-dire, comme le rectangle Y Z G au quarré A Z. Mais le rectangle Y Z G eſt égal au rectangle N Z H (comme nous le démontrerons ci-deſſous;) Donc le quarré Y H ſera au quarré Y O, ou prenant leurs quadruples, le quarré du diamétre tranſverſe N H ſera au quarré du diametre droit M O, comme le rectangle N Z H au quarré A Z. Mais A Z eſt égale à Z B, & parallele au diamétre M O, elles ſeront par conſéquent ordonnées au diamétre N Z; & les points A & B ſeront dans l'Hyperbole, dont N H & M O ſeront diamétres de même conjugaiſon, & le ſommet au point H.

Il paroît de plus, que les lignes A G & B G toucheront la susdite Hyperbole aux mêmes points A & B, parce que la ligne N Z est divisée Harmoniquement en G & H, par la 34. du 1. des Coniques; & la ligne E F au sommet H, parce qu'elle est parallele à l'ordonnée A B par la converse de la 6. du 2. des mêmes.

Il faut maintenant faire voir que le point Y est dans la ligne Z G prolongée de la part de G, comme nous l'avons promis ci-dessus: ce qui se fait en cette maniere, après avoir tiré la ligne F δ parallele à G Z. D'autant que G H est supposée moindre que H Z, & que E F est parallele à A B; G F sera aussi moindre que F B: Mais H X est égale à X B: Donc G F aura moindre raison à B F, que H X à X B; & en composant G B aura moindre raison à B F, que H B à B X; Mais comme G B à B F, ainsi H B à B δ; Donc H B aura moindre raison à B δ qu'à B X; Et partant B δ sera plus grande que B X, & l'angle B F X moindre que l'angle B F δ, ou son égal B G H: Et partant la ligne X F rencontrant δ F en F, rencontrera aussi sa paralléle Z G prolongée au-dessus de G en Y.

De plus, il faut montrer que les rectangles Y Z G & N Z H sont égaux; ce qui se fait ainsi. Parce que Z Y est à Y H comme Y H à Y G, par conversion de raison, & en permutant Z Y sera à H Y, ou à son égale Y N comme Z H à G H, & en composant, & par conversion de raison N Z sera à Y Z comme G Z à H Z. Et partant le rectangle des moyennes Y Z G sera égal à celui des extrêmes N Z H. Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

TROISIE'ME HYPOTHESE.

Quand les pieds droits ne sont point paralleles entr'eux, ni la ligne de la hauteur à celle de la rampe.

PROBLEME HUITIE'ME.

Figure I. de la VI. Planche.

SI les pieds droits A C, B D ne sont point paralleles, mais en talu (comme en la 1. Figure de la 6. Planche) en sorte qu'étant prolongez, ils se rencontrent au-dessous, comme au point G de la part de C & D. Et si la ligne E F, qui détermine la hauteur de l'Arc à décrire, n'est point parallele à celle de la rampe A B; mais l'une & l'autre étant prolongées, se rencontrent comme au point I.

Il faut premierement couper la ligne A B en deux également en Z, & tirer indéfiniment la ligne G Z; puis entre les deux E I & I F trouver une moyenne proportionnelle Harmonique I H, & du point H mener les deux H B & H A; ensuite il faut diviser H B en deux également en X, & mener F X qui rencontrera la ligne G Z prolongée en Y, & joindre les points E Y.

Je dis que Y sera le centre d'une Ellipse qui touchera les trois lignes A C en A, B D en B, & E F en H; & que si ayant tiré la ligne H Y indéfiniment, & fait Y T égale à Y H, l'on méne par le point Y la ligne N Y M parallele à E F, sur laquelle des points A & B l'on méne les deux A δ & B P paralleles à H T, aussi-bien que A $\downarrow$ & B S paralleles à M N; & qu'enfin entre les deux N Y & Y δ, l'on prenne Y ε moyenne Géométrique, à laquelle on fasse Y β égale. Je dis que les deux lignes H T & ε β seront les diamétres de même conjugaison de la susdite Ellipse.

Pour le démontrer, il faut mener par le point Y la ligne K Y Q parallele à A B, & Y ν perpendiculaire à G B, & Y λ à G A; puis sur A B prolongée, des points E & F tirer les

lignes $E\mu$ & $F\eta$ paralleles à G Z, & mener A Y, B Y ; après quoi je raiſonne en cette maniere.

Puiſque K Q eſt parallele à A B, & que A B eſt diviſée en deux également en Z, par la ligne G Z, la ligne K Q le ſera pareillement en Y ; & les triangles G K Y, G Q Y ſeront égaux, & leurs côtez ſeront en raiſon réciproque de leurs hauteurs, c'eſt-à-dire, que le côté G K ſera au côté G Q, c'eſt-à-dire, G A à G B, comme $Y\nu$ hauteur du triangle G Q Y eſt à $Y\lambda$ hauteur du triangle G Y K. De plus, les triangles A E Y & B F Y étant l'une à l'autre en raiſon composée de celles de leurs côtez & de leurs hauteurs, & la hauteur du triangle A E Y étant $Y\lambda$, & $Y\nu$ celle du triangle B F Y ; le triangle A E Y ſera à B F Y en raiſon composée des raiſons du côté A E au côté B F & de la hauteur $Y\lambda$ à la hauteur $Y\nu$. Mais la raiſon du côté A E à B F eſt encore composée des raiſons de A E à $E\mu$, c'eſt-à-dire, (à cauſe de la ſimilitude des triangles $AE\mu$ & A G Z) de A G à G Z, de $E\mu$ à $F\eta$, & de $F\eta$ à F B, c'eſt-à-dire, G Z à G B (à cauſe que les triangles $BF\eta$, B G Z ſont auſſi ſemblables.) La raiſon donc du triangle A E Y à B F Y ſera composée des raiſons de A G à G Z, $E\mu$ à $F\eta$, G Z à G B, & $Y\lambda$ à $Y\nu$. Mais il a été démontré ci-deſſus que $Y\lambda$ eſt à $Y\nu$ comme G B eſt à G A ; & les raiſons de A G à G Z, & G Z à G B ſont égales à celle de A G à G B ; & partant le triangle A E Y ſera à B F Y en raiſon composée de A G à G B, G B à G A, & $E\mu$ à $F\eta$: Mais les raiſons de A G à G B, & G B à G A ſe détruiſent ; il ne reſte donc plus que la raiſon de $E\mu$ à $F\eta$ pour celle du triangle A E Y à B F Y : Mais $E\mu$ eſt à $F\eta$ comme E I à I F, c'eſt-à-dire, comme E H à H F par la conſtruction, ou comme le triangle E Y H au triangle H Y F : Donc le triangle A E Y ſera au triangle B F Y, comme le triangle E Y H à H Y F ; & en permutant A E Y ſera à E Y H comme B F Y à H Y F. Mais les deux triangles A E Y, E Y H ayant une baſe commune E Y, ſont entr'eux comme les lignes A V & V H ; & les

deux B F Y, H Y F ayant la baſe commune F Y, ſont entr'eux, par la même raiſon, comme les lignes B X & X H; il s'enſuit que A V eſt à V H comme B X eſt à X H; mais celles-ci ſont égales par la conſtruction : Donc A V ſera auſſi égale à V H.

Et partant la ligne E Y coupant A H en deux également en V; & la ligne F Y coupant de même B H en X; auſſi-bien que G Y la ligne A B en Z : il s'enſuit que les trois lignes E Y, F Y, & G Y ſont diamétres d'une Ellipſe, dont le centre eſt Y, & qui touchera les trois lignes A C, B D & E F en A, B & H.

Il faut maintenant montrer que H T & $\epsilon\beta$ en ſont les diamétres de même conjugaiſon; & pour cet effet il faut des points E & F mener ſur la ligne N M prolongée les lignes E 2 & F R paralleles à H T, laquelle il faut continuer de part & d'autre, en ſorte qu'elle rencontre A C en χ, & B D en ζ; puis du point F mener F L parallele à B H, rencontrant T H en L; & par le point X tirer L X, qui rencontre B D en O, & mener Y O. En la même maniere du point E il faut mener E 5 parallele à A H, qui rencontre T H en 5; d'où par le point V il faut tirer 5 V, rencontrant A C en 3, & mener Y 3.

Maintenant, parce que H X eſt égale à X B, la ligne L F aura même raiſon à l'une & à l'autre; mais comme L F eſt à H X, ainſi (dans le triangle L Y F) la ligne L Y eſt à Y H; & comme L F eſt à X B, ainſi (dans le triangle L O F) la ligne L O eſt à O X : Donc L Y eſt à Y H comme L O à O X; & par converſion de raiſon L Y eſt à L H comme L O à L X; & partant dans le triangle L Y O, la baſe Y O eſt parallele à H X, c'eſt-à-dire, à L F; & les triangles Y X O, L X F ſont ſemblables, auſſi-bien que Y ζ O, L ζ F : & par conſequent Y O eſt à L F comme Y X à X F, c'eſt-à-dire, Y H à H L : & Y O à L F comme Y ζ à ζ L : Donc Y H eſt à H L comme Y ζ eſt à ζ L; & en permutant Y ζ eſt à Y H comme ζ L à H L : Mais comme Y ζ eſt à Y H, ainſi ζ M eſt

à M F, & comme ζ L à L H, ainſi ζ F à F B : Donc ζ M eſt à M F comme ζ F à F B, & en permutant & par converſion de raiſon ζ M eſt à M F comme M F à M B. Mais comme ζ M eſt à M F, ainſi ζ Y eſt à F R ou à ſon égale H Y ; & comme F M à M B, ainſi F R eſt à B P, c'eſt-à-dire, H Y à S Y : Donc ζ Y eſt à H Y comme H Y à S Y : Et partant H Y ſera moyenne Géometrique entre les deux ζ Y & S Y : Mais Y T eſt égale à Y H : Donc la toute T ζ ſera diviſée Harmoniquement aux deux points H & S, & la ligne ζ S ſera moyenne Harmonique entre les extrêmes T ζ & H ζ ; & la ligne ζ Y ſera moyenne Arithmétique entre les mêmes.

Par le même raiſonnement nous démontrerons que A V étant égale à V H, la ligne E 5 aura même raiſon à l'une & à l'autre ; mais E 5 eſt à H V, dans le triangle E Y 5, comme E Y à Y V ; & E 5 à A V, dans le triangle E 3 5, comme E 3 à 3 A ; E Y ſera à Y V comme E 3 à 3 A ; & par converſion de raiſon E 3 étant à E A comme E Y à E V, dans le triangle E Y 3, la baſe Y 3 ſera parallele à A V, c'eſt-à-dire, E 5. Et partant les triangles 3 χ Y, E χ 5 ſont ſemblables, auſſi-bien que 3 V Y, E V 5. Et par conſéquent 3 Y ſera à E 5 comme χ Y à χ 5 ; & 3 Y à E 5 comme Y V à V E, c'eſt-à-dire, comme Y H à H 5 : Donc χ Y ſera à χ 5 comme Y H à H 5, & en permutant χ Y ſera à Y H, comme χ 5 à H 5. Or eſt-il que comme χ Y eſt à Y H, ainſi χ N eſt à N E, & comme χ 5 à H 5, ainſi χ E eſt à E A ; Donc χ N eſt à N E comme χ E eſt à E A : & en permutant, changeant, diviſant & changeant χ N ſera à N E comme N E à A N. Mais comme χ N eſt à N E, ainſi χ Y eſt à Y H ou ſon égale Y T, & comme N E eſt à A N, ainſi H Y ou Y T eſt à Y ψ ; Et partant χ Y eſt à T Y comme T Y eſt à Y ψ, & T Y eſt moyenne Géométrique entre les deux χ Y & Y ψ. Mais Y H eſt égale à Y T ; donc la toute H χ eſt diviſée Harmoniquement aux deux points ψ & T ; & la ligne χ ψ eſt moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux extrêmes H χ & χ T ; & la ligne χ Y ſera la moyenne Arithmétique entre les mêmes.

Maintenant, puisque la ligne H Y ou T Y est moyenne proportionnelle Géometrique tant entre les deux ζY & Y S, qu'entre les deux χY & Yψ, les rectangles ζY S & χY ψ seront égaux entr'eux, & au quarré H Y : & ils auront l'un & l'autre même raison au quarré Y ε ou Y β. Mais le rectangle χ Y ψ est au quarré Y ε, ou à son égal le rectangle N Y δ, en raison composée des lignes χ Y, N Y, c'est-à-dire, A δ à N δ, & de Y ψ ou A δ à Y δ. Donc le quarré T Y sera au quarré Y ε en raison composée des lignes A δ à N δ, & A δ à Y δ, c'est-à-dire, comme le quarré A δ au rectangle N δ Y: Mais le rectangle N δ Y est égal au rectangle ε δ β (comme nous le démontrerons cy-dessous;) Et partant le quarré A δ sera au rectangle ε δ β, comme le quarré T Y, c'est-à-dire, le rectangle T Y H, est au quarré ε Y, c'est-à-dire, au rectangle ε Y β. Mais la ligne A δ est parallele au diametre T H, & partant ordonnée au diametre ε β; Donc le point A sera dans l'Ellipse, dont T H & ε β sont diametres de même conjugaison.

Par le même discours nous dirons que le rectangle ζY S étant au rectangle M Y P en raison composée des lignes ζY à Y M, c'est-à-dire, B P à P M, & de S Y ou B P à Y P; Et le rectangle M Y P étant égal au quarré Y β (comme nous le démontrerons cy-dessous;) le rectangle ζY S, c'est-à-dire, le quarré H Y sera au rectangle M Y P, c'est-à-dire, au quarré Y β, en raison composée des lignes B P à P M, & B P à Y P, c'est-à-dire, comme le quarré B P est au rectangle M P Y : Mais le rectangle M P Y est égal au rectangle ε P β (ainsi que nous le démontrerons ci-dessous;) Et par conséquent le quarré B P sera au rectangle ε P β comme le quarré H Y, c'est-à-dire, le rectangle H Y T est au quarré Y β, c'est-à-dire, au rectangle ε Y β. Mais il a été démontré ci-dessus, que le quarré A δ étoit au rectangle ε δ β, comme le même rectangle H Y T est au rectangle ε Y β; Et partant le quarré A δ sera au rectangle ε δ β, comme le quarré B P au rectangle ε P β. Et parce que B P est

parallele

parallele à A δ, c'est-à-dire, au diamétre T H, elle sera ordonnée au diamétre $\epsilon\beta$; Et par conséquent le point B sera aussi dans l'Ellipse, dont les lignes T H & $\epsilon\beta$ sont diamétres de même conjugaison.

Je dis de plus, que les lignes A C, B D & E F toucheront la même Ellipse aux points A, B & H; ce qui se démontre en cette maniere. D'autant que la ligne E H est tirée au sommet du diametre T H parallele à l'autre diametre $\epsilon\beta$, elle touchera l'Ellipse en H par la 6. du 2. des Coniques d'Apollonius. De plus, la ligne A ψ étant tirée du point A dans l'Ellipse, & parallele au diametre $\epsilon\beta$, & coupant l'autre diametre T H au point ψ, de telle sorte que la ligne $\chi\psi$ est moyenne Harmonique entre les deux Hχ & χT; la ligne A C χ touchera l'Ellipse susdite au point A par la 34. du 1. des Coniques. Et par la même proposition la ligne D B ζ la touchera en B, d'où la ligne B S est tirée parallele à $\epsilon\beta$, & de telle sorte, que ζ S est moyenne Harmonique entre les deux T ζ & ζ H.

Nous avons donc trouvé le point Y & les deux lignes H T & $\epsilon\beta$ pour centre, & diametres de même conjugaison d'une Ellipse, qui touchera les trois lignes A C, B D, & E F, aux points A, B & H. Ce qu'il falloit faire.

Il faut maintenant faire voir, ainsi que nous l'avons promis ci-dessus, que les rectangles N δ Y & $\epsilon\delta\beta$ sont égaux, aussi bien que les rectangles M P Y & β P ϵ; & que le rectangle M Y P est égal au quarré Yβ ou Yϵ; ce que je fais premierement pour les rectangles N δY, $\epsilon\delta\beta$ en cette maniere. D'autant que le rectangle N Y δ est égal par la construction au quarré ϵY, si l'on ôte de l'un & de l'autre le même quarré δY, le rectangle N δY restera d'une part, & le rectangle $\epsilon\delta\beta$ de l'autre, qui seront par conséquent égaux.

Pour la démonstration du reste, il faut mener la ligne V X, & la continüer de part & d'autre, jusqu'a ce qu'elle rencontre la ligne E I au point 9, & la ligne MN prolon-

gée au point 8. Il faut de plus continüer les lignes H B & H A qui rencontrent la même M N prolongée en 7 & 6, & faire I θ égale a I F, puis raisonner en cette sorte. D'autant que A V est égal a V H & B X a X H ; la ligne A H sera a V H comme B H a X H ; & partant V X sera parallele a A B ; & I H sera a H 9, comme B H a H X. Mais B H est double de H X, donc I H sera aussi double de H 9. Derechef E H étant a H F comme E I a I F, en composant, permutant, & changeant E θ sera a E F comme I F est a H F. De plus, E H étant a H F comme E I a I F, en permutant & changeant E I sera a E H comme I F a H F ; Et partant E I est à E H comme E θ a E F, & par conversion de raison E I sera a I H comme E θ a F θ, & en divisant E H a I H comme E F a θ F ; Et partant E H a la moitié de I H, c'est-a-dire, H 9, comme E F a la moitié de θ F ; c'est-a-dire, I F, & en composant E 9 a H 9 comme E I a I F. Mais comme E I est a I F, ainsi E H a H F ; Donc E 9 sera a H 9 comme E H est a H F, & en permutant, & par conversion de raison, E 9 sera a H 9 comme H 9 a F 9.

Or parce que dans les triangles semblables E V 9, Y V 8 comme E 9 est a H 9, ainsi Y 8 est a 8 6, & dans les triangles semblables a H X 9, 7 X 8, comme H 9 est a F 9, ainsi 7 8 est a Y 8 ; il s'ensuit que la ligne 7 8 est a Y 8 comme Y 8 a 8 6, & en la même raison que E 9 a H 9 ; Mais comme 7 8 est a Y 8, ainsi 7 Y est a Y 6, & comme E 9 a H 9, ainsi E H ou son égale 2 Y est a H F, ou son égale Y R ; il s'ensuit donc que 7 Y est a Y 6 comme 2 Y est a Y R, & partant que le rectangle des extrêmes 7 Y R est égal au rectangle des moyennes 6 Y 2.

Maintenant, parce que ζ Y est a H Y comme H Y est a S Y, par conversion de raison ζ Y sera a ζ H comme Y H a H S ; Mais comme ζ Y est a ζ H, ainsi M Y est a H F ou a son égale Y R ; & comme Y H est à H S, ainsi 7 Y est à B S ou à son égale Y P ; Donc M Y sera à Y R comme 7 Y à Y P ; & partant le rectangle des extrêmes M Y P est égal au rectangle des moyennes 7 Y R.

De plus, parce que χ Y eſt à H Y comme H Y à Y ψ, & que χ Y eſt à H Y comme χ N eſt à N E, & Y N à N 2; il s'enſuit que Y N eſt à N 2 comme H Y eſt à Y ψ, & Y N à Y 2 comme H Y à H ψ. Mais H Y eſt à H ψ comme 6 Y eſt à A ψ, ou à ſon égale δ Y; Donc Y N ſera à Y 2 comme 6 Y eſt à δ Y, & le rectangle des extrêmes N Y δ ſera égal au rectangle des moyennes 6 Y 2.

Et par conſéquent le rectangle M Y P ſera au rectangle 7 Y R comme le rectangle N Y δ au rectangle 6 Y 2, & en permutant M Y P ſera à N Y δ comme 7 Y R à 6 Y 2. Mais il a été démontré ci-deſſus que les rectangles 7 Y R & 6 Y 2 ſont égaux; Partant les rectangles M Y P & N Y δ ſeront auſſi égaux. Mais le quarré ε Y, ou ſon égal β Y eſt égal au rectangle N Y δ par la conſtruction; il ſera donc auſſi égal au rectangle M Y P.

Et ſi l'on ôte de l'un & de l'autre le commun quarré de Y P, il reſtera le rectangle M P Y égal au rectangle ε P β. Qui eſt tout ce que nous devions démontrer.

Le cercle pourroit auſſi ſervir à la ſolution de ce Problême, ſi les deux lignes A G & B G étant égales auſſi-bien que les trois A Y, B Y, & H Y, celles-ci ſe trouvoient auſſi perpendiculaires aux lignes A C, B D, & E F, chacune à la ſienne.

PROBLEME NEUVIE'ME.

Enfin, ſi les pieds droits A C & B D ne ſont point paralleles, mais en ſurplomb (comme à la 2. Figure de la 6. Planche, & aux Figures de la 7. Planche) en ſorte qu'étant prolongez, ils ſe rencontrent au-deſſus, comme en G de la part de A & B; & ſi la ligne E F, qui détermine la hauteur de l'arc à décrire, n'eſt point parallele à la rampe A B, mais que l'une & l'autre étant prolongées, ſe rencontrent, comme en I. *Fig. II. de la VI. Planche. Fig. I. & II. de la VII. Planche.*

Il y a en cette propoſition trois Cas à conſiderer, chacun deſquels demande une ſection Conique particuliere

pour ſa ſolution ; car ou la raiſon de la ligne E I à I F ſera la même que celle de G F à F B, ou elle ſera moindre, ou elle ſera plus grande. Au premier Cas (comme en la 2. Figure) il faut une Parabole. Au ſecond Cas (comme en la 3. Figure) il faut une Ellipſe. Au troiſiéme Cas (comme en la 4. Figure) il faut une Hyperbole. Et pour les traiter avec ordre.

Premier Cas du neuviéme Problème.

Figure I. de la VII. Planche.

Soit (comme en la 1. Figure de la 7. Planche) la ligne E I à la ligne I F, comme la ligne G F à F B ; & après avoir coupé A B en deux également en Z, & mené G Z, qui diviſe E F en P, il faut du point F prendre F H égale à E P.

Je dis que la ſection qui touchera les deux lignes A C, B D aux points A & B, & la ligne E F, ſera une Parabole ; & que le point H ſera celui où elle touchera la ligne E F ; en ſorte que ſi nous coupons la ligne G Z en deux également en O, & qu'aux deux lignes O Z & A Z nous faſſions une troiſiéme proportionnelle Géometrique O R, que nous ménions du point O parallele à A B, la ligne O Z en ſera le diametre ſous l'angle G Z A, & O R ſera ſon paramétre ou diamétre contigu. Pour la démonſtration, il faut mener les lignes E L, H K, & F M paralleles à G Z, puis tirer les lignes A H Q & B H, qui rencontrent les lignes E L & M F prolongées en V, X, & Q, & mener V X & F K.

D'autant que H F eſt égale à E P, & que E L, H K, & F M ſont paralleles à G Z, les deux lignes L Z & K M seront auſſi égales ; & par conſéquent les deux L K & Z M, auſſi-bien que les deux E H & P F. Et parce que E I eſt à I F, ainſi que G F à F B ; & que comme E I eſt à I F, ainſi (dans le triangle E I L) E L eſt à F M ; & que comme G F à F B, ainſi (dans le triangle G B Z) la ligne Z M à M B : Il s'enſuit que E L ſera à F M, comme Z M à M B. Mais la raiſon de E L à F M eſt compoſée des raiſons de E L à A L, (c'eſt-

à-dire, G Z à A Z) A L à M B, & M B à F M (c'eſt-à-dire, B Z ou ſon égale A Z à G Z:) Donc la raiſon de Z M à M B ſera auſſi égale à la compoſée des raiſons de G Z à A Z, A L à M B, & A Z à G Z; c'eſt-à-dire (parce que les deux raiſons de G Z à A Z, & A Z à G Z ſe détruiſent) égale à la raiſon de A L à M B: Et par conſéquent la ligne A L ſera égale à Z M, c'eſt-à-dire, à L K; mais comme A L eſt à L K, ainſi A V eſt à V H: Donc A V ſera auſſi égale à V H.

Maintenant, puiſque A L eſt égale à L K, & L Z à K M; A Z ou B Z ſera égale à L M; & ôtant le commun Z M, les deux Z L & M B ſeront égales; mais Z L eſt égale à K M: Donc les deux M B & K M ſeront auſſi égales: Et partant dans le triangle H B K la ligne H X ſera égale à X B, & H S à S K; & les deux triangles H K A, Q X V ſeront ſemblables; & H K ſera à A K, comme Q X à V X; & en permutant H K ſera à Q X comme A K à V X, ou à ſon égale L M. Ce qu'il faut remarquer.

De plus, G F étant à F B comme Z M à M B, c'eſt-à-dire, comme L K à K M, ou comme E H à H F; & E I étant à I F comme G F à F B, il s'enſuit que E H eſt à H F comme E I à I F: Et partant la ligne I H eſt moyenne Harmonique entre les deux E I & I F.

Davantage, comme G F eſt à F B, ainſi Z M à M B, c'eſt-à-dire, L K à K M; ou prenant leurs doubles, comme A K à K B, il s'enſuit que A K eſt à K B, comme G F à F B; & partant que la ligne F K eſt parallele à A E; & par conſéquent les triangles G P E, K H F ſeront ſemblables, & leurs baſes P E, H F étant égales, les côtez G P & H K ſeront égaux, auſſi-bien que E G & F K; & A E ſera à E G, comme à K F, c'eſt-à-dire, comme E I à I F, ou G F à F B, ou E H à H F.

Voilà donc trois lignes A G, B G, & E F, diviſées en raiſons égales aux points E F, & H: elles ſeront donc par la 41. du 3. des Coniques d'Apollonius, trois contingentes aux points A, B, & H, d'une même Parabole.

Or pour faire voir que la Parabole, dont les diamétres ſont O Z & O R, eſt celle que ces trois lignes touchent aux trois points ſuſdits, je raiſonne en cette ſorte. La ligne O R étant troiſiéme proportionnelle Géometrique aux deux O Z & A Z, le rectangle Z O R ſera égal au quarré A Z ou B Z; & partant les deux points A & B ſeront dans la Parabole.

Mais pour montrer que le point H y eſt auſſi, je fais ainſi. La ligne F K étant parallele à A E dans le triangle A I E, A I ſera à I K, comme E I à I F, c'eſt-à-dire, dans le triangle E I L, comme L I a I M; & en diviſant & permutant A K ſera a L M, comme K I a I M, c'eſt-a-dire, (dans le triangle H I K) comme K H eſt a F M. Mais nous avons fait remarquer ci-deſſus que H K étoit a Q X, comme la même A K a L M: Donc la ligne H K aura même raiſon aux deux lignes Q X & F M; & partant elles ſeront égales: & ôtant F X commun, les reſtes Q F & X M, ou V L, ſeront égaux; & par conſéquent E V aura même raiſon a Q F & a V L. Mais E V eſt a Q F, comme E H eſt a H F, ou L K a K M, ou A L a L Z: Donc E V ſera a V L, comme A L a L Z; & en changeant & compoſant V L ſera a E L, comme L Z a A Z, ou comme le rectangle Z L A au rectangle Z A L (en prenant A L pour commune hauteur.) Mais E L eſt a G Z, comme A L a A Z, c'eſt-a-dire, (en prenant A Z pour commune hauteur) comme le rectangle Z A L au quarré A Z: Donc par égalité V L ſera a G Z, comme le rectangle Z L A, ou ſon egal L K M, au quarré A Z ou B Z; & le double de V L, c'eſt-a-dire, H K a G Z, comme le double du rectangle L K M, c'eſt-a-dire, L K B au quarrè B Z; & H K a la moitié de G Z, c'eſt-a-dire O Z, comme le double du rectangle L K B, c'eſt-a-dire, le rectangle A K B au quarré B Z. Mais H K eſt parallele au diamétre O Z: Donc le point H ſera dans la Parabole, dont les diamétres ſont O Z & O R.

Il eſt notoire que le ſommet étant O, où G Z eſt diviſée

en deux également, les deux lignes A G & B G toucheront la même Parabole en A & B. Et pour démontrer qu'elle touchera aussi E F en H, je raisonne en cette maniere, après avoir tiré la ligne H N parallele a A B, laquelle sera par conséquent ordonnée au diamétre O Z. Parce que F K est parallele a A E, E I est a I F comme A I a I K, & comme E H a H F, c'est-a-dire, L K ou Z M a K M; A I sera donc a I K comme Z M a K M : & en divisant A K a I K comme K Z a K M : Et partant le rectangle des moyennes I K Z sera égal au rectangle des extrêmes A K M; & deux fois le rectangle I K Z égal au rectangle A K B; & ajoûtant le quarré Z K, deux rectangles I K Z avec le quarré Z K, (c'est-a-dire, le rectangle I K Z avec le rectangle I Z K) égaux au rectangle A K B avec le quarré Z K, (c'est-a-dire, au quarré B Z :) Et partant le rectangle I K Z sera égal au quarré B Z, moins le rectangle I Z K; & le rectangle I Z K aura même raison au rectangle I K Z qu'au quarré B Z, moins le rectangle I Z K. Mais le rectangle I Z K est au rectangle I K Z comme I Z a I K, c'est-a-dire, comme P Z a H K : Donc le rectangle I Z K sera au quarré B Z, moins le rectangle I Z K, comme P Z est a H K. Mais il a été démontré ci-dessus, que P G étoit égale a H K; donc P Z sera a P G comme le rectangle I Z K est au quarré B Z, moins le rectangle I Z K; & en changeant & composant G Z sera a P Z, comme le quarré B Z au rectangle I Z K. Mais P Z est a P N, comme I Z a H N ou Z K, c'est-a-dire, comme le rectangle I Z K au quarré K Z, ou H N : Donc par égalité G Z sera a P N, comme le quarré B Z est au quarré N H. Mais parce que N H est parallele a A B, & ordonnée a G Z, le quarré B Z est au quarré N H comme la ligne Z O a O N; il s'ensuit que G Z sera a P N comme Z O a O N; & en permutant G Z a Z O, comme P N a N O; mais G Z est double de O Z: donc P N sera aussi double de N O; & par conséquent la ligne E F touchera la Parabole susdite au point H. Ce qu'il falloit démontrer.

Second cas du neuviéme Problème.

Fig. II. de la VI. Planche.

Si les pieds droits A C & B D étans en surplomb, se rencontrent de la part de A & B au point G, (comme en la 2. Fig. de la 6. Planche,) & que la ligne E F, qui détermine la hauteur de l'arc à décrire étant prolongée, rencontre aussi la ligne de la rampe A B, comme en I, en telle sorte que la raison de la ligne E I à I F soit moindre que celle de la ligne GF à F B.

Après avoir divisé la ligne A B en deux également en Z, & mené indéfiniment la ligne G Z, il faut trouver I H moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux E I & I F; & après avoir mené les lignes H B & H A, il en faut diviser l'une comme H B en deux également en X, & mener F X, qui rencontrera G Z continuée de la part de Z, comme en Y, ainsi qu'il se verra ci-dessous, d'où il faut mener la ligne E Y.

Je dis que la section qui touchera les deux lignes A C & B D en A & B, & la ligne E F, sera une Ellipse, dont Y sera le centre, & le point H celui où elle touchera la ligne E F. Et que si l'on méne indéfiniment la ligne H Y sur laquelle on prenne Y T égale à Y H, & qu'après avoir tiré la ligne N Y M par le point Y parallele à E F, sur laquelle des points A & B tombent les lignes A δ & B P paralleles à H Y, l'on prenne ε Y moyenne proportionnelle Géometrique entre les deux N Y & Y δ, & que l'on fasse Y ϵ égale a Y ε; les deux droites H T, & $\varepsilon\epsilon$ seront les diamétres de même conjugaison de la susdite Ellipse.

Pour la démonstration, il faut premierement mener des points E, H, & F sur la ligne A B, les lignes E μ, H φ & F η paralleles a G Z, & raisonner en cette maniere. La ligne E μ est a F η en raison composée des raisons de E μ a A μ, (c'est-a-dire, G Z a A Z) A μ a B η, & B η a F η (c'est-a-dire, B Z ou A Z a G Z:) Mais les raisons de G Z a A Z, & A Z a G Z se détruisent, & par conséquent E μ sera à

F η,

Fη, comme Aμ a Bη. De plus, parce que la ligne H I eſt moyenne Harmonique entre les deux E I & I F, comme E I eſt a I F, ainſi E H eſt a H F, c'eſt-a-dire, $\mu\varphi$ a $\varphi\eta$, & comme E I a I F; ainſi Eμ a Fη, c'eſt-a-dire, Aμ a Bη; donc $\mu\varphi$ eſt a $\varphi\eta$, comme Aμ a Bη; & en compoſant Aφ a φB, comme Aμ a Bη, c'eſt-a-dire, comme E I a I F. Mais la raiſon de E I a I F eſt par l'hypotheſe moindre que celle de G F a F B, c'eſt-a-dire, Zη a Bη: Donc la raiſon de Aφ a φB ſera moindre que celle de Zη a Bη, & en compoſant & permutant la raiſon A B a Z B moindre que celle de φB a Bη; mais A B eſt double de Z B: Donc φB ſera plus grande que le double de Bη, & partant $\varphi\eta$ plus grande que Bη; & dans le triangle HφB, la ligne Hτ ſera plus grande que Bτ; mais B X eſt égale a H X: donc la ligne B X ſera plus grande que la même Bτ, & l'angle B F X plus grand que l'angle B Fτ, c'eſt-a-dire, B G Z; Et partant la ligne F X étant continuée, rencontrera la ligne G Z continuée de la part de Z comme au point Y.

Maintenant, aprés avoir mené par le point Y la ligne K Y Q parallele a A B, & tiré du même point les deux lignes Yν & Yλ perpendiculaires aux deux B D, A C, je dis que la ligne K Q étant parallele a A B, elle ſera diviſée en Y comme A B l'eſt en Z, c'eſt-a-dire, en deux également: Et partant les deux triangles G Y K, G Y Q ſeront égaux; & par conſéquent ils auront leurs côtez en raiſon réciproque de leurs hauteurs, c'eſt-a-dire, que le côté K G du triangle G K Y ſera au côté Q G du triangle G Q Y, comme la ligne Yν hauteur du triangle G Q Y a la ligne Yλ hauteur du triangle G K Y: Mais comme K G eſt a Q G, ainſi A G eſt a B G: Donc A G ſera a B G comme Yν a Yλ.

De plus, aprés avoir mené les deux lignes A Y & B Y, d'autant que les deux triangles A Y E, B Y F ſont entr'eux en raiſon compoſée de leurs côtez & de leurs hauteurs, la raiſon du triangle A Y E au triangle B Y F ſera compo-

ſée des raiſons des lignes A E à B F, & Y λ à Y ν, c'eſt-à dire, B G à A G. Mais la raiſon de A E à B F eſt encore composée de celle des lignes A E à E μ (c'eſt-à-dire, A G à G Z) E μ à F η, & F η à B F, (c'eſt-à-dire, G Z à G B;) la raiſon donc du triangle A Y E au triangle B Y F ſera composée des raiſons de A G à G Z, E μ à F η, G Z à G B, & G B à A G; mais les raiſons de A G à G Z, G Z à G B, & G B à A G ſe détruiſent. Il ne reſte donc plus que la raiſon de E μ à F η qui ſoit égale à celle du triangle A Y E au triangle B Y F. Mais comme E μ eſt à F η, ainſi E I à I F, ou E H à H F, ou le triangle E Y H au triangle F Y H: Donc le triangle A Y E ſera au triangle B Y F, comme le triangle E Y H à H Y F; & en permutant, le triangle A Y E au triangle E Y H, comme le triangle B Y F au triangle H Y F. Mais les deux triangles A Y E, E Y H ayant une baſe commune E Y, ſont entr'eux comme les lignes A V & V H; & les deux triangles B Y F, H Y F ayant une baſe commune F Y, ſont auſſi comme B X à X H; il s'enſuit que A V eſt à V H comme B X à X H. Mais B X eſt égale à X H par la conſtruction: Donc A V ſera auſſi égale à V H.

Voilà donc trois lignes A B, A H, & B H qui ſont diviſées également en deux aux points Z, V, & X, par les lignes G Z, E V, & F X, qui partent des points G, E, & F, où les lignes A C, B D, & E F ſe rencontrent, & qui ſe joignent toutes en un même point Y, au-deſſous du point G vers Z. Et partant ce point Y ſera le centre d'une Ellipſe, qui touchera les trois lignes ſuſdites A C, B D, & E F, aux points A, B, & H.

Il faut maintenant faire voir que les deux lignes H Y T, ς Y ϐ en ſont les diamétres de même conjugaiſon. Et pour cet effet, il faut continuer la ligne H Y T de part & d'autre, jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne A C prolongée en χ, & B D en ζ; puis du point E mener la ligne E 5 parallele à A H, & qui coupe la ligne H Y prolongée en 5, d'où par le point V il en faut mener une autre 5 V 3 qui coupe

la ligne A C en 3, & joindre les points Y & 3. Semblablement du point F il faut mener F L parallele à B H, & qui coupe la même Y H prolongée en L, d'où par le point X il faut tirer une ligne L X O, qui rencontre B D prolongée en O, & joindre les points Y & O, & enfin tirer les lignes A ↓ & B S paralleles à E F, & continuer M N de part & d'autre, afin qu'elle coupe les lignes H B, H A prolongées aux points 7 & 6, & tirer la ligne V X indéfiniment de part & d'autre, afin qu'elle coupe E I au point 9 & M N au point 8.

Cela fait, je raisonne en cette maniere. D'autant que L F est parallele à B H, & B X est égale à H X, la ligne L F sera à H X, c'est-à-dire, L Y à Y H, comme la même L F à B X, c'est-à-dire, comme L O à O X; & par conversion de raison L Y sera à L H comme L O à L X; & partant dans le triangle L Y O, la base O Y sera parallele à la ligne H X ou L F: Donc au triangle Y ζ O, la ligne Y O sera à L F comme ζY à ζ L; & aux triangles semblables Y X O, L X F, la même Y O sera à la même L F comme Y X à X F, ou comme Y H à H L: Et partant ζY sera à ζ L comme Y H à H L; & en permutant, ζY à H Y comme ζL à H L; Mais ζY est à H Y comme ζ M à M F, & ζ L à H L comme ζF à F B: Donc ζM est à M F comme ζF à F B; & en permutant, & par conversion de raison ζ M est à M F comme M F à M B. Mais comme ζM est à M F, ainsi ζY est à H Y, & M F est à M B, ainsi H Y à Y S: Donc ζY est à H Y comme H Y à Y S, c'est-à-dire, que H Y est moyenne Géometrique entre les deux ζY & Y S: Mais la ligne Y T est égale à Y H par la construction; & partant la toute ζT est divisée Harmoniquement aux points H & S, & la ligne ζS est moyenne Harmonique entre les deux ζT ζH, & la ligne ζY moyenne Arithmétique entre les mêmes.

Par même raisonnement, & par le moyen de la ligne E 5 nous démontrerons que la ligne H Y est aussi moyenne Géometrique entre les deux ϰY & Y ↓: & que la toute

T χ est aussi divisée Harmoniquement aux points H & ψ, en sorte que la ligne χ ψ est moyenne Harmonique entre les deux T χ & H χ, & la ligne χ Y moyenne Arithmétique entre les mêmes.

D'où il appert que les rectangles χ Y ψ & ζ Y S étant chacun égal au quarré H Y, ils seront aussi égaux entre eux, & ils auront l'un & l'autre même raison au quarré ε Y, ou son égal Y ϵ. Mais la raison du rectangle χ Y ψ au quarré ε Y, ou son égal N Y δ, est composée des raisons des lignes χ Y à N Y (c'est-à-dire, A δ a N δ) & de Y ψ, ou son égale A δ a Y δ, lesquelles font ensemble la raison du quarré A δ au rectangle N δ Y: Donc le rectangle χ Y ψ, ou le quarré H Y sera au quarré ε Y, comme le quarré A δ au rectangle N δ Y: Or est-il que le rectangle N δ Y est égal au rectangle ε δ ϵ, comme il a été tant de fois démontré ci-dessus: Et partant le quarré A δ sera au rectangle ε δ ϵ, comme le quarré H Y au quarré ε Y, ou prenant leurs quadruples, comme le quarré du diamétre H T au quarré du diamétre ε ϵ. Mais la ligne A δ étant paralléle au diamétre H Y, est ordonnée a l'autre diamétre ε ϵ: Donc le point A sera dans l'Ellipse, dont les deux lignes H T, & ε β sont les diamétres de même conjugaison.

Il est notoire que le point H étant au bout d'un desdits diamétres, il est aussi dans la même Ellipse. Mais pour prouver que le point B s'y trouve pareillement, il faut discourir en cette maniere. Le rectangle ζ Y S est au rectangle M Y P en raison composée des raisons de ζ Y a Y M, c'est-a-dire, B P a P M, & de Y S, ou son égale B P a Y P, lesquelles composent la raison du quarré B P au rectangle M P Y: Et partant le rectangle ζ Y S, ou son égal le quarré H Y sera au rectangle M Y P, ou son égal le quarré Y ϵ, ou Y ε (comme nous le démontrerons ci-dessous) comme le quarré B P est au rectangle M P Y, ou a son égal ϵ P ε, (comme nous le démontrerons aussi ci-dessous,) c'est-a-dire, que le quarré B P sera au rectangle ϵ P ε comme le

quarré H Y au quarré Y ε; ou prenant leurs quadruples, comme le quarré T H au quarré ε ϵ: Mais P B étant parallelle au diametre T H, est ordonnée a l'autre diamétre ε ϵ: Et partant le point B est dans l'Ellipse, dont les lignes H T & ε ϵ sont diamétres de même conjugaison.

Je dis de plus, que cette Ellipse touchera les lignes A C, B D, & E F aux mêmes points A, B, & H: ce qui est premierement constant par la 6. du 2. des Coniques au regard de la ligne E F, qui est menée au bout H du diamétre T H parallele a l'autre diamétre ε ϵ. Mais pour les deux autres, il faut raisonner en cette sorte. D'autant que la ligne B S est parallele a ε ϵ, elle sera ordonnée a T H; mais elle divise la ligne T ζ de telle sorte en S, que la ligne ζ S soit moyenne Harmonique entre les deux ζ T & ζ H. Il s'ensuit par la 34. du 1. des Coniques, que la ligne B D touchera en B la susdite Ellipse.

De plus, par la même proposition, il appert que la ligne A C la touche en A, parce que l'ordonnée A ψ coupe T χ en ψ, de telle sorte que χ ψ soit moyenne Harmonique entre les deux χ T & χ H.

Nous avons donc trouvé le point Y pour centre, & les deux lignes H T & ε ϵ pour diamétres de même conjugaison d'une Ellipse, laquelle touche les trois lignes A C, B D, & E F aux points A, B, & H. Ce qu'il falloit faire.

Il ne reste plus qu'a démontrer (comme nous l'avons promis) que le rectangle M Y P est égal au quarré Y ϵ ou Y ε, c'est-a dire, au rectangle N Y δ, & le rectangle M P Y égal au rectangle ε P ϵ; ce qui se fait en cette maniere, aprés avoir fait I θ égale a I F. Puisque A V est égale a V H, comme B X égale a X H; la ligne V X 9 sera parallele a A B, & H 9 égale a I 9. Et puisque E H est a H F comme E I a I F, en composant, & permutant, E θ sera a E F comme I F a H F. Mais comme I F a H F, ainsi E I a E H: Donc E θ sera a E F, comme E I a E H; & en divisant, prenant la moitié des antécedens, composant, & par conversion

de raison, E I sera à I F, c'est à-dire, E H à H F comme E 9 & à H 9 ; & en permutant, changeant, & par conversion de raison E 9 sera à H 9 comme H 9 à F 9.

Or dans les triangles semblables H X 9 & 7 X 8, comme H 9 est à F 9, ainsi 7 8 est à Y 8 : Et dans les triangles semblables E V 9, Y V 8, comme E 9 est à H 9, ainsi Y 8 est à 6 8 : Donc 78 sera à Y 8 comme Y 8 à 8 6, & en la même raison de E 9 à H 9. Mais comme E 9 à H 9, ainsi E H à H F, c'est-à-dire, 2 Y à Y R ; & comme 78 à Y 8, ainsi 7 Y à Y 6 : Donc 7 Y est à Y 6 comme 2 Y est à Y R ; & le rectangle des extrêmes 7 Y R est égal au rectangle des moyennes 6 Y 2.

De plus, parce que ζY est à H Y comme H Y à S Y, par conversion de raison ζY sera à ζH comme H Y à H S : Mais comme ζ Y est à ζH, ainsi M Y est à H F, ou Y R ; & comme H Y à H S, ainsi 7 Y est à B S ou Y P : Donc M Y sera à Y R comme 7 Y à Y P ; & le rectangle des moyennes 7 Y R est égal à celui des extrêmes M Y P.

Par le même raisonnement nous ferons voir que le rectangle 6 Y 2 est égal au rectangle N Y δ. Et partant le rectangle 7 Y R est au rectangle M Y P comme 6 Y 2 à N Y δ ; & en permutant 7 Y R étant égal à 6 Y 2, le rectangle M Y P sera aussi égal au rectangle N Y δ, c'est-à-dire, par la construction, au quarré ε Y ou β Y. Et partant si de l'un & de l'autre on ôte le commun quarré Y P, le rectangle M P Y demeurera égal au rectangle ε P €. Qui est ce qu'il falloit démontrer.

Le cercle pourroit résoudre ce cas de ce Problême, ainsi que nous avons dit ci-dessus du 8e, si les deux lignes A G & B G se trouvant égales aussi-bien que les trois A Y, B Y, & H Y ; ces trois lignes se trouvoient encore perpendiculaires aux trois A C, B D, & E F, chacune à la sienne.

Troisiéme Cas du neuviéme Problême.

Enfin, si les pieds droits A C & B D étant en surplomb,

ſe rencontrent, étant prolongez de la part de A & B, au point G (comme en la 2. Figure de la 7. Planche) & que la ligne E F, qui détermine la hauteur de l'Arc à décrire, rencontre auſſi la ligne de la rampe A B, comme en I, de telle ſorte que la raiſon de la ligne E I à I F ſoit plus grande que celle de F G à F B. Apres avoir diviſé la ligne A B en deux également en Z, & mené la ligne G Z indéfiniment de la part de G; il faut trouver I H moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux E I & I F; & après avoir mené les lignes H B, H A, il en faut diviſer l'une, comme H B, en deux également en X, & mener F X indéfiniment de la part de F, qui rencontrera G Z au-deſſus du point G comme en Y (ainſi qu'il ſe verra ci-deſſous) d'où il faut mener Y E V. *Fig. II. de la VII. Planche.*

Je dis que la ſection qui touchera les deux lignes A C & B D aux points A & B, & la ligne E F; ſera une Hyperbole, dont le centre ſera au point Y; & le point H celui où elle touchera la ligne E F; & que ſi l'on méne indéfiniment la ligne H Y, ſur laquelle on prenne Y T égale à Y H; & qu'après avoir tiré par le point Y la ligne M N parallele à E F, ſur laquelle des points A & B tombent les lignes A δ & B P paralleles à H Y; l'on prenne ε Y moyenne proportionnelle Géométrique entre les deux N Y & Y δ, & que l'on faſſe Y ζ égale à ε Y: les deux droites H T & $\varepsilon\zeta$ ſeront les diamétres de même conjugaiſon de la ſuſdite Hyperbole.

La démonſtration s'en fait en la même maniere, & preſque aux mêmes termes que celle de la précedente propoſition pour l'Ellipſe; & pour ce ſujet, il faut premierement méner des points E, H, & F ſur la ligne A B les lignes E μ, H φ, & F η paralleles à G Z, & argumenter en cette ſorte. La ligne E μ eſt à F η en raiſon compoſée de celles de E μ à A μ, (ou G Z à A Z,) A μ à B η, & B η à F η, (ou B Z, ou A Z à G Z.) Mais la raiſon de G Z à A Z détruit celle de A Z à G Z; & partant la raiſon de E μ à F η ſera égale à celle

de A μ à B η. De plus, parce que I H est moyenne Harmonique entre les deux E I & I F; la ligne E H sera à H F, ou $\mu\phi$ à $\phi\eta$, comme E I à I F, ou E μ à F η, ou A μ à B η: Donc A μ sera à B η comme $\mu\phi$ à $\phi\eta$; & la toute A ϕ à la toute ϕ B comme la partie $\mu\phi$ à la partie $\phi\eta$, c'est à-dire, comme E I à I F. Mais la raison de E I à I F est par l'hypothese plus grande qne celle de GF à F B, ou Z η à B η: Donc la raison de A ϕ à B ϕ sera plus grande que celle de Z η à B η; & en composant & permutant, celle de A B à Z B plus grande que celle de ϕ B à B η. Mais A B est double de Z B: Donc ϕ B sera moindre que double de B η; c'est-à-dire, que $\phi\eta$ sera moindre que η B; & dans le triangle H ϕ B, H τ sera moindre que τ B; & partant τ B plus grande que B X, & l'angle B F τ, ou B G Z plus grand que l'angle B F X, ou G F Y: Et partant la ligne X F rencontrera la ligne Z G continuée au-dessus de G, comme au point Y.

Maintenant, après avoir mené par le point Y la ligne K Y Q parallele à A B, & tiré du même point les deux lignes Y ν & Y λ perpendiculaires aux deux lignes A C G, & B D G prolongées; je dis que la ligne K Q étant parallele à A B, elle sera divisée en Y en la même raison que A B l'est en Z, c'est-à-dire, en deux également: Et partant les triangles G Y K, G Y Q seront égaux; & ils auront par conséquent les côtez réciproques de leurs hauteurs, c'est-à-dire, que le côté G K du triangle G K Y sera au côté G Q du triangle G Q Y, comme Y ν hauteur de G Q Y à Y λ hauteur de G K Y; mais comme K G est à G Q, ainsi A G est à G B: Donc A G est à G B comme Y ν est à Y λ.

De plus, après avoir mené les deux lignes A Y & B Y; d'autant que les deux triangles A Y E, B Y F sont entr'eux en raison composée de celles de leurs côtez, & de leurs hauteurs; le triangle A Y E sera à B Y F en raison composée du côté A E au côté B F, & de la hauteur Y λ à la hauteur Y ν, c'est-à-dire, de la ligne B G à A G. Mais la raison de A E à B F est encore composée de celles de A E à E μ,

(ou

(ou A G à G Z,) Eμ à Fη, & Fη à F B, (ou G Z à G B:) Donc la raiſon du triangle A E Y au triangle B F Y ſera compoſée de celles de A G à G Z, Eμ à Fη, G Z à G B, & G B à A G. Mais les raiſons de A G à G Z, G Z à G B, & G B à A G ſe détruiſent: Donc le triangle A E Y ſera à B F Y comme la ligne Eμ eſt à Fη, ou comme E I à I F, ou E H à H F, ou enfin comme le triangle E Y H au triangle F Y H; & en permutant le triangle A E Y ſera au triangle H E Y comme le triangle B F Y au triangle F Y H. Mais parce que les deux triangles A V Y, V H Y ſont entr'eux comme A V eſt à V H, auſſi-bien que les deux triangles A E V, E V H, les reſtes, ſçavoir les triangles A E Y, E H Y ſeront auſſi entr'eux comme A V eſt à V H. Par même raiſon nous montrerons que le triangle B F Y eſt au triangle F H Y comme B X eſt à X H: Donc A V ſera à V H comme B X eſt à X H; mais celles-ci ſont égales par la conſtruction, & partant A V ſera auſſi égale à V H.

Voilà donc trois lignes A B, A H, & B H, qui ſont diviſées en deux également aux points Z, V, & X par les lignes G Z, E V, F X, qui partant des points G, E, & F, où les lignes A C, B D, & E F ſe rencontrent, ſe joignent toutes au-deſſus de G en un même point Y: Donc le point Y ſera le centre d'une Hyperbole qui touchera les ſuſdites trois lignes A C, B D, & E F aux points A, B, & H.

Il faut maintenant faire voir que les deux lignes H T & ε6 en ſont les diamétres de même conjugaiſon. Et pour ce ſujet il faut continuer la ligne Y H, qui rencontrera A C prolongée au point χ, & B D en ζ; puis du point F mener F L parallele à B H, & qui coupe Y H en L, par où du point X il faut mener la ligne X L, & la continuer juſqu'à ce qu'elle coupe B G prolongée en O, & joindre les points Y & O. En la même maniere du point E il faut mener E 5 parallele à A H, qui rencontre Y H en 5, par où du point V il faut tirer la ligne V 5, & la continuer juſqu'à ce qu'elle rencontre A G continuée au point 3, & joindre Y & 3; &

enfin mener A ψ, & B S paralleles à E F ou M N, & continuer M N de part & d'autre jusqu'à ce qu'elle coupe les lignes A H, B H prolongées aux points 6 & 7, & tirer la ligne V X, en sorte qu'elle coupe E I au point 9, & M N au point 8.

Cela fait, je raisonne en cette maniere. Parce que H X est égale à B X, la ligne L F aura même raison à l'une & l'autre; c'est-à-dire, qu'au triangle H Y X, la ligne L F sera à H X comme L Y à Y H; & au triangle X O B, L F sera à B X comme L O à O X; & partant L Y sera à Y H comme L O à O X; & en divisant & permutant, L Y à L O comme L H à L X: Donc les triangles O L Y, H L X seront semblables, & la base O Y parallele à H X ou L F. Et par conséquent aux triangles semblables O ζ Y, L ζ F, la ligne O Y est à L F comme Y ζ à ζ L; & dans les triangles semblables O X Y, L X F, la même O Y est à la même L F comme O X à X L; & partant ζ Y est à ζ L comme O X à X L, c'est-à-dire, comme Y H à H L; & en permutant, ζ Y est à Y H comme ζ L à H L; Mais comme ζ Y à Y H, ainsi ζ M à M F, & comme ζ L à H L, ainsi ζ F à F B: Donc ζ M est à M F, comme ζ F à F B; & en permutant, changeant, composant, & changeant ζ M sera à M F, (c'est-à-dire, ζ Y à Y H,) comme M F à M B, c'est-à-dire, Y H à Y S. Voilà donc la ligne Y H moyenne Géometrique entre les deux ζ Y & Y S; mais la ligne Y T a été prise égale à la même Y H: Donc la toute T S sera divisée Harmoniquement aux points H & ζ; & la ligne ζ S sera moyenne Harmonique entre les deux T S & S H; & S Y moyenne Arithmétique entre les mêmes.

Par même raisonnement, & par le moyen de la ligne E 5 nous démontrerons que la même Y H sera aussi moyenne Géométrique entre les deux χ Y & ψ Y; & que la toute T ψ est divisée Harmoniquement aux deux points H & χ, & la ligne ψ χ moyenne Harmonique entre les deux T ψ & ψ H; & ψ Y moyenne Arithmétique entre les mêmes.

D'où il appert que les rectangles χ Y ψ & ζ Y S étant chacun égal au quarré H Y, ils seront aussi egaux entre eux ; & le quarré H Y sera au quarré ε Y, ou à son egal le rectangle N Y δ, comme le rectangle χ Y ψ au même rectangle N Y δ. Mais la raison du rectangle χ Y ψ au rectangle N Y δ est composée de celles des lignes χ Y à N Y, c'est-à-dire, χ ψ à A ψ, & ψ Y à Y δ, ou à son egale A ψ ; qui composent la raison du rectangle χ Y ψ au quarré A ψ : Donc le quarré Y H sera au quarré ε Y, ou (prenant leurs quadruples,) le quarré du diamétre T H sera au quarré du diamétre ε β, comme le rectangle χ ψ Y au quarré A ψ. Mais le rectangle χ ψ Y est égal au rectangle T ψ H (comme nous le démontrerons ci-dessous.) Et partant le rectangle T ψ H est au quarré A ψ, comme le quarré T H au quarré ε β. Et comme la ligne A ψ est parallele à M N ou ε β, elle est ordonnée au diamétre T H : Et partant le point A est dans l'Hyperbole dont T H & ε β sont diamétres de même conjugaison.

Il est constant que le point H étant au bout d'un des diamétres susdits, il est aussi dans la même Hyperbole. Mais pour prouver que le point B s'y trouve aussi, il faut discourir de cette sorte. Le rectangle ζ Y S est au rectangle M Y P, en raison composée de celles des lignes ζ Y à M Y, (ou ζ S à B S,) & Y S à Y P, ou B S ; lesquelles composent aussi la raison du rectangle ζ S Y au quarré B S : Et partant le rectangle ζ Y S, ou son égal le quarré Y H sera au rectangle M Y P, ou son égal le quarré ε Y (comme nous le démontrerons ci-dessous,) comme le rectangle ζ S Y au quarré B S. Mais nous ferons aussi voir ci-dessous, que le rectangle ζ S Y est égal au rectangle T S H ; Et partant comme le quarré Y H au quarré ε Y, ou (prenant leurs quadruples) comme le quarré du diamétre T H au quarré du diamétre ε β, ainsi est le rectangle T S H au quarré B S : mais la même B S étant paralléle à ε β, est ordonnée à T H : Donc le point B est aussi dans l'Hyperbole, dont les deux

droites T H & ε β sont diamétres de même conjugaison.

Je dis de plus, que cette Hyperbole touchera les lignes A C, B D, & E F aux points A, B, & H. Ce qui est premierement constant pour le point H, par la 6. du 2. des Coniques, la ligne E F étant menée au bout d'un des diamétres H T, & parallele à l'autre ε β. Mais pour les deux autres points, je le démontre en cette maniere.

D'autant que la ligne A ψ ordonnée au diamétre T H, le coupe en ψ de telle sorte que χ ψ soit moyenne Harmonique entre les deux T ψ & H ψ; la ligne A C χ touchera la susdite Hyperbole au point A par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius. Et par la même proposition, & le même raisonnement, la ligne B D ζ touchera la même Hyperbole au point B, d'où la ligne B S est ordonnée au diamétre T H, & le coupe au point S, en telle sorte que la ligne ζ S soit moyenne Harmonique entre les deux T S & S H.

Nous avons donc trouvé le point Y pour centre, & les deux lignes T H, & ε β pour diamétres de même conjugaison d'une Hyberbole, qui touchera les trois lignes A C, B D, & E F aux points A, B, & H. Ce qu'il falloit faire.

Il faut maintenant démontrer que le rectangle χ ψ Y est égal au rectangle T ψ H, ce qui se fait ainsi. Parce que ψ Y est à Y H, ou T Y, comme T Y à Y χ; en composant, & par conversion de raison T ψ sera à ψ Y comme χ T à T Y, ou H Y; & en permutant, & par conversion de raison T ψ sera à ψ χ comme ψ Y à ψ H: Et partant le rectangle des moyennes χ ψ Y sera égal à celui des extrêmes T ψ H.

Par même raisonnement, on peut voir que le rectangle ζ S Y est aussi égal au rectangle T S H. De sorte qu'il ne reste plus qu'à montrer, que le rectangle M Y P est égal au quarré Y β, ou ε Y, c'est-à-dire, au rectangle N Y δ. Ce qui se fait en cette maniere. Parce qu'il a été démontré ci-dessus dans la précedente proposition, que la ligne E 9 étoit à H 9 comme H 9 est à F 9; & que dans les triangles semblables H X 9, 7 X 8, la ligne H 9 est à F 9 comme 7 8

eſt à 8 Y ; & dans les triangles ſemblables E V 9, Y V 8, la ligne E 9 eſt à H 9 comme 8 Y eſt à 8 6 : Il s'enſuit que 7 8 eſt à 8 Y comme 8 Y eſt à 8 6, & en la même raiſon de E 9 à H 9, c'eſt-à-dire, de E H à H F, ou de 2 Y à Y R. Mais comme 7 8 eſt à 8 Y, ainſi 7 Y à Y 6 : Donc 7 Y ſera à Y 6 comme 2 Y à Y R ; & le rectangle des extrêmes 7 Y R ſera égal à celui des moyennes 6 Y 2.

Maintenant, comme ç Y eſt à H Y, ainſi H Y à Y S ; en diviſant ç Y ſera à ç H comme H Y à H S. Mais comme ç Y à ç H, ainſi M Y à F H, ou ſon égale Y R ; & comme H Y à H S, ainſi 7 Y à B S, ou ſon égale Y P : Donc M Y ſera à Y R comme 7 Y à Y P ; & le rectangle des moyennes 7 Y R ſera égal à celui des extrêmes M Y P.

Par même diſcours on fera voir que le rectangle 6 Y 2 ſera égal au rectangle N Y δ. Et partant le rectangle 7 Y R eſt à M Y P comme 6 Y 2 à N Y δ ; & en permutant comme le rectangle 7 Y R eſt égal au rectangle 6 Y 2, ainſi M Y P ſera égal à N Y δ, ou au quarré ε Y, ou β Y. Ce qu'il falloit démontrer.

TROISIE'ME OBSERVATION.

DAns les neuf Problêmes ci-deſſus, la difficulté de la préparation dont nous avons parlé au commencement de ces Diſcours eſt compriſe, & de ce qu'il faut faire avant que l'on puiſſe ſe ſervir du Problême de Pappus ; c'eſt-à-dire, de trouver les diamétres de même conjugaiſon de la ſection qui doit toucher les lignes des pieds droits aux points donnez.

Mais parce que, ſans parler de la ligne qui détermine la hauteur, on pourroit propoſer un Arc à décrire, qui paſſant par un point donné, toucheroit deux pieds droits en deux autres points auſſi donnez ; & qu'en ce cas les Ouvriers ſe pourroient trouver embarraſſez, qui ne ſçau-

roient pas que l'on pût facilement, par ce point donné, mener cette ligne que nous avons ſuppoſé dans les propoſitions ci-deſſus, pour déterminer la hauteur de l'Arc à décrire, & avec cet avantage, que ce ſera en ce même point que ſe fera l'attouchement de l'Arc & de la ligne ſuſdite.

Il m'a ſemblé à propos de le faire voir, & d'en donner les pratiques dans ce Diſcours, par une propoſition univerſelle en cette ſorte.

PROBLEME.

Ayant à décrire un Arc rampant par un point donné, & entre deux pieds droits, qu'il touche en deux autres points auſſi donnez. Trouver la ligne droite, qui détermine la hauteur de l'Arc; c'eſt-à-dire, la ligne qui doive toucher l'Arc au ſuſdit premier point donné.

Planches VIII. IX. & X.

Les deux pieds droits (dans les Figures de la 8. 9. & 10. Planche) ſoient A C, & B D, paralleles, ou non paralleles, & le point donné H, par lequel il faut décrire un Arc rampant, qui touche A C en A, & B D en B. Qu'il faille trouver la ligne E H F, qui détermine la hauteur de cet Arc, en ſorte qu'il la touche au même point H.

Après avoir tiré la ligne de la rampe A B, & continué les pieds droits A C & B D, en ſorte qu'ils ſe rencontrent au point G, s'ils ne ſont point paralleles; il faut de l'un des points A ou B, par le point H, tirer une droite comme B H, & alors.

PREMIERE PROPOSITION.

Fig. I. II. de la VIII. Planche

Si les pieds droits ſont paralleles (comme aux Figures 1. & 2. de la 8. Planche) la ligne B H rencontrera l'autre pied droit A C prolongé au point K; auquel cas il faut diviſer la ligne A K en deux également en E, & mener par le point H la droite E H F, qui ſera celle que l'on cher-

che ; parce que, ou elle ſera parallele à la rampe A B, (comme en la 1. Figure) ou elle la rencontrera, étant prolongée comme en I, (en la 2. Figure.)

Premier Cas.

Puiſque dans le triangle A K B (Figure 1. de la 8. Planche) la ligne E H a été menée parallele à la baſe A B, le côté A K ſera à K E comme A B eſt à E H ; Mais A K a été faite double de K E ; & partant la ligne A B, ou ſon égale E F, ſera auſſi double de la même E H ; & la ſection, qui paſſant ſur le point H, touchera les deux lignes droites A C, & B D aux points A & B ; touchera auſſi la ligne E F au même point H ; & ceci tombe dans la ſolution du 4. Problême ci-deſſus. *Figure I. de la VIII. Planche.*

Second Cas.

C'eſt-à-dire, lorſque la ligne E F (Figure 2. de la 8. Planche) rencontre la ligne A B prolongée en I ; parce que les deux lignes A E, & E K ſont égales, elles auront même raiſon à la ligne B F ; qui leur étant parallele, il s'enſuivra qu'aux triangles E K H, B H F, la ligne E K ſera à B F, c'eſt-à-dire, E H à H F, comme dans le triangle A I E, la ligne A E à la même B F, c'eſt-à-dire, E I à I F : Et partant la ligne E I ſe trouvera coupée Harmoniquement aux deux points H & F, & la ligne I H ſera la moyenne Harmonique entre les deux extrêmes E I & I F : Et par conſéquent la ſection, qui paſſant par le point H, touchera les pieds droits A C en A, & B D en B, touchera auſſi la ligne E F au même point H : Et ceci tombe dans la ſolution du 5. Problême. *Figure II. de la VIII. Planche.*

SECONDE PROPOSITION.

Si les pieds droits étant en talu, ſe rencontrent en G au-deſſous de la rampe A B (Figures 3. & 4. de la 8. Planche ;) & la ligne tirée du point B par H eſt parallele à l'au- *Figure III. & IV. de la VIII. Planche.*

tre pied droit A C ; il ne faut que prendre ſur G A prolongée une ligne A E égale à A G, & mener la ligne E H F, qui ſera parallele à la rampe A B (comme en la 3. Figure,) ou bien elle la rencontrera, comme en I, (en la 4. Figure.)

Premier Cas.

Figure III. de la VIII. Planche.

Au premier Cas (Figure 3. de la 8. Planche,) parce que dans le triangle E G F, la ligne A B eſt ſuppoſée parallele à la baſe E F ; la ligne G A ſera à A E comme G B à B F ; Et parce que dans le même triangle E F G, la ligne B H eſt parallele à la baſe E G ; la ligne G B ſera à B F comme E H eſt à H F ; Et partant, par égalité, la ligne G A ſera à A E comme E H à H F ; mais G A eſt égale à A E : Donc E F ſera diviſée en deux également en H ; Et comme elle eſt parallele à la rampe A B, la ſection, qui paſſant par le point H, touchera les pieds droits A C en A, & B D en B, touchera auſſi la même E F en H. Et ceci tombe dans la ſolution du 6. Problême.

Second Cas.

Fig. IV. de la VIII. Planche.

Au ſecond Cas, c'eſt-à-dire, lorſque la ligne E F étant prolongée, rencontre la rampe A B, comme en I ; (Figure 4. de la 8. Planche,) il faut diſcourir en cette maniere, après avoir mené par le point E la ligne O E P parallele au côté B D, & qui rencontre la rampe en O, & la ligne B H prolongée en P. Parce que les triangles A E O, A G B ſont ſemblables, à cauſe des paralleles E O, & B G, & des angles au ſommet A ; ils ſeront auſſi égaux, à cauſe de l'égalité des côtez A E, & A G ; & partant les autres côtez E O, & B G ſeront auſſi égaux : Mais B G eſt égale à E P, étant paralleles, & entre paralleles : Donc E O ſera égal à E P ; & E O ſera à B F, (c'eſt-à-dire, dans le triangle E I O, la ligne E I à I F,) comme E P à la même B F, c'eſt-à-dire, dans les triangles ſemblables E H P, B H F, comme la ligne E H à H F : Et partant la ligne E I ſera diviſée Harmoniquement

Harmoniquement aux deux points H & F, & la ligne I H ſera moyenne Harmonique entre les deux extrêmes E I & I F: Et par conſéquent la ſection, qui paſſant par le point H, touchera les pieds droits A C en A, & B D en B, touchera auſſi la même E F au point H. Et ceci tombe dans la ſolution du 8. Problême.

TROISIE'ME PROPOSITION.

Si les pieds droits étant en talu & ſe rencontrant en G au-deſſous de la rampe A B, la ligne tirée du point B par le point donné H, coupe le côté A C prolongé en K; (Figures 1. & 2. de la 9. Planche,) il faut premierement couper la ligne A K en deux également au point L, par lequel il faut mener L M parallele à B K & égale à A L ou L K; & du point G par M tirer la droite G M juſqu'en N, où elle rencontrera la ligne B K prolongée; puis faire K E égale à K N, & du point E par H mener la ligne E H F, & raiſonner en cette maniere. Comme au triangle K G N, la ligne L M eſt parallele à la baſe K N; la même L M ſera à K N: c'eſt-à-dire, A L à K E, comme G L à G K; & prenant les doubles des antécédens, A K ſera à K E comme A G & G K enſemble à G K; & en diviſant A E ſera à K E comme A G à G K; & en permutant, & changeant G K ſera à K E comme A G à A E; & la toute G K ſera diviſée Harmoniquement aux deux points E & A, en ſorte que la ligne A K ſoit la moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux extrêmes G K & K E. *Fig. I. & II. de la IX. Planche.*

Maintenant, ou la ligne tirée du point E par H, ſera parallele à la rampe A B, (comme en la 5. Figure,) où elle la rencontrera comme en I, (en la 6. Figure.)

Premier Cas.

Au premier Cas (Figure 1. de la 9. Planche:) Après avoir mené par le point E la ligne O P parallele au pied droit B D, & rencontrant la rampe en O, & la ligne B H *Fig. I. de la IX. Planche.*

prolongée en P, je dis que la ligne E P dans le triangle G K B, ayant été tirée parallele à la base G B, le côté G K sera à K E comme G B à E P; & dans les deux triangles semblables G A B, E A O, la ligne G A sera à A E comme la même G B est à E O. Mais parce que G K est à K E comme G A est à A E; il s'ensuit que G B sera à P E comme la même G B est à E O; & que les deux lignes E P & E O ou B F seront égales; & que dans les triangles semblables E H P, B H F, les deux cotez E H & H F seront égaux; & la ligne E F sera divisée en deux également en H; & comme elle est parallele à la rampe A B, la section qui passant par le point H, touchera les deux pieds droits A C & B D en A & B, touchera aussi la ligne E F en H. Et ceci tombe dans la solution du 6. Probl.

Second Cas.

Fig. II. de la IX. Planche.

Au second Cas (Figure 2. de la 9. Planche; c'est-à-dire, lorsque la ligne E F rencontre la ligne A B prolongée comme en I: Après avoir comme dessus mené la ligne O E P parallele au pied droit B D, & coupant les lignes A B en O, & B H en P; je dis que dans le triangle G K B, la ligne E P ayant été menée parallele à la base G B; la ligne G K sera à K E comme G B à E P; mais celle-ci est composée des raisons de G B à B F, & de B F à E P, c'est-à-dire, F H à H E: il s'ensuit que la raison de G K à K E sera égale aux raisons de G B à B F, & de F H à H E. De plus, les triangles G A B, E A O étant semblables, aussi-bien que B I F, O I E; la ligne G A sera à A E, comme G B est à E O, c'est-à-dire, en raison composée de G B à B F, & de B F, E O, c'est-à-dire, F I à E I. Mais il a été démontré que la raison de G K à K E étoit égale à celle de G A à A E: Donc la raison composée de G B à B F, & de F H à H E, sera égale à celle de la même G B à B F, & de F I à I E: ôtant donc la raison commune de G B à B F, la raison de F I à I E sera égale à celle de F H à H E; & la ligne I F

sera divisée Harmoniquement aux deux points E & H, & la ligne I H sera la moyenne Harmonique entre les deux extrêmes I F & I E : Et par conséquent la section, qui passant par le point H touchera les deux pieds droits A C en A & B D en B, touchera aussi la ligne E F en H. Et ceci tombe dans la solution du 8. Problême.

QUATRIE'ME PROPOSITION.

Si les pieds droits, étant en surplomb, se rencontrent au-dessus de la rampe au point G (comme aux Figures 1. 2. & 3. de la 10. Planche;) il faudra du point B par H mener indéfiniment une droite B H, qui coupe l'autre pied droit A C en K; & après avoir divisé la ligne A K en deux également en L, & mené L M parallele à B H, & égale à A L; il faut joindre les deux points G M par une droite, qui coupe la même B H prolongée en N, & faire K E égale à K N; & par le point E tirer O P parallele à B D, & rencontrant les lignes A B & B H en O & P. Ensuite nous dirons que L M étant parallele à K N, L G est à G K comme L M est à K N, c'est-à-dire, A L à K E; & prenant les doubles des antécedens A G & G K ensemble seront à G K comme A K à K E; & en divisant A G à G K comme A E à E K; & en permutant A G est à A E comme G K à E K: Et partant la ligne A G est divisée Harmoniquement aux deux points E & K, & la ligne A K est moyenne Harmonique entre les deux extrêmes A G & A E. Maintenant, si l'on tire du point E par H une droite E F, elle sera parallele à la rampe A B, (comme en la 1. Figure,) où elle la rencontrera comme en I, aux 2. & 3. Figures. *Fig. I. II. III. de la X. Planche.*

Premier Cas.

Au premier Cas (Figure 1. de la 10. Planche:) Parce qu'aux triangles semblables G A B, E A O, la ligne G A est à A E comme G B est à E O; & aux triangles semblables G K B, E K P, la ligne G K est à K E comme la même G B *Figure I. de la X. Planche.*

eſt à E P, la raiſon de G A à A E étant ègale à celle de G K à K E ; il s'enſuit que la raiſon de G B à E O ſera auſſi égale à celle de G B à E P ; & que la ligne E O, ou ſon égale F B ſera égale à la ligne E P ; & qu'aux triangles ſemblables E H P, F H B, les deux lignes E H & H F ſont égales, & la ligne E F diviſée en deux également en H ; & comme elle eſt parallele à la rampe A B, la ſection qui paſſant par le point H, touchera les deux pieds droits A C en A & B D en B, touchera auſſi la ligne E F en H. Et ceci tombe dans la ſolution du 7. Probl.

Second Cas.

Fig. II. & III. de la X. Planche.

Au ſecond Cas, c'eſt-à-dire, lorſque la ligne E F coupe la rampe A B en I, ſoit de la part de A (comme en la 2. Figure,) ou de la part de B (comme en la 3. Figure de la 10. Planche ;) je dis que la raiſon de G A à A E étant la même que celle de G B à E O ; & celle-ci étant compoſée des raiſons de G B à B F & de B F à E O, c'eſt-à-dire, de I F à I E ; la raiſon de G A à A E ſera compoſée des raiſons de G B à B F, & I F à I E. De même la raiſon de G K à K E étant la même que celle de G B à E P, & celle-ci étant égale aux deux raiſons de G B à B F & B F à E P, c'eſt-à-dire, F H à H E ; la raiſon de G K à K E ſera compoſée des raiſons de G B à B F & de F H à H E : mais G A eſt à A E comme G K à K E ; Et partant la compoſée de G B à B F & I F a I E, ſera égale à la compoſée de G B a B F, & F H a H E ; & ôtant la raiſon commune de G B a B F, les deux autres I F à I E, & F H a H E ſeront égales, & la ligne F I (dans la 2. Figure) ſera diviſée Harmoniquement aux points E & H ; & la ligne E I (dans la 3. Figure) aux points F & H : Et en l'une & en l'autre la ligne I H ſera moyenne Harmonique entre les deux extrêmes E I & I F. Et partant la ſection, qui paſſant par le point H, touchera les deux pieds droits A C en A, & B D en B, touchera auſſi la droite E H au point H. Et ceci tombe dans la ſolution du 9. Probl.

Voilà donc la résolution de tous les Cas qui peuvent être considerez sur cette matiere ; où il paroît qu'il faut que le point donné se trouve entre les lignes des pieds droits, si l'on veut rendre la question possible ; parce que l'Arc, qui partant des points A & B de la rampe, passeroit par un point posé hors les lignes A C, & B D prolongées, couperoit nécessairement cesdites lignes, & par conséquent il ne les pourroit pas toucher aux points A & B.

Et de cette façon j'estime qu'il est pleinement satisfait à tout ce qui peut être proposé sur la préparation nécessaire à la régle de Pappus, c'est-à-dire, à la recherche des diamétres de même conjugaison d'un Arc à décrire, qui touche deux pieds droits en deux points donnez, soit que la hauteur de l'Arc ne soit pas donnée, ou qu'elle soit déterminée par un point, ou par une ligne, ou par un plan.

QUATRIE'ME OBSERVATION.

MAis parce que l'austérité de la démonstration nous a obligé à quantité de lignes inutiles pour la pratique, & qui peuvent embarrasser les Ouvriers, qui ne sont pas accoûtumez à les démêler ; il m'a semblé que je ferois une chose qui leur seroit agréable, si je leur enseignois une Méthode universelle & facile de trouver ces diamétres en toute sorte de Cas. Ce qui se fait ainsi.

Maniere universelle de trouver les diamètres de même conjugaison de la Section qui doit former l'Arc rampant sur toute sorte de pieds droits & de hauteurs.

Soient (aux Figures de la Planche 11. & aux 2. premieres de la 12. Planche) les pieds droits A C & B D continüez indéfiniment, en sorte qu'ils se rencontrent en G, s'ils ne sont point paralleles ; & la ligne de la rampe A B soit divisée en deux également en Z ; & du point Z soit *Planche XI. & Fig. I. & II. de la XII. Planche.*

menée une droite, ou parallele aux pieds droits, (si ceux-ci le sont entr'eux,) ou passant par le point de leur rencontre G: Ensuite soit la ligne donnée ou non donnée E F qui détermine la hauteur de l'Arc proposé, laquelle soit ou parallele à la ligne de la rampe A B, ou la rencontrant au point I; & cette ligne E F, comprise entre les lignes A C & B D continüées, soit coupée en deux également en K, d'où il faut mener une ligne K M égale à K F, & qui fasse quelque angle que ce soit avec E F; & mener I M, à laquelle du point F, il faut tirer une parallele F L, & faire K H égale à K L; puis du point H il faut mener la ligne H B, & la diviser en deux également en S, par où du point F il faut tirer la ligne F S Y; laquelle sera ou parallele à la ligne G Z, ou elle la rencontrera au point Y dans l'angle A G B, ou dans celui qui lui est au sommet. Au premier Cas la section sera une Parabole en la 1. Figure de la 12. Planche. Au second Cas une Ellipse, aux 5. Figures de la Planche 11. & une Hyperbole au troisiéme Cas dans la 2. Figure Planche 12. Et joignant aux deux derniers Cas la ligne H Y, & la continüant en sorte que Y T soit égale à Y H, & menant par le point Y la ligne V Y X parallele à E F, sur laquelle du point B tombe la ligne B N parallele à H Y; il faut faire Y Q égale à Y N, & sur la ligne Q Y X comme diamétre, décrire le demi-cercle X R Q, qui soit coupé en R par la ligne Y R tirée du point Y perpendiculaire à V X; & enfin faire les deux lignes Y O, & Y P égales à Y R; Les diamétres de même conjugaison de l'Ellipse, ou de l'Hyperbole que l'on demande, seront les deux lignes H T & O P.

Et pour la Parabole, il faut du point B mener B N parallele à E F, (comme en la 1. Figure de la 12. Planche) & H V parallele à G Z, qui coupe B N en N; sur laquelle il faut prendre H V égale à B N, & du point V mener V X parallele à E F, & rencontrant la ligne H B prolongée en X; & enfin prendre sur E F continüée la ligne H T egale à

V X. La ligne H N sera le diamétre de la Parabole, auquel B N sera ordonnée sous l'angle H N B, & la ligne H T en sera le Paramétre.

TROISIE'ME DISCOURS.

Trouver les Axes d'une Section servant à la description d'un Arc rampant, dont les diamétres de même conjugaison sont donnez.

PREMIERE OBSERVATION.

Premier moyen par la Regle de Pappus.

CEs chose étant supposées, il ne reste plus qu'à trouver les Axes & les foyers pour décrire facilement la Section proposée, c'est-à-dire, appliquer aux diamétres trouvez de l'Ellipse, la Regle de Pappus, dont nous avons parlé au commencement de ces Discours, & dont nous rapporterons premierement la pratique qui se doit entendre pour toute sorte de Cas, & nous la démontrerons ensuite. Le Problême est donc tel.

REGLE DE PAPPUS.

Deux diamétres de même conjugaison d'une Ellipse étant donnez, en trouver les Axes & les foyers ou singliots.

Les deux diamétres de même conjugaison H T & O P étant proposez (aux Figures de la 13. Planche) *& par l point H, la ligne E H F indéfiniment prolongée, & parallele à O P ; il faut sur H T au point A élever à angles droits la ligne H I égale à O Y, & mener I Y ; sur laquelle au point I il faut tirer à angles droits la ligne I K, qui rencontre la ligne T H prolongée en K. Ensuite, après avoir divisé en deux également au point R la ligne Y K, & mené à angles droits la ligne R S,* Planche XIII.

qui coupera E F en quelque part comme en S (parce que les diamétres H T, & O P n'étant pas les Axes, l'angle H Y P, ou son égal E H Y ne sera pas droit;) il faut du point S comme centre, & de l'intervalle S Y ou S K, décrire le cercle K δ Y ϐ, lequel coupe la ligne E F aux deux points δ & ϐ; d'où par le point Y, il faut mener les deux lignes indéfinies β Y & δ Y; sur lesquelles du point H, il faut mener à angles droits les lignes H L, & H M. Ensuite il faut faire sur la ligne β Y prolongée la ligne N Y égale à Y L; & sur la ligne β N comme diamétre, décrire un demi-cercle N Q β qui coupe δ Y au point Q, & rapporter la ligne Y Q de part & d'autre du point Y sur β Y, en sorte que les lignes Y V, & Y X soient égales à Y Q; & par ce moyen nous aurons la toute V X pour l'un des Axes. En la même maniere prenant sur δ Y prolongée la ligne Y ζ égale à Y M, & sur la toute δ ζ comme diamétre décrivant le demi-cercle δ λ ζ qui coupe β Y prolongée au point λ; il faut de part & d'autre du point Y, sur la ligne δ Y prendre les deux Y G & Y Z égales à Y λ, afin d'avoir la toute G Z pour l'autre Axe. Et prenant une extremité du moindre Axe comme le point G pour centre, & de l'intervalle G θ égal à la moitié de l'autre Axe, c'est-à-dire à Y V; il faut décrire les deux Arcs de cercle qui coupent la ligne β Y, c'est-à-dire, le plus grand Axe aux deux points θ & ε, lesquels seront les foyers de la susdite Ellipse, que les Ouvriers appellent les singliots.

Voilà la pratique de Pappus, qui est la 14. proposition du 8. livre de ses Collections Mathématiques: Et quoique je ne la rapporte pas tout-à-fait dans les mêmes termes, c'est pourtant toujours la même chose; & ce que j'y ai ajouté n'est que pour en faciliter l'exécution aux Ouvriers: comme lors qu'il dit seulement qu'il faut faire le rectangle Y H K égal au quarré O Y, parce que, la maniere d'appliquer un quarré à une ligne droite, qui est la même que de trouver une troisiéme proportionnelle à deux droites données, n'est pas familiere aux Ouvriers; j'ai mieux aimé leur en marquer l'opération par le moyen du triangle

gle rectangle Y I K, (dans lequel la ligne I H étant perpendiculaire à la base Y K, le quarre H I, ou son égal O Y est égal au rectangle Y H K, ainsi que Pappus l'ordonne,) que de la supposer comme lui toute faite. Tout de même, quand il dit qu'il faut faire les deux quarrez Y V, & Y X égaux au rectangle ϐ Y L, & les deux quarrez Y G & Y Z égaux au rectangle δ Y M; j'en ai fait les opérations toutes entieres par le moyen des demi-cercles N Q ϐ & δ λ ζ.

Au reste, ce Problême n'a que cette seule construction; & Commandin qui a commenté cet Auteur, s'étonne avec raison qu'il ne l'ait pas démontrée. Mais comme il y a dans le texte de la Proposition quelques obscuritez qui marquent qu'il a été corrompu, je crois que la démonstration que Pappus en avoit faite s'est perduë avec le reste de ses Ouvrages qui nous manquent.

Mais ce qui me surprend d'avantage, c'est que Commandin ayant entrepris de la réparer, y ait si mal réüssi lui-même, n'ayant pas pû conclure, comme il fait, que les lignes X V & G Z soient Axes de l'Ellipse, parce que l'angle β Y δ est droit, aussi-bien que les angles au point L; mais bien seulement que au cas que la ligne X V soit l'Axe, la ligne H L lui sera ordonnée; puis que quelque point de la ligne E F que l'on prenne pour centre d'un cercle qui passe par Y, & coupe E F en deux autres points que β & δ, d'où l'on mene deux lignes au même point Y; l'angle de ces lignes sera toujours droit au susdit point Y, & l'on pourra tirer du point H une ligne qui fasse aussi angle droit avec celle qui viendra d'un autre point que ϐ au point Y; & cependant cette ligne ne sera pas l'Axe de l'Ellipse. Et je m'étonne que Commandin ne se soit pas apperçû que toute la force de la construction de Pappus dépend de ce que le rectangle Y H K, c'est-à-dire, δ H β, est égal au quarré O Y, & qu'il n'ait pas sçû la verité de ce Théorême que je démontre en cette maniere.

THEOREME.

Si deux diamétres de même conjugaison étant donnez dans une Ellipse, l'on tire de l'extremité de l'un d'eux une Contingente qui rencontre les deux Axes : le rectangle des parties de la Contingente entre les Axes, & le point de l'attouchement, est égal au quart du quarré de l'autre diamétre.

Fig. III, de la XII, Planche,

Soient dans l'Ellipse V G X Z, dont les Axes sont V X & G Z (dans la 3. Figure de la 12. Planche) deux diamétres de même conjugaison H T & O P ; & de l'extrémité d'un d'eux, comme de H soit tirée la touchante δ H ϵ, (qui sera par conséquent parallele à O P) laquelle coupe les Axes, sçavoir V X au point ϵ, & G Z au point δ ; je dis que le rectangle β H δ est égal au quarré O Y.

Pour le démontrer, il faut premierement au point O mener une autre Contingente ξ O π, (qui sera aussi parallele à H T,) & qui coupe les Axes V X en π, & G Z en ξ ; puis au point V en mener une autre ϕ V ζ, (laquelle sera aussi parallele à l'Axe G Z,) & qui coupe la Contingente δ H en ϕ, & O P prolongée en ζ enfin des points H & O mener H M & H L, O μ & O ν ordonnées aux Axes V X & G Z, & continuer H L en ς.

Maintenant, à cause de la touchante δ H ϵ, le rectangle ϵ Y L est égal au quarré V Y ; & à cause de la touchante ξ O π, le rectangle π Y μ est aussi égal au même quarré V Y ; les deux rectangles donc ϵ Y L, & π Y μ sont égaux. Et partant la ligne ϵ Y est à π Y comme Y μ à Y L. De plus, comme les lignes δ ϵ, O Y sont paralleles, aussi-bien que les lignes π ξ & H Y ; les triangles ϵ H Y, Y O π sont semblables, aussi-bien que les triangles ϵ H L, Y O μ : & partant dans les deux premiers ϵ Y sera à π Y comme H ϵ à O Y : & dans les deux derniers H ϵ sera à O Y comme H L à O μ ; & par conséquent ϵ Y sera à π Y comme H L à O μ. Mais nous avons démontré cy-dessus que ϵ Y étoit à π Y comme

Yμ à Y L, c'est-à-dire, dans les triangles O Yμ, ςY L; comme Oμ à Lς: Donc H L sera à Oμ, comme Oμ est à Lς & partant le rectangle H Lς sera égal au quarré Oμ; & par conséquent le quarré Y L aura même raison au rectangle H Lς, qu'au quarré Oμ Mais la raison du quarré Y L au rectangle H Lς est composée de celles de Y L à H L, ou à son égale Y M, & de Y L à Lς, c'est-à-dire, à cause que les triangles Y Lς, ϵYδ sont semblables, de ϵY à Yδ, lesquelles composent aussi la raison du rectangle ϵY L au rectangle δY M, ou de leurs égaux le quarré V Y au quarré G Y: Donc le quarré Y L sera au quarré Oμ comme le quarré V Y au quarré G Y, ou prenant leurs quadruples, comme le quarré de l'Axe V X au quarré G Z. Mais comme le quarré V X au quarré G Z, ainsi le rectangle VμX est au quarré Oμ: Donc le quarré Y L, & le rectangle VμX auront même raison au quarré Oμ & partant ils seront égaux: Et par conséquent le rectangle ϵY L sera au quarré Y L, c'est-à-dire, la ligne ϵY à Y L, comme le même rectangle ϵY L, ou son égal le quarré V Y, au rectangle VμX; & par conversion de raison ϵY sera à ϵL comme le quarré V Y au quarré Yμ. Mais comme ϵY à ϵL, ainsi $\epsilon\delta$ est à ϵH, c'est-à-dire, en prenant δH pour commune hauteur, le rectangle $\beta\delta$H au rectangle ϵHδ: Donc le rectangle $\epsilon\delta$H sera au rectangle ϵHδ comme le quarré V Y au quarré Yμ Mais à cause des paralleles δY, H L, & ϕV, le rectangle $\epsilon\delta$H est égal au quarré $\delta\phi$, comme le rectangle ϵY L est égal au quarré V Y: Et partant le quarré $\delta\phi$, ou son égal Yζ, sera au rectangle ϵHδ, comme le quarré V Y au quarré Yμ. Mais comme le quarré V Y au quarré Yμ, ainsi est le quarré Yζ au quarré O Y: Donc le quarré Yζ aura même raison au rectangle ϵHδ qu'au quarré O Y: Et par conséquent le rectangle ϵHδ est égal au quarré O Y. Ce qu'il falloit démontrer.

SECONDE OBSERVATION.

Autre moyen de trouver les Axes susdits.

APrès avoir suffisamment discouru sur la maniere de Pappus, pour trouver les Axes d'une Ellipse, dont les diamétres de même conjugaison sont donnez ; il ne reste plus qu'à en enseigner une qui trouve ceux de la Parabole, & de l'Hyperbole, ainsi que nous l'avons promis. Mais comme la regle, par laquelle on résout le Problême pour ces deux Sections, est universelle, & sert aussi à résoudre celui de l'Ellipse ; il m'a semblé qu'il ne seroit pas inutile de l'expliquer en cet endroit, & que les Ouvriers m'auroient une double obligation, si je leur enseignois divers moyens de parvenir à un même but, desquels ils pourront choisir celui qui leur sera plus agréable, ou même faire la preuve de l'un par l'autre, puis qu'étant également vrais & démonstratifs, ils doivent également bien réüssir, si on fait les opérations comme il se doit.

Maniere universelle de trouver les Axes d'une Section Conique, dont les diamétres de même conjugaison sont donnez.

Pour l'Ellipse & pour l'Hyperbole.

Fig. de la XIV. Planche. Soient donnez deux diamétres de même conjugaison d'une Ellipse ou d'une Hyperbole H T & O P se coupans au centre Y, & l'angle H Y P (comme aux Figures de la 14. Planche.) Il faut premierement prendre la ligne H D troisiéme Géometrique aux deux T H & O P, & l'ajouter à la ligne T H dans l'Ellipse, ou la retrancher de la même T H dans l'Hyperbole, ou enfin retrancher la ligne T H de D H, si celle-ci est plus grande que l'autre ; puis couper en deux également en I la toute, ou la difference T D. Ensuite sur la ligne H Y comme diamétre soit décrit

le demi-cercle H N K Y, (en sorte qu'il ne coupe point l'autre diamétre O P) dont le centre soit G, dans lequel soit appliqué H N parallele à O P, & continüée indéfiniment; puis, après avoir divisé H N en deux également en C, & tiré G C, il faut prendre sur C H continüée, s'il en est besoin, la ligne C B égale à I H, & tirer B L parallele à G C, ou perpendiculaire à C B, laquelle B L rencontre la ligne T H prolongée, s'il est besoin, en L, d'où il faut mener L M parallele à O P, & égale à H D; (de la part de H vers C dans l'Hyperbole, & dans l'Ellipse, si le point I se rencontre entre les points D & H comme en la Figure 3. ou de la part opposée, si le point H se trouve entre I & D, comme en la 4. Figure;) & du point M par G mener M K G, qui coupe le demi-cercle en K, par où des points H & Y il faut mener indéfiniment les lignes H K Q, & Y K F, qui rencontre H N continüée en V; après quoi entre les deux V Y & Y K, il faut faire Y E moyenne Géometrique, à laquelle il faut prendre Y F égale, & tirer des points E & Y des lignes indéfinies E R, & Z Y X paralleles à H K; puis aux deux E K & K H faire une troisiéme Géometrique K Q, & du point F par Q mener F Q R, qui coupe E R en R; & enfin entre les deux E R & E F, trouver une moyenne Géometrique, dont la moitié soit égale à chacune des lignes Y X & Y Z: Et faisant dans l'Ellipse du point F sur l'Axe X Z les lignes F A, & F S égales à Y Z; ou bien dans l'Hyperbole du point Y sur l'Axe E F, les lignes Y A & Y S égales à E Z: on aura les deux Axes que l'on demande Z X & E F, & les deux foyers ou fingliots A & S.

Pour la Parabole.

Soit O Z le diamétre d'une Parabole, & O R son paramétre en l'angle R O Z, (comme en la 1. Figure de la 15. Planche.) Et après avoir continué Z O au-dessus du point O, il faut prendre O P égal à la moitié du paramétre O R, *Fig. I. de la XV. Planche.*

& du point P tirer la ligne P Q perpendiculaire à R O continuée, s'il en eſt beſoin, & du point Q mener Q T parallele à O Z, & O S perpendiculaire à Q T; enſuite après avoir diviſé Q S en deux également en X, mener X V parallele a O S, & troiſiéme Géometrique aux deux lignes X S & O S. Je dis que le point X ſera le ſommet, la ligne X T l'Axe, & X V le côté droit de la Parabole propoſée.

Fig. III. IV. V. VI. & VII. de la XV. Planche. La démonſtration de cette maniere univerſelle ſe fait en cette maniere. Après avoir du point K (dans les Figures 3. 4. pour l'Hyperbole, & 5. 6. & 7. de la 15. Planche pour l'Ellipſe, pour éviter la confuſion des lignes dans les Figures de la 14. Planche) mené la ligne K $\pi\rho$ parallele a N H, & qui rencontre la ligne G C prolongée, s'il en eſt beſoin, au point O, je raiſonne ainſi. Les triangles G H C, L H B étant ſemblables, L H ſera a G H comme B H a H C, & en compoſant (dans les 3. 4. & 6. Figures) ou par converſion de raiſon (dans la 5.) L G ſera a G H comme B C a C H. Mais a cauſe de la ſimilitude des triangles L G M, H G θ; L G eſt a G H comme L M a H θ: Donc B C eſt a C H comme L M eſt a H θ; & en permutant B C eſt a M L comme C H a H θ. Mais comme B C a été priſe égale a I H, & M L égale a H D; & comme C H eſt a H θ, ainſi O π eſt a π K: Donc I H eſt a H D comme O π eſt a π K: Et (dans la 3. Figure) en changeant, par converſion de raiſon, en doublant les conſéquens, par converſion de raiſon, & en changeant; ou (dans la 4. Figure) en diviſant, doublant les antecedens, & en compoſant; ou bien (dans la 5. Figure) en changeant, par converſion de raiſon, doublant les conſéquens, en diviſant, & en changeant; ou (dans la 6. Figure) en compoſant, doublant les antécedens, & en diviſant; ou enfin (dans la 7. Figure) en changeant, par converſion de raiſon, doublant les conſéquens, en diviſant & changeant; H T ſera a D H comme $\pi\rho$ eſt a K π, c'eſt-a-dire, comme le rectangle $\rho\pi$ K eſt au quarré K π, ou comme le rectangle H π Y au même quarré

Kπ, & en changeant, le quarré de la ligne Kπ ſera au rectangle HϖY comme la ligne H D eſt a H T, c'eſt-a-dire, au double de la ligne H Y. Mais H D a été priſe dans tous les Cas la troiſiéme proportionnelle aux deux diamétres de même conjugaiſon H T & O P : Donc la ligne H D ſera le paramétre du diamétre H T, par la 4. des ſecondes def. du 1. des Coniques d'Apollonius ; & H D étant a la double de H Y comme le quarré de Kϖ eſt au rectangle H Y ; le point K eſt trouvé, ainſi que le demande la préparation des deux cas des Propoſitions 53. & 54. du 1. des Coniques d'Apollonius ; & le reſte de notre pratique eſt le même que ce qui eſt fait & démontré dans ces deux Problêmes. La démonſtration pour la Parabole eſt toute entiere dans la 52. Propoſition du même Livre.

TROISIE'ME PROBLEME RESOLU.

Trouver Géométriquement les veritables joints de tête de toutes sortes d'Arcs rampans.

PREMIER DISCOURS.

APrès avoir enſeigné ci-deſſus la maniere de décrire les Arcs rampans, il eſt bien juſte d'avertir les Ouvriers que leur pratique ordinaire d'en tracer les joints de tête eſt inutile, ou fautive. Voici ce qu'ils font.

Fig. II. de la XV. Planche. Ils diviſent premierement l'Arc comme D A F (dans la 2. Figure de la 15. Planche,) en autant de portions qu'ils veulent faire de Vouſſoirs, comme A B & A C; & voulant tirer le joint de tête, par exemple du point A, ils mettent le Compas ſur le point B, & de quelque ouverture que ce puiſſe être, pourvû qu'elle ſoit plus grande que la ligne A B, ils font de part & d'autre deux Arcs de cercle comme N M & P Q; puis rapportant le Compas au point C, ils en font deux autres comme R H & T V, qui coupent les premiers en G & O, par où ils tirent la ligne G O; (qui paſſera néceſſairement par le point A,) & ils prennent la portion A G pour leur joint de tête; ce qu'ils font par tous les points de la diviſion de leur Arc, pour avoir par ce moyen tous les autres joints de tête.

Sur quoy je dis premierement, qu'il n'y a qu'aux ſeuls Cas, où l'Arc propoſé eſt portion de cercle, ou bien lors qu'étant une ſection Conique, le joint ſe doit tirer par l'un des ſommets, que cette régle n'eſt pas fauſſe; auſquels Cas en échange elle eſt inutile, puiſqu'il ne faut alors que tirer

tirer les joints au centre ; & qu'en tous les autres Cas ; où l'Arc proposé est portion d'une autre ligne que circulaire, elle est absolument fausse & absurde.

Parce que sur cette hypothése on peut tirer une infinité de lignes differentes, & tendantes à differents points, qui passeront néanmoins par un même point de division de l'Arc, & pourront toutes également être le joint de tête du même Arc en ce même point. Je veux dire que suivant cette méthode on pourra faire passer une infinité de lignes par le point A comme A G, A H, &c. tendantes à differens points comme G, H, &c. & qui pourront autant l'une que l'autre être prises pour le joint de tête de l'Arc D A F au point A ; ce qui est absurde, puisqu'il n'y a qu'un seul joint de tête qui puisse être legitimement appellé tel en chaque point de quelque Arc que ce puisse être ; & la régle par conséquent qui en produit plusieurs ne peut être que fausse & absurde.

Or qu'il soit vrai que par la régle susdite on puisse tirer une infinité de lignes par le point A, qui pourront toutes être également prises pour le joint de tête de l'Arc D A F en ce même point, je le montre en cette maniere. Soit par exemple l'Arc D A F portion d'une Ellipse, & le point A pris ailleurs qu'au bout d'un des Axes : Et après avoir comme dessus pris les points B & C également distans de A, & tiré les Arcs M N, R H & P Q, T V, afin que des points de leur rencontre G & O, on puisse mener la ligne G A O, laquelle sera perpendiculaire à la ligne B C, & la divisera en deux également en X, & la ligne A G sera par cette opération le joint de tête du point A.

Je dis maintenant, que si on prend quelqu'autre point dans l'Arc comme D, duquel on tire une ligne D E parallele à B C, & rencontrant la section en E, & la droite G O en I, les angles au point I seront aussi droits ; mais les droites D I & I E ne sont point égales, parce qu'autrement la ligne A O seroit l'Axe de l'Ellipse, (les deux lignes B C

& D E étant paralleles,& toutes deux divisées également, & à angles droits par A O;) ce qui est contre l'hypothése: Et partant D I ne sera point égale à I E, ni par conséquent la droite A D à la droite A E; Et partant si du point A nous inscrivons dans l'Ellipse une ligne A F égale à A D, elle tombera ou dessus ou dessous du point E, & la ligne D F dessus ou dessous de D E, & les angles faits au point K par la ligne G O ne seront point droits; & partant D K & K F ne seront point égales: Et partant si des points D & F également distans du point A, on fait selon la régle susdite des Arcs de cercle au-dessus & au-dessous, par le rencontre desquels on tire une droite comme H L; elle passera par le point A, & coupera au point L la ligne D F en deux également, & par conséquent elle ne sera pas la même que G K, & la droite A H ne sera pas la même que A G; & A H sera néanmoins le joint de tête de l'Arc au point A, suivant la régle susdite. Et comme on peut prendre une infinité de points differens également distans de part & d'autre du même point A, & par le moyen desquels on peut faire une infinité de lignes differentes par la régle susdite, qui peuvent être aussi legitimement prises pour le joint de l'Ellipse au point A, que la ligne A G; & comme ce que je viens de démontrer pour l'Ellipse,peut être aussibien entendu pour toute autre sorte de ligne courbe differente de la circulaire; il s'ensuit ce que nous avons dit ci-dessus, & par conséquent que la régle qui est communément en usage parmi les Ouvriers, est fausse.

SECOND DISCOURS.

MAis comme il seroit inutile d'avoir découvert la fausseté de la pratique ordinaire, si l'on n'en enseignoit une autre qui ne soit pas sujette à ces défauts: j'ai pour ce sujet assez sérieusement médité sur cette matiere; sur la-

quelle j'ai premierement reconnu que la vraye & universelle maniere de tracer les joints de tête de toutes sortes d'Arcs dans toute leur perfection, tant pour la sûreté & solidité de la liaison des Voussoirs, que pour la beauté & l'élegance du trait, consistoit à les tirer perpendiculaires à l'Arc, c'est-à-dire, à plomb sur les lignes qui toucheroient l'Arc aux mêmes points; puisque cette pratique, (qui est la même que celle dont on se sert au cercle où les joints de tête vont au centre,) ne détermine jamais qu'un seul joint de tête en chaque point, & donne aux coupes des Voussoirs toute la force & la grace, donc l'Arc puisse être capable. Et pour la rendre familiere aux Ouvriers, j'ai tâché de leur en composer deux régles si faciles, que rien ne les puisse doresnavant empêcher de s'en servir; & quoique les Arcs puissent être portions de differentes Sections du Cone, comme du Cercle, de l'Ellipse, de l'Hyperbole, ou de la Parabole; je les ai néanmoins concûës sous des termes si généraux, & si propres, qu'elles peuvent également servir à toutes.

Maniere universelle de tirer les joints de tête de toutes sortes d'Arcs rampans.

Il faut de chaque point de l'Arc tirer des perpendiculaires à l'Axe de la Section, qui coupent le diamétre qui passe par le point, où le côté droit, ou paramétre du même Axe, est coupé en deux ègalement; & du point, où la perpendiculaire rencontre l'Axe, comme Centre, & de l'intervalle compris entre le susdit Axe & ledit diamétre, faire un Arc de cercle, qui coupera l'Axe en deux points, de l'un desquels, sçavoir de celui qui est le plus éloigné du sommet de la section, il faut mener, par le point premierement pris dans l'Arc rampant, une ligne droite, qui marquera le joint de tête que l'on demande.

Soit la ligne A C B l'Axe d'une section B K K B, (aux 1.

Fig. I. II. & III. de la XVI. Planche.

2. & 3. Figures de la 16. Planche) dont la ligne B H soit le côté droit on paramétre; & par le point I qui divise B H en deux également, soit menée indéfiniment le diamétre I N : Puis de quelque point pris dans la section comme de K, soit menée la ligne K M N perpendiculaire à l'Axe qu'elle coupe en M, & le diamétre I N en N ; & du point M comme centre, & intervalle M N, (c'est-à-dire, de la portion de la perpendiculaire comprise entre l'Axe A C B & ledit diamétre I N :) soit fait le cercle N L qui coupe le même Axe au point L, en sorte que le point M soit toûjours entre le sommet de la section dont il est le plus proche, & le susdit point L ; duquel par le point K, il faut tirer la ligne L K O, qui donnera la droite K O pour le joint que l'on demande.

Mais parce que les Ouvriers ne sçavent pas toûjours comme on trouve ce diamétre I N, il est à propos de leur en enseigner la maniere, supposé, par ce qui a été montré dans le précedent Problême, qu'ils connoissent les Axes de la section proposée, qui soient par exemple les lignes A C B & E C D, par le moyen desquels il faut trouver la ligne B H côté droit ou paramétre de l'Axe A C B, ce qui se fait ainsi. Il faut du centre C prendre sur l'Axe C A la ligne C F égale à C D, & du point F tirer la ligne F G parallele à A D, & du point A par G dans l'Ellipse & l'Hyperbole, (Figures 1. & 3.) tirer la droite A G H, qui coupe en H la ligne B H perpendiculaire à A B ; ou bien dans la Parabole (Figure 2.) faire A H égale à C G, & tirer indéfiniment la ligne H G, afin que l'on ait par ce moyen en toutes les Figures la ligne droite B H pour le côté droit, ou paramétre que l'on recherche, qui étant divisé en deux également en I, & tirant du centre C dans l'Ellipse & l'Hyperbole, la ligne C I N, ou bien tirant dans la Parabole la ligne I N parallele à A C; la même I N sera le diamétre de la section que l'on demande. Ce que je démontre en cette maniere.

Mais auparavant je dois dire que les diamétres de la Parabole étant tous paralleles, il paroît qu'il n'y a aucun centre de cette Figure, c'est-à-dire, aucun point de concours des diamétres ; & pour cet effet nous avons mis les deux extrémitez de l'Axe A & B en un seul point, qui est le sommet ; Et pour le point C qui sert de centre, nous l'avons pris à fantaisie dans l'Axe, par lequel nous avons mené l'ordonnée E C D, qui fait en la Parabole, en quelque endroit que l'on la prenne, le même effet que le second Axe dans les autres Figures.

Je dis donc pour démontrer que la ligne I N est le diamétre que l'on cherche. Parce que C F est égale à C D, & G F parallele à A D ; la ligne A C sera à C D, comme C F, ou son égale C D à C G : Et partant dans la Parabole (Figure 2.) le quarré de C D sera égal au rectangle A C G, & la ligne C G, ou son égale A H, sera le paramétre ou côté droit de l'Axe de la Parabole A C. Mais dans l'Hyperbole & l'Ellipse (Figures 1. & 3.) puisque A C est à C D comme C D est à C G ; le quarré A C sera au quarré C D (ou leurs quadruples, sçavoir le quarré de l'Axe A B au quarré de l'Axe E D,) comme la ligne A C à la ligne C G, c'est-à-dire, comme l'Axe transverse A B à B H : Et par conséquent la ligne B H sera le paramétre ou côté droit de l'Axe transverse A B.

Maintenant, pour démontrer que les lignes KO sont les véritables joints de tête de la section proposée, & qu'ils la coupent à angles droits ; il faut de quelque point que ce soit de la section comme *k*, par lequel on a tiré un joint de tête *k o*, mener une ligne droite *k* R perpendiculaire à la ligne *k o*, & qui rencontre l'Axe de la section continüée en R, & prolonger la droite *k m* jusqu'à ce qu'elle trouve G H continüée au point *q*. Après quoi, pour faire voir que le joint *k o* coupe la section à angles droits, ou (ce qui est la même chose) que la ligne *k* R touche la section au point

k, je raiſonne en cette ſorte. D'autant que du ſommet *k* du triangle rectangle *l k* R, on a mené une droite *k m* perpendiculaire à la baſe R *l*, le rectangle R *m l* ſera égal au quarré de *k m*. Mais le même quarré *k m* eſt auſſi égal au rectangle B *m q*, par les 11, 12 & 13 du 1. des Coniques d'Apollonius : Donc les rectangles R *m l* & B *m q* ſeront égaux ; mais parce que la ligne *m l* eſt égale à *m n*, le rectangle R *m l* ſera auſſi égal au rectangle R *m n* ; & partant les deux rectangles R *m n* & B *m q* ſeront égaux ; & la ligne R *m* ſera à B *m* comme *m q* à *m n*, & en diviſant R B à B *m* comme *q n* à *m n* : Et partant comme la ligne *q n* dans la Parabole (Figure 2.) eſt égale à la ligne *m n*, la ligne R B ſera auſſi égale à B *m*, & la droite *k* R touchera la Parabole en *k* par la 33 du 1 des Coniques. Mais pour l'Ellipſe & l'Hyperbolé (Figures 1 & 3,) puiſque R B eſt à B *m* comme *q n* eſt à *m n*, & *q n* eſt égale à H I ou B I ; la ligne R B ſera à B *m* comme B I à *m n*, c'eſt-à-dire, comme B C à C *m* ; en permutant & compoſant R C ſera à B C comme B C à C *m*. Et comme A C eſt égale à C B ; la toute R A dans l'Ellipſe ſera diviſée Harmoniquement aux deux points B & *m*, & la toute A *m* dans l'Hyperbole aux deux points B & R : & partant, en l'une & en l'autre, la ligne A R ſera à B R comme A *m* à B *m* ; & la ligne *k* R touchera la ſection au point *k*, par la 34. du 1. des Coniques. Et comme la même choſe ſe peut ſemblablement démontrer dans tous les points de la ſection, il paroît de la verité de la propoſition. Ce qu'il falloit démontrer.

Seconde maniere de tirer les joints de tête de toutes ſortes d'Arcs rampans.

Il faut de chacun des foyers de l'Ellipſe & de l'Hyperbole mener des lignes qui ſe rencontrent en un même point de l'Arc ; Mais dans la Parabole il faut du foyer me-

ner une droite, qui ſoit coupée en un point de l'Arc par une ligne parallele à l'Axe. Enſuite dans toutes les ſections, l'angle qui eſt fait par ces lignes au point de l'Arc, doit être coupé en deux également par une droite, qui ſera le joint de tête que l'on demande.

Des points G & F foyers de l'Ellipſe ou de l'Hyperbole, (dans les 4 & 5 Figures,) il faut tirer tant de lignes que l'on voudra G H, F I qui ſe coupent en des points de l'Arc comme en K. Tout de même, il faut du point F foyer de la Parabole, (dans la 6 Figure) mener F I qui ſoit coupée en un des points de l'Arc K, par la ligne H K parallele à l'Axe de la Parabole A F. Enſuite (dans toutes les trois Figures) il faut faire les deux lignes H K & I K égales, & des points I & H comme centres, & de quelque intervalle que l'on voudra, (pourvû qu'il ne ſoit pas plus petit que la moitié de la diſtance entre I & H) l'on doit décrire les deux Arcs qui ſe coupent au point L, d'où il faut mener O L K, qui ſera le joint de tête que l'on recherche. *Fig. IV. V. & VI. de la XVI. Planche.*

La démonſtration en eſt aiſée : Car ayant mené par un des points K la ligne M K N qui touche la ſection au point K, qui fera par conſéquent (ainſi qu'il a été démontré par d'autres) l'angle M K I égal à N K H ; & l'angle I K L ayant été fait égal à H K L, il s'enſuit que l'angle M K L eſt égal à N K L ; & partant, que L K eſt perpendiculaire à la contingente.

Les points G & F foyers de l'Ellipſe (dans la 4. Figure) ſe trouvent, en faiſant les lignes E F & E G (qui ſont tirées d'une des extrémitez du petit Axe E *D* ſur le grand Axe A B) égales à C B, moitié du grand Axe A B.

Ceux de l'Hyperbole G & F (dans la 5. Figure) ſe trouvent, en prenant du point C, qui eſt le centre, les lignes C G & C F ſur le grand Axe, égales à la ligne E B tirée d'un des bouts du petit Axe E D à une des extrémitez du grand Axe A B.

Le foyer de la Parabole F (dans la 6. Figure) ſe trouve en faiſant depuis le ſommet A la ligne A F égale à A G, c'eſt-à-dire, au quart de la ligne A D qui eſt le paramétre, ou le côté droit de la Parabole.

QUATRIE'ME

QUATRIEME PROBLEME RESOLU.

Trouver la ligne sur laquelle les Poutres doivent être coupées en leur hauteur & largeur, pour les rendre par tout également fortes & résistantes.

PREMIER DISCOURS. OU

F. B. EPISTOLA AD P. W.

In quâ celebris Galilæi propositio discutitur circa naturam lineæ quâ Trabes secari debent secundùm altitudinem, ut sint æqualis ubique resistentiæ; & in quâ lineam illam non quidem Parabolicam, *ut ipse Galilæus arbitratus est, sed* Ellipticam *esse, demonstratur.*

F. B. P. W. S. P. D.

PErgratæ mihi tuæ litteræ fuerunt, cùm ex illis intelligam & te valere, & me à te amari; quamquam subiratior videaris quòd ad te rarò scribam, id quod non tam meâ negligentiâ quàm penuriâ Tabellariorum contigisse, credas velim. Nam à quo tempore à Sarmatis ad Cimbros evolavit Heros vester, nemo sanè fuit qui ad te tutò perferret litteras, etsi id optabam vehementer, tùm ut sinceras tibi grates agerem, quòd officiosâ tuâ confabulatione sciverit Magnus ille noster Amicus, maximo me affectum fuisse gaudio, cùm summum Arctoi maris imperium, ei concessisse mihi nuntiatum est; tùm etiam ut tibi significarem, id mihi perutile futurum, si me quâ soles beni-

gnitate apud illum amicâ commendatione prosequereris.

Cæterùm perjucunda mihi profectò fuit elegantissima tua narratio de admirabili illâ Machinâ quâ in Colossicoteri tui Leonis Hyperborei constructione uti te dicis; & magnopere me delectat ista contemplatio intricatissimæ illius tignorum, rudentum, & ferramentorum, compagis, quæ Rectoris imperio ingenioque ita se præstat obsequentem: Sed pergratum mihi feceris, si per te certior aliquando fiam, quandônam Navis tua

Premet imperiosa suum mare?

Ingens enim de illâ percrebuit rumor, dignam scilicet fore, cui

Baltica tota lubens deserviat ora.

Quod autem scribis, sectas à te ex præscripto Galilæi lineâ Parabolicâ secundùm altitudinem Trabes, ut æqualis ubique forent resistentiæ, non omninò expectationi tuæ respondisse; istud me primùm non mediocriter commovit: tantæ enim apud me existimationis vir ille semper fuit, ut inducere in animum nunquam possem, quicquam ab eo minùs sapienter excogitatum posse à nobis aliquando resarciri.

Verùm re penitùs introspectâ, discussisque iis propositionibus, quas de resistentiâ Solidorum 2. lib. Mechan. conscripsit; & quandoquidem tu me meam ea de re sententiam rogas; ita me censere fateor, neque dissimulabo delusum sanè istâ ratione fuisse Galilæum, ut ea trabibus utrinque fultis congruere arbitratus fuerit, quæ tignis alterâ sui parte in murum infixis, aliâ verò liberè prominentibus convenire rectè demonstraverat.

Etenim quando asserit momentum resistentiæ in A (licet enim mihi affari te verbis Geometricis) Cunei seu Prismatis triangularis A B G D F esse ad momentum ejusdem in C, ut linea A B est ad lineam C B: At è contrario mo-

Fig. 1, Tab. 17.

mentum reſiſtentiæ in A Trabis, ſeu Priſmatis quadrangularis A B E D, eſſe ad momentum ejuſdem in C, ut linea C B eſt ad lineam A B: Id profectò aliter intelligi non poteſt, nequidem ex ipſo Galilæanæ demonſtrationis contextu, quàm ſi priſmata muro firmiter in punctis vel A, vel C adhærentia ſupponantur, dum Pondera ex B dependeant, quæ ſic augeantur, ut Priſmatum reſiſtentiis evadant tandem æqualia; quorum ponderum eadem tunc erit ratio, quæ linearum A B & C B.

At ſi Trabs A E ſecari intelligatur per lineam Parabolicam F N K B, unde Solidum fiat A F N B G O D, quod Cuneum Parabolicum appellare licet; tunc ipſe Galilæus infert, ex iis quæ antè demonſtraverat, momenta reſiſtentiæ in quibuſvis punctis eſſe æqualia; id eſt, (ut patet ex contextu demonſtrationis) Pondus quod pendens ex B, Solidum Parabolicum frangeret infixum in parietem in puncto A, ſeu per ſuperficiem A F D; idem etiam Pondus pendens ex eodem B, idem Solidum frangeret infixum in parietem in puncto C, ſeu per ſuperficiem C N O, & ſic de cæteris. Quod perutile futurum ait rei ædificatoriæ, ac conſtruendis præſertim navigiis, in quibus tranſtra quæ foros ſuſtinent tertiâ ponderis & molis parte multari poſſint, ſalvâ & incolumi reſiſtentiâ. Fig. 2. Tab. 71

At ego (mi VV.) fateor, prorsùs ignorare me, cuinam id uſui eſſe poſſit, tranſtra enim in navibus nulla ſunt quæ utrinque non ſuffulciantur, & quorum extrema, imò & ſæpè media pars, quibuſdam rebus non inſideant firmiter incumbantque.

Sed & rei ædificatoriæ parùm id opinor ſubſidii afferet, cùm omnis ferè quæ in illa adhibetur materies, utrâque extremitate firmis quibuſdam fulcimentis ſuſtineatur; ſic in contignationibus Trabes mutulis aut parietibus, aſſeres trabibus, columen Columnis, cantherii capreolis & tranſtris, & templa cantheriis inſiſtunt: nec ullum ferè tignum reperias, cujus extremitas altera in murum infixa

ſit, altera verò liberè extrà promineat; niſi ſi quod in ſubgrundis domorum extet ſuſtinendis trochleis, quibus pondera attollantur in Cænacula, aut in mutulis quæ Mæniana ſuffulciant.

Reſtat igitur ut, ſi eadem tigna utrinque fulta ſupponantur, incumbantque in diverſis eorum partibus illa pondera quæ trabes effringere poſſint; Quænam inter iſta proportio intercedat, inquiramus.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 1. Tab. 17. Ac primùm quidem de Priſmate quadrangulari A B E fulto in A & B, notum eſt ex eodem Galilæo, momentum reſiſtentiæ in C ad momentum reſiſtentiæ in H, id eſt, minimum pondus quod incumbens in P, trabem frangeret, ad minimum pondus quod eandem frangeret in M, eſſe ut rectangulum A H B ad rectangulum A C B; hoc enim ab ipſo demonſtratum eſt.

PROPOSITIO SECUNDA.

Fig. 1. Tab. 17. At in Priſmate triangulari ſeu Cuneo A B G D F, momenta reſiſtentiæ ſunt inter ſe, ut rectangula ſub alternis lineæ A B partibus; id eſt, momentum in C eſt ad momentum in H, ut rectangulum ſub lineis A H, C B, ad rectangulum ſub lineis A C, B H. Eſt enim ratio momenti reſiſtentiæ Cunei in C ad momentum reſiſtentiæ ejuſdem in H, compoſita ex rationibus momenti Cunei in C ad momentum reſiſtentiæ Priſmatis quadrangularis ſeu trabis A E, è quâ naſcitur, in eodem puncto C, momenti reſiſtentiæ trabis in C ad momentum ejuſdem in H, & tandem momenti reſiſtentiæ trabis in H ad momentum reſiſtentiæ Cunei in eodem H. Sed ratio momenti reſiſtentiæ Cunei in C ad momentum trabis in eodem C eſt (ex Galilæo) ut quadratum C N ad quadratum C P ſeu A F, id eſt, ut quadratùm C B ad quadratum A B, (componitur enim ex rationibus partium ſolidi contentarum in ſuperficiebus

C O & C I quæ ſunt inter ſe ut ſuperficies, id eſt, propter communem altitudinem N O, I P, ut lineæ C N & C P; & ex ratione diſtantiarum actionis earumdem, quæ etiam ſunt ut eædem lineæ C N, C P:) Ratio verò momenti reſiſtentiæ priſmatis quadrangularis ſeu trabis in C, ad momentum ejuſdem in H eſt, ex eodem Galilæo, ut rectangulum A H B ad rectangulum A C B; & tandem ratio momenti reſiſtentiæ trabis in H ad momentum reſiſtentiæ Cunei in eodem H, eſt ut quadratum H M ſeu A F ad quadratum H K, id eſt, ut quadratum A B ad quadratum H B: Ergo ratio momenti reſiſtentiæ Cunei, ſeu Priſmatis triangularis in C ad momentum reſiſtentiæ ejuſdem in H, componitur ex rationibus quadrati C B ad quadratum A B, rectanguli A H B ad rectangulum A C B, & quadrati A B ad quadratum H B. Sed rationes quadrati C B ad quadratum A B, & quadrati A B ad quadratum H B ſunt æquales rationi quadrati C B ad quadratum H B; & ratio quadrati C B ad quadratum H B æqualis rationibus linearum C B ad B H, plus C B ad B H; ratio verò rectanguli A H B ad rectangulum A C B, eadem eſt quæ linearum A H ad A C, plus H B ad C B: Ergo ratio momenti reſiſtentiæ Cunei in C ad momentum ejuſdem in H, componitur ex rationibus linearum C B ad B H, plus C B ad B H, plus A H ad A C, plus B H ad C B. Atqui rationes C B ad B H plus B H ad C B ſeſe mutuò deſtruunt: Superſunt ergo rationes A H ad A C plus C B ad B H, quæ componunt rationem rectanguli A H, C B ad rectangulum A C, B H. Unde patet propoſitum.

PROPOSITIO TERTIA.

Sic ſi trabs A B E utrinque ſecetur per diagonales A Q, Q B quæ Solidum deinceps Cuneatum A Q B T R S efficiant, occurrentes in medio trabis Q R. Momentum reſiſtentiæ duplicis illius Cunei in C, erit ad momentum ejuſdem in H, ut rectangulum ſub lineis H B, B C ad rec- *Fig. 3. Tab. 17.*

tangulum ſub A C & A H. Nam ratio momenti reſiſtentiæ duplicis Cunei in C ad momentum ejuſdem in H, componitur ex rationibus momenti in C ad momentum in G, & momenti in G ad momentum in H. Sed demonſtrabitur, ut ſuprà, momentum Cunei in C ad momentum ejuſdem in G, eſſe in ratione compoſitâ quadrati lineæ C N ad quadratum lineæ G Q, & rectanguli A G B ad rectangulum A C B: Sed ratio quadrati C N ad quadratum G Q eadem eſt quæ quadrati C B ad quadratum G B ſeu ad rectangulum A G B: Ergo ratio momenti in C ad momentum in G, componetur ex rationibus quadrati C B ad rectangulum A G B, & rectanguli A G B ad rectangulum A C B, quæ quidem ſunt æquales rationi quadrati C B ad rectangulum A C B, vel denique rationi lineæ C B ad lineam A C. Eodem argumento demonſtrabitur momentum reſiſtentiæ Cunei in G ad momentum reſiſtentiæ ejuſdem in H, eſſe ut linea H B ad lineam A H: Ergo ratio momenti reſiſtentiæ duplicis Cunei in C, ad momentum ejuſdem in H, componetur ex rationibus linearum C B ad A C, plus H B ad A H: quibus etiam componitur ratio rectanguli H B C ad rectangulum H A C. Unde patet propoſitum.

PROPOSITIO QUARTA.

Fig. 1. Tab. 17. Quod autem ad lineam Parabolicam ſpectat, quâ quadrifariam ſecari trabes poſſunt ſecundùm altitudinem, neutro tamen modo continget unquam, ut momenta reſiſtentiæ ſuperſint ubique æqualia. Etenim trabs A E eâ ratione ſecetur ut Axis ſemi-parabolæ ſit longitudo trabis A B, amplitudo verò dimidia, ſit ejuſdem altitudo A F, (planè ut ſuperior Galilæi figura docet,) unde Solidum A F N B G O D oriatur, quod Cuneum Parabolicum appellare licet: Quòdque ſi utrinque fulciatur in A & B, momentum reſiſtentiæ ut in C, erit ad momentum reſiſtentiæ ut in H, in ratione lineæ A H ad lineam A C.

Nam demonſtrabitur ut ſupra rationem momenti re-

ſiſtentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum ejuſdem in H, componi ex ratione quadrati C N ad quadratum H K, (id eſt, propter Parabolam lineæ C B ad lineam H B) plus ratione rectanguli A H B ad rectangulum A C B, (id eſt, ratione linearum A H ad A C) plus H B ad C B : Ergo ratio momenti reſiſtentiæ Cunei in C ad momentum ejuſdem in H, componetur ex rationibus linearum C B ad H B, plus H B ad C B, plus A H ad A C ; ſed ratio C B ad H B deſtruit rationem H B ad C B, eſt enim ratio æqualitatis quæ in compoſitione rationum nihil addit aut demit: Ergo ſupereſt ratio lineæ A H ad A C, cui æqualis eſt ratio momenti reſiſtentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum reſiſtentiæ ejuſdem in H. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO QVINTA.

Deinde ipſa Trabs A E ſecetur diagonaliter à duabus ſemi-parabolis A K Q, B N Q, quarum Axis communis ſit A B & dimidia amplitudo etiam communis G Q, quæ occurrentes in medio Trabis in Q, efficiant Solidum A K Q N B T O R L S, quod duplicem Cuneum Parabolicum appellare poſſumus ; in quo momentum reſiſtentiæ in C erit ad momentum reſiſtentiæ in H, ut linea H B ad lineam A C. *Fig. 4. Tab. 17.*

Etenim ratio momenti reſiſtentiæ duplicis Cunei Parabolici in puncto C ad momentum reſiſtentiæ ejuſdem in puncto H, componitur ex rationibus momenti in C ad momentum in G, & momenti in G ad momentum in H ; jam verò ratio momenti reſiſtentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum ejuſdem in G, componitur ex rationibus momenti Cunei in C ad momentum reſiſtentiæ trabis A E, è quâ naſcitur, in eodem puncto C, & momenti trabis A E in C ad momentum Cunei in G. Atqui momentum Cunei in C ad momentum trabis in C, eſt ut quadratum C N ad quadratum C P ſeu G Q, id eſt, (propter Parabolam B N Q) ut linea C B ad lineam G B : Momentum verò tra-

bis in C est ad momentum Cunei Parabolici in G, ut quadratum G B ad rectangulum A C B, (idem enim est momentum resistentiæ Trabis & Cunei in G,) id est, in ratione linearum G B ad A C, plus G B ad C B : Ergo momentum Cunei in C ad momentum ejusdem in G, erit in ratione linearum CB ad G B, plus G B ad A C, plus G B ad C B ; id est, ut linea G B ad A C. Eodem modo ostendetur momentum Cunei in G, esse ad momentum ejusdem in H, ut linea H B est ad lineam A G seu G B : Ergo ratio momenti resistentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum ejusdem in H, componetur ex rationibus linearum G B ad A C & H B ad G B, id est, erit ut linea H B ad lineam A C. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO SEXTA.

Fig: 5. Tab. 17. Tertiò, si Trabs A E secari intelligatur lineâ Parabolicâ A K Q N B cujus vertex sit in Q, axis Q G, & amplitudo A B, quâ quidem sectione fiet Solidum A Q B T R S quod Parabolicum appellabitur; cujus momentum resistentiæ in C est ad momentum resistentiæ in H, ut rectangulum A C B est ad rectangulum A H B, vel, quod idem est, ut linea C N ad lineam H K.

Etenim, ut supra ostensum est, ratio momenti illius Parabolici in C ad momentum ejusdem in H, componitur ex rationibus quadrati C N ad quadratum H K & rectanguli A H B ad rectangulum A C B, id est, ex rationibus linearum C N ad H K, plus C N ad H K, & rectanguli A H B ad rectangulum A C B : Sed ratio lineæ C N ad H K, eadem est (propter Parabolam) quæ rectanguli A C B ad rectangulum A H B : Ergo ratio momenti resistentiæ Solidi Parabolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, componetur ex rationibus C N ad H K, plus rectanguli A C B ad rectangulum A H B, plus rectanguli A H B ad rectangulum A C B : Sed rationes A C B ad A H B, & A H B ad A C B sese mutuò destruunt : Est ergo momentum

momentum resistentiæ Solidi Parabolici in C ad momentum ejusdem in H, ut linea C N ad lineam H K, id est (propter Parabolam) ut rectangulum A C B est ad rectangulum A H B. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Et hinc vides istius Solidi Parabolici momenta proportionem habere inversam momentorum Trabis è qua enatum est; illius enim momentum in C est ad momentum in H, ut rectangulum A C B ad rectangulum A H B; hujus verò è contrario momentum resistentiæ in C est ad momentum resistentiæ in puncto H, ut rectangulum A H B est ad rectangulum A C B.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Quartò denique secetur Trabs A E per semiparabolam F N K B, cujus axis sit A F & dimidia amplitudo A B; exurgatque Cuneus parabolicus A F K B G O D; in quo momenta resistentiæ longè intricatiorem inter se proportionem sortientur quàm in reliquis. Ostendetur enim ut supra momentum Cunei in C ad momentum ejusdem in H, esse in ratione compositâ quadrati C N ad quadratum H K, & rectanguli A H B ad rectangulum A C B; Quæ ratio si referatur ad lineam B A seu ad basim Cunei, eadem erit quæ composita rationum quadrati lineæ compositæ ex A C & A B ad quadratum lineæ compositæ ex eadem A B & A H, plus rectanguli sub lineis A H, C B ad rectangulum sub lineis A C, B H. *Fig. 6. Tab. 17.*

Sit enim A Q æqualis A B, & erit ex proprietate Parabolæ C N ad H K ut rectangulum Q C B ad rectangulum Q H B, & ut quadratum C N ad quadratum H K, sic quadratum rectanguli Q C B ad quadratum rectanguli Q H B, id est, ut linea Q C ad Q H, plus Q C ad Q H, plus C B ad H B, plus C B ad H B. Sed ratio rectanguli A H B ad rectangulum A C B, eadem est quæ ratio linearum A H ad

A C, plus HB ad CB: Ergo ratio momenti resistentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, componetur ex rationibus linearum QC ad QH, plus QC ad QH, plus CB ad HB, plus CB ad HB, plus AH ad AC, plus HB ad CB. Sed rationes CB ad HB, plus HB ad CB sese mutuò destruunt; Relinquuntur ergo rationes QC ad QH, plus QC ad QH, plus CB ad HB, plus AH ad AC; quæ componunt etiam rationem quadrati QC ad quadratum QH, & rectanguli AH, CB, ad rectangulum AC, BH. Sed quadratum QC æquale est quadrato lineæ compositæ ex AB & AC, quadratum verò QH æquale quadrato lineæ compositæ ex AB & AH. Ergo ratio momenti resistentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, componitur ex rationibus quadrati lineæ compositæ ex AB & AC ad quadratum compositæ ex eadem AB & AH, & rectanguli sub lineis AH, CB ad rectangulum sub lineis AC, BH. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Atque ex istis omnibus patet ratio, cur nimiam quam in Galilæum habebas fiduciam experimenta tua deluserint. Tantum enim abest ut illa sectio Parabolica, quocumque tandem modo trabibus secundùm altitudinem adhibeatur, æquet in illis utrinque fultis momenta resistentiæ; quin illa potiùs in infinitum dimovere possit atque diducere; etiamsi id semper verissimum sit tertiam ponderis & molis partem per Parabolas in trabe resecari.

PROPOSITIO OCTAVA.

Fig. 7. Tab. 17. Sed nec ista momentorum æqualium proprietas sectioni hyperbolicæ conveniet. Nam si trabs AE secetur primò per semi-hyperbolam ANKR sub transversâ diametro QA, Axe AB, & amplitudine BR, unde Cuneus hyperbolicus oriatur BANRELSG. Erit momentum

resistentiæ in C ad momentum in H, ut est rectangulum sub Q C & H B ad rectangulum sub Q H & C B. Nam, ut supra, demonstrabitur momentum in C ad momentum in H esse in ratione composita quadrati C N ad quadratum H K, & rectanguli A H B ad rectangulum A C B. Sed ex proprietate hyperboles quadratum C N est ad quadratum H K ut rectangulum Q C A ad rectangulum Q H A: Ergo momentum est ad momentum in ratione composita rectangulorum Q C A ad Q H A & A H B ad A C B. Sed ratio rectanguli Q C A ad Q H A eadem est quæ linearum Q C ad Q H, & A C ad A H; ratio verò rectanguli A H B ad A C B eadem est quæ linearum A H ad C A, plus H B ad C B: Et ratio A C ad A H destruit rationem A H ad C A: Ergo momentum resistentiæ Cunei hyperbolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, est in ratione composita linearum Q C ad Q H, plus H B ad C B; Quæ quidem est ratio rectanguli Q C, H B ad rectangulum Q H, B C. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO NONA.

Si verò idem Prisma A E secetur per duas semi-hyperbolas contrariè positas A K Q, B N Q, quarum axis communis A B, amplitudo eadem G Q, & transversæ diametri æquales A V, B X, quæ se in trabis medio Q secantes, Solidum in illa efficiant A K Q N B T R S deinceps Cuneatum hyperbolicum. Idem prorsus eveniet quod supra, eritque momentum resistentiæ in C ad momentum resistentiæ in H, ut est rectangulum sub X C & H B ad rectangulum sub V H & A C. Est enim ratio momenti resistentiæ Solidi deinceps Cuneati hyperbolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, composita ex rationibus momenti in C ad momentum in G, & momenti in G ad momentum in H. Et ratio momenti in C ad momentum in G componitur ex rationibus rectanguli AGB ad rectangulum A C B, plus quadrati C N ad quadratum G Q, id *Fig. 8. Tab. 17.*

eſt, (ex proprietate hyperboles) rectanguli X C B ad rectangulum X G B. Sed ratio rectanguli A G B ad rectangulum A C B, eadem eſt quæ linearum A G ad A C, plus G B ad C B; Ratio vero rectanguli X C B ad rectangulum X G B, eadem quæ linearum X C ad X G, plus C B ad G B: Et ratio GB ad C B deſtruit rationem C B ad G B: Ergo ratio momenti reſiſtentiæ in C ad momentum in G, componetur ex rationibus A G ad A C, plus X C ad X G, quibus etiam componitur ratio rectanguli X C, A G ad rectangulum X G, A C. Eodem modo demonſtrabitur rationem momenti reſiſtentiæ in G ad momentum reſiſtentiæ in H, eandem eſſe quæ rectanguli V G, B H vel X G, B H ad rectangulum V H, A G: Ergo ratio momenti reſiſtentiæ Solidi deinceps Cuneati hyperbolici in C ad momentum reſiſtentiæ ejuſdem in H, componetur ex rationibus rectangulorum X C, A G ad X G, A C, plus X G, B H ad V H, A G. Sed iſta rationum compoſitio eadem eſt quæ compoſitio rationum rectangulorum X C, A G ad V H, A G, plus X G, B H ad X G, A C, id eſt, (propter communes altitudines A G & X G) eadem quæ compoſitio rationum linearum X C ad V H, plus B H ad A C: Ergo momentum reſiſtentiæ Solidi deinceps Cuneati hyperbolici in C ad momentum reſiſtentiæ ejuſdem in H, eſt in ratione compoſita ex rationibus linearum X C ad V H & B H ad A C, id eſt, rectanguli X C, B H ad V H, A C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO DECIMA.

Fig. 1. Tab. 18. Quod ſi Trabs A E ſecetur per integram hyperbolam A K Q N B, cujus axis ſit G Q, tranſverſa diameter Q V, & oppoſita ſectio I V Z; erit adhuc intricatior ratio momenti reſiſtentiæ Solidi hyperbolici A Q B D R Y in C ad momentum ejuſdem in H. Si enim producantur lineæ CN, HK, donec occurrant oppoſitæ ſectioni in Z & I; demonſtrabitur rationem momenti in C ad momentum in H,

eandem esse quæ rectanguli sub lineis I H, C N ad rectangulum sub lineis Z C, H K. Nam, ut supra, ostendetur rationem momentorum componi ex rationibus quadratorum C N ad H K, plus rectangulorum A H B ad A C B. Sed ex proprietate hyperboles rectangulum A H B ad rectangulum A C B, est ut rectangulum I H K ad rectangulum Z C N: Erit ergo ratio momenti in C ad momentum in H composita ex rationibus quadrati C N ad quadratum H K, & rectanguli I H K ad rectangulum Z C N. Rursùs demonstratum est ab aliis idem esse compositum rationum quadrati C N ad quadratum H K, & rectanguli I H K ad rectangulum Z C N, quod compositum rationum quadrati C N ad rectangulum Z C N, id est, lineæ C N ad lineam Z C, & rectanguli I H K ad quadratum H K, id est, lineæ I H ad lineam H K: Est ergo ratio momenti resistentiæ Solidi hyperbolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, composita ex ratione lineæ C N ad Z C, plus ratione lineæ I H ad H K; quibus etiam componitur ratio rectanguli I H, C N ad rectangulum sub lineis Z C, H K. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO UNDECIMA.

Denique, si Trabs A E per semihyperbolam F K N B secetur, cujus Axis A F, transversa diameter F V, & opposita sectio V I Z, oriaturque alter Cuneus hyperbolicus A F N B G L D; erit intricatissima ratio momentorum resistentiæ ejusdem in diversis punctis C & H. Nam si extendantur lineæ C N, H K, ut in superiori propositione, donec occurrant oppositæ sectioni in Z & I, erit ratio momenti resistentiæ Cunei hyperbolici in C ad momentum ejusdem in H, composita ex rationibus rectanguli sub lineis I H & C N ad rectangulum sub lineis Z C, H K, plus rectanguli sub compositâ ex tota A B & parte A C in lineam A H, ad rectangulum sub compositâ ex eadem A B & parte A H in lineam A C. Sit A Q æqualis A B ostende- *Fig. 2. Tab. 18.*

tur, ut suprà, momentum resistentiæ Cunei hyperbolici in C ad momentum ejusdem in H, esse in compositâ quadrati C N ad quadratum H K, & rectanguli A H B ad rectangulum A C B: Sed ratio quadrati C N ad quadratum H K componitur ex rationibus quadrati C N ad quadratum A F, & quadrati A F ad quadratum H K; ratio verò quadrati C N ad quadratum A F componitur rursùs ex ratione quadrati C N ad rectangulum Z C N (id est, propter C N communem altitudinem,) lineæ C N ad lineam Z C, plus ratione rectanguli Z C N ad rectangulum Q C B, id est (ex proprietate hyperboles) rectanguli V A F ad quadratum A B, plus ratione rectanguli Q C B ad quadratum A B, plus ratione quadrati A B ad rectangulum V A F, & tandem plus ratione rectanguli V A F ad quadratum A F, id est, (propter A F communem altitudinem) lineæ V A ad lineam A F: Atqui ratio rectanguli V A F ad quadratum A B destruit rationem quadrati A B ad rectangulum V A F. Superest ergo ut ratio quadrati C N ad quadratum A F componatur ex rationibus lineæ C N ad lineam C Z, plus rectanguli Q C B ad quadratum A B, plus lineæ V A ad lineam A F; quibus etiam componuntur rationes rectanguli V A, C N ad rectangulum C Z, A F & rectanguli Q C B ad quadratum A B. Eodem argumento demonstrabitur rationem quadrati A F ad quadratum H K componi ex ratione rectanguli I H, A F ad rectangulum V A, H K, plus ratione quadrati A B ad rectangulum Q H B: Ergo ratio quadrati C N ad quadratum H K componetur ex ratione rectangulorum V A, C N ad C Z, A F, plus Q C B ad quadratum A B, plus quadrati A B ad rectangulum Q H B, plus rectanguli I H, A F ad V A, H K; id est, ex rationibus rectangulorum V A, C N ad C Z, A F, plus Q C B ad Q H B, plus I H, A F ad V A, H K. Sed quod exurgit ex compositione rationum rectangulorum V A, C N ad C Z, A F, plus I H, A F ad V A, H K, æquale est ei quod exurgit ex compositione rationum rec-

tangulorum V A, C N ad V A, H K, id eſt, (propter V A communem altitudinem) lineæ C N ad lineam H K, plus I H, A F ad C Z, A F, id eſt, (propter A F communem altitudinem) lineæ I H ad lineam C Z, quæ quidem conficiunt rationem rectanguli I H, C N ad rectangulum CZ, HK : Ergo ratio quadrati C N ad quadratum H K componetur ex rationibus rectangulorum I H, C N ad C Z, H K, plus Q C B ad Q H B : Ergo ratio momenti reſiſtentiæ Cunei hyperbolici in C ad momentum ejuſdem in H componetur ex rationibus rectangulorum I H, C N ad C Z, H K, plus Q C B ad Q H B, plus A H B ad A C B : Sed ratio rectanguli Q C B ad Q H B eadem eſt quæ linearum Q C ad Q H, plus C B ad H B; ratio verò rectanguli A H B ad A C B eadem quæ linearùm A H ad A C, plus H B ad C B. Quæ quidem ratio H B ad C B deſtruit rationem linearum C B ad H B. Eſt ergo momentum reſiſtentiæ Cunei hyperbolici in C ad momentum ejuſdem in H, in ratione compoſitâ rationum rectanguli I H, C N ad rectangulum C Z, H K, plus linearum Q C ad Q H, plus A H ad A C, (id eſt, rectanguli Q C, A H ad rectangulum Q H, A C,) id eſt, rectanguli ſub lineâ compoſitâ ex A B & A C in A H, ad rectangulum ſub compoſitâ ex eadem A B & A H in lineam A C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO DUODECIMA.

Neque etiam iſta momentorum æqualitas in Trabe, per quadrantem Circuli aut Ellipſeos ſectâ, reperietur. Nam ſi ſub ſemidiametris A F, A B quadrans Circuli aut Ellipſeos F N K B deſcribatur, qui ſecans Trabem A E producat Cuneum circularem aut ellipticum AFNKBGOD, ſitque tota diameter B Q. Facilè oſtendetur momentum reſiſtentiæ Cunei in C ad momentum ejuſdem in H, eſſe ut rectangulum ſub compoſitâ ex totâ A B & ex parte A C in AH, ad rectangulum ſub compoſitâ ex totâ AB & ex parte A H in A C. Nam ratio momenti reſiſtentiæ Cunei elli- *Fig. 3. Tab. 18.*

ptici seu circularis in puncto C ad momentum resistentiæ ejusdem in puncto H, componitur ex rationibus quadrati C N ad quadratum H K, plus rectanguli A H B ad rectangulum A C B. Sed propter Circulum aut Ellipsim quadratum C N est ad quadratum H K ut rectangulum Q C B ad rectangulum Q H B : Ergo ratio momenti resistentiæ in C ad momentum in H, componitur ex rationibus rectanguli Q C B ad rectangulum Q H B, plus rectanguli A H B ad rectangulum A C B, id est, (uti demonstratum est ab aliis) ex rationibus rectanguli Q C B ad rectangulum A C B, plus rectanguli A H B ad rectangulum Q H B ; id est, (propter communes altitudines C B & H B) ex rationibus linearum A H ad Q H, plus Q C ad A C ; quæ quidem faciunt rationem rectanguli A H, Q C ad rectangulum A C, Q H, seu rectanguli sub A H & compositâ ex totâ A B & parte A C, ad rectangulum sub A C & compositâ ex totâ A B & parte A H. Est ergo momentum resistentiæ Cunei circularis aut elliptici in C ad momentum ejusdem in H, ut rectangulum sub compositâ ex AB & A C in A H ad rectangulum sub compositâ ex A B & A H in A C. Quod erat demonstrandum.

Nunc verò (mi VV.) quanti æstimâris, si quis eam te figuram edoceat, quâ non tertia quidem ponderis & molis portio auferatur, sed illa saltem non exigua, momenta verò resistentiæ ubique in residuo supersint æqualia? Illud puto, gratissimum tibi erit, & tibi in mechanicis atque organicis assiduè versanti, opis haud omninò contemnendæ. Sed quantò acceptius id erit tibi atque jucundius, quòd à viro tui amantissimo, & qui te magnopere colit, id continget? Enimverò iis quæ in nos amici conferunt beneficiis, nexu duplici nos obligari par est atque obstringi

PROPOSITIO DECIMA-TERTIA.

Age igitur, & quod sectioni parabolicæ, imò & hyperbolicæ, atque quadranti circuli aut ellipseos, denegavimus ;

mus; circulari profectò aut ellipticæ meritò concedamus: istæ enim sectiones id prorsùs efficient, quod præstare Parabolam Galilæus perperam asseruerat.

Nam si duabus lineis A G vel G B & G Q tanquam semidiametris, describatur semicirculus A Q B, si eæ sint æquales; vel semiellipsis, si sint inæquales; & per hanc vel illam Trabs A E secundùm altitudinem ita secetur, ut fiat Solidum circulare, vel ellipticum A Q B T R S: Ejus sanè momenta resistentiæ erunt ubique æqualia, & quod pondus frangit in C Solidum utrinque fultum, illud etiam idem rumpet in H. Etenim momentum resistentiæ in C Solidi sive circularis sive elliptici, est ad momentum resistentiæ ejusdem in H, in ratione compositâ quadrati C N ad quadratum H K, & rectanguli A H B ad rectangulum A C B: Sed propter Circulum aut Ellipsim quadratum C N est ad quadratum H K, ut rectangulum A C B est ad rectangulum A H B: Ergo ratio momenti resistentiæ Solidi in C ad momentum ejusdem in H, componetur ex rationibus rectanguli A C B ad rectangulum A H B, & rectanguli A H B ad rectangulum A C B: Sed istæ rationes faciunt rationem æqualitatis: Ergo momenta in C & H erunt æqualia. Et hoc in omnibus Solidi punctis concludetur, unde patet ubique propositum. *Fig. 4. 5. Tab. 18.*

Sic (mi VV.) petitioni tuæ satisfecisse me puto, nisi quòd hæc, quam ad te paucis verbis scribere cogitaveram, in ingentem ac penè fastidiosam molem, Epistola creverit. Sed hæc omnia ità exarare oportuit, tùm ut rem tibi gratam faciam, si quidpiam boni tibi communicaverim, tùm etiam ut habeas, quòd amicè me admoneas, si quid minùs cautè scripserim. Quippe non mirum profectò fuerit, iisdem me in grumis scrupisque collabi, in quos ipse Galilæus impegerit. Quare etiam atque etiam te rogo, ad me quamprimùm rescribe quid sentias, factis præsertim eâ quâ soles sedulitate atque solertiâ experimentis. Egò verò non committam posthâc ut de meâ ne-

gligentiâ conquueraris. Vale. Datum Farræ Viromanduorum pridie Idus Sextiles A. D. MDC. LVII.

SECOND DISCOURS.

OU

LETTRE AU SIEUR B.

Pour la résolution de ses doutes sur les propositions du premier Discours.

MOnsieur. Je vous suis parfaitement obligé du soin que vous avez pris, de me donner part des remarques qui ont été faites sur une Lettre, que j'écrivis il y a quelques années à un de mes Amis en Suede, & dont je vous avois laissé une copie, sur lesquelles il est bien raisonnable que je vous éclaircisse. Et pour y répondre par ordre & ne vous y laisser aucun sujet de douter, je veux premierement vous faire ressouvenir de ce que vous m'avez fait la grace de marquer, ou faire marquer par vos amis, à la marge de mon écrit, à côté des choses que je n'y avois pas assez clairement expliquées.

I. Fig. 1. Tab. 17. La premiere des remarques est sur la seconde Proposition, où je dis que les momens de la résistance du Coin ou Prisme triangulaire F A B G, que je suppose être soûtenu sur ses deux extrémitez A & B, sont entr'eux, comme les rectangles sous les parties alternes de la base A B; c'est-à-dire, que le moment de la résistance en C est au moment en H, comme le rectangle des parties A H, C B est au rectangle des parties A C, B H. Et pour le démontrer, je me sers de ces termes, que je rapporte en la Langue qu'ils sont écrits, parce que les notes sont aussi Latines: *Sed ratio momenti resistentiæ Cunei in C ad momentum*

✠

trabis in eodem C, est ex Galilæo, ut quadratum C N ad

quadratum C P seu A F,(id est, ut quadratum C B ad quadratum A B,) componitur enim ex rationibus partium Solidi ✠ *contentarum in superficiebus C O & C I, quæ sunt inter se ut superficies, id est, (propter communem altitudinem N O, I P,) ut lineæ C N, C P, & ex ratione distantiarum actionis earumdem, quæ etiam sunt ut eædem lineæ C N & C P.* Sur quoi dans le texte l'on a tiré des lignes, & fait des petites Croix, ainsi qu'il se voit ici. Et vis-à-vis de la premiere il est écrit à la marge, *Hoc falsum, est enim ut C N ad C P seu A F, ex Galilæo.* Et à l'endroit de la seconde, *Hoc non consideravit Galilæus, nec debet considerari in resistentiâ.* Un peu plus bas, où je dis sur la même Proposition : *Et tandem ratio momenti resistentiæ Trabis in H ad momentum resistentiæ Cunei in eodem H, est ut quadratum H M seu A F ad quadratum H K,* il y a à la marge, *Falsum ob eandem rationem.*

La seconde est sur la troisiéme Proposition, où je dis : *Sed demonstrabitur ut suprà momentum Cunei in C ad momentum ejusdem in G, esse in ratione compositâ quadrati lineæ C N ad quadratum lineæ G Q, & rectanguli, A G B ad rectangulum A C B.* Il y a à coté, *Falsum, sunt enim ut lineæ ut suprà, & sic in sequentibus, quod ubique notandum. Hoc solummodò verum esset, si non solùm trabs minueretur secundùm unam dimensionem, ut in casibus Galilæi & censoris, ut patet ex omnibus ejus figuris, sed secundùm duas dimensiones: At nullus hunc casum unquam inquisivit.* II. Fig. 3. Tab. 17.

Dans la quatriéme Proposition, où j'explique la difference des momens de la résistance d'un Solide, que j'appelle Coin Parabolique, il y a à la marge : *Hæc & sequentia, in quibus aut dimidium, aut quadrans figuræ datur Trabi, superflua sunt; cum satis pateat, quandoquidem trabs ex utraque extremitate sustinetur æqualiter, debere ex utraque parte trabem, figuram uniformem habere, non verò ex* III. Fig. 2. Tab. 17.

unà crassam, ex alià tenuem. Quare quæ de dimidià Parabolà & Hyperbolà, quæ de quadrante Circuli aut Ellipscos adducit, inutilia sunt; præterquamquod eodem semper Paralogismo omnia laborant.

I V. Fig. 5, Tab. 17. Dans la sixiéme Proposition, où il est parlé des momens de la résistance d'un Solide, que j'appelle Parabolique, il y a à côté : *Hæc figura suppositis supponendis est ea quam assignare debebant & Galilæus & Censor, abstrahendo scilicet à gravitate trabis, ut in hac omni inquisitione hypotheticà abstrahi debet, alioquin fit Paralogismus. Multa notanda forent pro reductione ad praxim, si quis hæc aliter quàm hypotheticè vellet sumere, secundùm enim materiæ diversitatem pleraque falsa invenirentur, & vix ullius usus hoc esse potest, nisi in navibus, & aliis machinis, in quibus levitas consideranda foret.*

V. A la fin de la douziéme Proposition, où je dis : *Nunc verò (mi VV.) quanti æstimaris, si quis eam te figuram edoceat, quà non tertia quidem ponderis aut molis portio auferatur, sed illa saltem non exigua.* L'on a écrit à côté : *Tertia pars è verà figurà aufertur.*

V I. Tab. 18. Fig. 45. Enfin, lors que je dis dans la derniere Proposition, que *Momentum in C sive Elliptici Circularis Solidi, est ad momentum resistentiæ in H, in ratione compositâ quadrati C N ad quadratum H K & rectanguli A H B ad rectangulum A C B*, il y a encore à la marge, *Falsum.* Et où je dis ensuite : *Ergo momenta in C & H erunt æqualia*, il y a encore, *falsum.*

Voilà, Monsieur, les Observations que j'ai trouvées dans l'écrit que vous m'avez renvoyé, & que j'ai marquées par nombres, afin de les sçavoir plus facilement distinguer l'une de l'autre dans le discours. Elles sont véritablement judicieuses & importantes, & si vrai-semblables, qu'à moins de s'y appliquer sérieusement, & d'en faire une exacte discussion, il est mal-aisé de les résoudre, & de se développer de l'embarras qu'elles vous ont produit.

Pour les traiter avec quelque ordre, il paroît que la 1. 2. 5. & 6. sont celles qui contiennent le nœud de la difficulté, sur lesquelles il faudra par conséquent que je m'étende un peu davantage que sur les autres. Car pour la 3. où l'on dit que toutes les Propositions où je parle des Poutres, qui ne reçoivent que la moitié ou le quart de la figure, sont superfluës, puis que l'on voit assez que la Poutre étant soûtenuë par ses deux bouts, doit avoir une figure uniforme, & n'être pas grosse par une extrémité, & menuë par l'autre; en sorte que tout ce que j'ai rapporté de la demy-Parabole, de la demi-Hyperbole, & du quart de Cercle, ou d'Ellipse, est absolument inutile.

Il me semble que j'ai quelque droit de dire, que je ne vois pas bien qu'il paroisse si clairement comme vous dites, qu'une Poutre soutenuë des deux bouts doive être de figure uniforme, puis, qu'à mon avis, deux murs se peuvent rencontrer d'une inégale épaisseur, & dont l'un seroit assez fort pour porter le plus gros bout d'une Poutre inégale; & l'autre plus foible ne pourroit souffrir le poids que d'un plus alegé: Et la question pourroit cependant être faite sur cette hypothese; Quels seroient les momens de la résistance de cette Poutre, selon la difference de ses parties?

Outre qu'ayant été proposé sous une de ces figures par M. Galilée, sçavoir sous celle de la demi-Parabole, que j'ai appellée Coin Parabolique; il étoit bien juste que je parlasse des veritables proportions des momens de la résistance de ce Solide, pour faire voir en quoi, & de combien il s'étoit équivoqué dans celles qu'il lui avoit attribuées.

Joint qu'enfin, si nous en croyons les anciens Maîtres du Métier, c'est faire injure à la dignité des Sciences Speculatives, que de ne mesurer leur estime qu'à l'utilité que les Ouvriers en reçoivent, quand ils appliquent à la matiere, & avec les imperfections qui l'accompagnent in-

séparablement, la subtilité de leur doctrine & de leurs démonstrations.

Et pour la 4e remarque où vous dites que le Solide Parabolique, duquel je parle dans ma 6e Proposition, est celui que nous devions avoir proposé & M. Galilée & moi; je n'ai rien à y répondre, puisqu'il paroît que j'y ai satisfait de ma part en le considerant, & que je ne suis pas responsable des faits de M. Galilée. Que si l'on dit que nous le devions rapporter tout seul, sans parler aucunement des autres; je me remets à ce que je viens de dire sur la 3e Observation, & à ce qui sera ci-dessous expliqué sur toutes les autres.

L'on dit ensuite qu'il faut faire abstraction du propre poids du Solide dans toutes mes Propositions, comme dans celle de M. Galilée, puis qu'autrement il y auroit Paralogisme. J'en demeure d'accord aussi-bien que M. Galilée, qui s'en est assez fait entendre avant que d'entrer en cette matiere, quand il dit: *Quello che ricerca più sottile specolazione è quando astraendo d'alla gravità propria di tali Solidi, ci fusse proposto di dover investigare, se quella forza ò peso che applicato al mezo d'un Cilindro sostenuto nelle estremità, basterebbe à romperlo, potrebbe far l'isteßo applicato in qualsivoglia altro luogo più vicino all'una che all'altra estremità.* Et comme je n'ai fait que marcher sur ses pas, j'ai crû que je pouvois librement supposer toute sa doctrine, sans être obligé de remplir mon papier de ce qui se trouvoit pleinement expliqué dans son Livre.

Enfin, sur ce que l'on ajoûte qu'il y auroit beaucoup de choses à remarquer, si l'on vouloit mettre ces Propositions en pratique, & que la diversité de la matiere y feroit trouver beaucoup de déconte: Comme c'est une plainte qui s'est faite de tout temps contre les Propositions Mathematiques, que l'imbecillité de la matiere ne peut jamais recevoir ni souffrir avec exactitude; je me tiens à ce qui y a été répondu par les Grands Hommes des

ſiécles paſſez, & à ce que l'expérience nous enſeigne de la perfection des Arts, qui n'ont d'excellence, qu'autant que leurs Ouvrages ſe trouvent approcher de plus près de la beauté des Idées, que les démonſtrations de la Théorie ont produites.

Je dirai ſeulement, ſur ce que l'on a écrit, que toutes ces méditations ne peuvent gueres avoir d'autre uſage qu'aux Navires, & aux autres machines mobiles, où l'on recherche la légéreté : Que cela n'eſt pas tout-à-fait le ſentiment de quelques perſonnes aſſez entenduës au Bâtiment, à qui je me ſouviens d'avoir oüi dire, que ſi ce n'étoit le ver qui ronge le bois, ils aimeroient beaucoup mieux ſe ſervir de Poutres de ſapin, dans les lieux où l'humidité n'eſt pas à craindre, que de celles de Cheſne, ſeulement parce que celles-là ne chargent pas tant les murailles que celles-ci.

Toutes les autres remarques, qui contiennent en effet le nœud de la difficulté, & qui ſont quaſi toutes d'un même ſens, & fondées ſur un même principe, diſent que les momens de la réſiſtance en un même point, tant de la Poutre que du Solide qui lui eſt inſcrit ſelon ſa hauteur, ne ſont pas entr'eux, comme les Quarréz des lignes perpendiculaires à la baſe commune, compriſes & en l'une & en l'autre, ainſi que je l'ai rapporté de M. Galilée, mais qu'ils ſont ſeulement dans la raiſon de ces mêmes lignes; c'eſt-à-dire, que les momens de la Poutre & du Solide Parabolique, par exemple en C, ne ſont pas, ſelon Galilée, comme les Quarrez des lignes C P & C N, mais ſeulement comme ces mêmes lignes C P & C N : Puiſque M. Galilée n'y a aucunement conſideré la quantité des parties, qui ſe doivent ſéparer l'une de l'autre, dans les ſurfaces C I & C O; & qu'en cette ſorte de réſiſtances, on n'y doit avoir aucun égard. Qu'au reſte, cela ſeroit bon, s'il ſe faiſoit diminution de plus d'une dimenſion dans ces Solides, & non pas d'une ſeule, comme il paroît dans

Fig. 5. Tab. 17.

toutes mes figures, personne n'ayant jamais recherché ce qui arriveroit en l'autre cas.

Sur quoi je dois vous dire premierement, que quelque soin que j'aye pris de relire mon Galilée, je n'ai pas pû comprendre par aucun de ses raisonnemens, qu'il ait jamais eu la pensée (non pas même dans l'hypothese, que ses Solides soient fichez par un bout, & que le poids pende librement à l'autre) de dire que les momens de la résistance de la Poutre & d'un Solide inscrit, fussent en un même point entr'eux, comme les lignes perpendiculaires à la

Fig. 1. Tab. 17. base commune, comprises en l'un & en l'autre; puisque dans la démonstration qu'il fait du Prisme triangulaire, il dit bien que le moment de sa résistance en C est au moment de sa résistance en A, comme la ligne C B est à la ligne B A, ou comme C N est à A F ou C P; mais il ne dit pas que le moment de la résistance du Prisme triangulaire en C, soit au moment de la résistance de la Poutre A E au même point C, comme la ligne C N est à la ligne C P.

Fig. 2. Tab. 17. Et dans celle qu'il rapporte du Solide Parabolique, il n'a jamais voulu que le moment de sa résistance, par exemple en C, soit au moment de la résistance de la Poutre AE au même point C, comme la ligne C N est à la ligne C P: mais au contraire, que le moment de la résistance du Coin Parabolique en C, est à son moment en A, comme le quarré de C N est au quarré de A F ou C P; puisqu'il ne peut pas autrement démontrer que les momens de la résistance en A & C, & par tout ailleurs, sont égaux, s'il ne suppose que la Composition des raisons de la résistance de A D & C O, & de leurs distances, (qui sont entre elles comme les moitiez des lignes A F & C N) est égale à la Composition des raisons de la même puissance pendante en B, & agissante tantôt avec la distance A B, & tantôt avec la distance C B, lesquelles sont entr'elles comme les quarrez des lignes A F ou C P & C N.

Je dis même dans l'Hypothese de M. Galilée, qui veut

par

par sa démonstration qu'en l'une & en l'autre des Figures le Solide soit fiché dans la muraille par un bout, tantôt en A & tantôt en C; & que l'autre extrémité B, à laquelle le poids est attaché, soit toûjours libre en l'air, sans être aucunement soûtenuë. Bien loin de l'avoir dit dans l'autre supposition, qui veut que les Solides soient soûtenus par les deux extrêmes, & que la puissance agisse entr'eux, ou qu'ils soient appuyez en quelque point entre lesdits extrêmes, sur lesquels la puissance fasse son effort: Et dans cette supposition il n'a jamais rien dit d'approchant sur cette matiere.

Je ne sçais pas aussi sur quel fondement l'on a pû dire que M. Galilée n'a jamais consideré dans la résistance les parties qui se doivent séparer l'une de l'autre dans les surfaces C I & C O, puisqu'il n'y a rien qu'il ait plus particulierement expliqué.

Et il faut à ce propos que je vous avertisse en passant d'une difficulté qui se rencontre dans son premier Livre, où voulant enseigner une maniere tout-à-fait ingénieuse pour sçavoir la mesure de la plus grande longueur à laquelle les Verges ou Cylindres de toutes sortes de grosseur & de matiére, se peuvent étendre sans se rompre d'eux-mêmes.

Piglisi (dit-il) *per essempio un fil di rame di qualsivoglia grossezza é lunghezza, è fermato un de i suoi capi ad alto, si vadia aggiungnendo all' altro maggior è maggior pezo, si che finalmente si strappi, è sia il peso massimo che potesse sostenere, V. G. cinquanta libre. E' manifesto che cinquanta libre di rame oltre al proprio peso, che sia per essempio un ottavo d'oncia, tirato in filo di tal grossezza, sarebbe la lunghezza massima del filo che se stesso potesse reggere. Misurisi poi quanto era lungo il filo che si strappò, è sia V. G. un braccio. E' perche peso un ottavo d'oncia, é resse se stesso è cinquanta libre appresso che sono ottavi d'oncia quattro mila ottocento: Diremo tutti i fili di rame di qualunche sia la lor grossezza, potersi*

reggere sino à la lunghezza di quattro mila ottocento è un braccio, è nò più.

La difficulté consiste, en ce qu'il ne se voit pas bien clairement qu'il ait dû, d'une expérience singuliere, sur un fil d'une grosseur déterminée, tirer une conséquence si génerale qu'il a faite par ces mots, *Diremo tutti i fili di rame*, &c. Ce qui est pourtant véritable, parce que tous ces fils ou Cylindres étant de même longueur, ils sont entr'eux comme leurs bases, & partant les poids qui sont entr'eux comme les Cylindres seront en la même raison de leurs bases; mais les résistances sont aussi en même proportion des bases; donc les poids & les résistances seront en même raison, & les poids seront à leur résistance, chacune à la sienne, en même proportion : Mais l'un de ces poids est supposé égal à sa résistance par la construction; Donc tous les autres poids seront aussi égaux à la résistance de leurs Cylindres, prise en la maniere qu'ils se répondent l'un à l'autre.

Mais laissant ce discours, qui sera beaucoup mieux éclairci dans la suite, il faut maintenant venir au fait, & vous bien faire connoître deux choses; la premiere, que j'ai eu juste sujet de dire que M. Galilée a pû s'être laissé surprendre, non pas en démontrant, selon son hypothese, que les momens de la résistance de son Solide Parabolique en tous ses points sont égaux, & que ce qui reste de la Poutre après que ce Solide en est ôté, fait justement la troisiéme partie de la Poutre; mais en ce qu'ayant fort bien démontré l'une & l'autre de ces deux proprietez dans un Solide fiché par un bout & l'autre libre, il a crû qu'il pouvoit en attribuer la premiere au même Solide lorsqu'il seroit soûtenu par ces deux bouts.

L'autre, que j'ai légitimement démontré les veritables proprietez des Solides, que j'ai considerez dans mon Livre, & que je n'ai fait aucun Paralogisme, quand j'ai supposé de la doctrine de M. Galilée, que les momens de

la résistance du Solide inscrit & de la Poutre en un même point, lorsque l'un & l'autre étoient soûtenus par les deux bouts, sont entr'eux comme les quarrez des lignes perpendiculaires à leur base commune, comprises en l'un & en l'autre.

Et pour vous ôter tout scrupule sur ces deux choses, il faudra vous rapporter plusieurs passages du Livre de M. Galilée, afin que vous n'ayez pas la peine de les y aller chercher, & vous entretenir un peu au long de sa doctrine, & de ses Propositions sur le sujet present de la résistance des Solides.

Il tire donc ses premieres idées de la confusion où se trouvent ordinairement les Ouvriers, qui ne rencontrant pas dans les grandes Machines, des effets proportionnez à ceux que les petites Machines, semblables aux premieres, ont accoûtumé de produire; & voyant au contraire que les plus vastes, & celles, dont les piéces qui la composent, sont de plus grande étenduë, ont beaucoup moins de force pour résister aux insultes des accidens du dehors, à proportion que les plus petites & celles dont les membres sont plus resserrez, quoiqu'ils soient entre eux en la même raison que les parties des plus grandes; ils en rapportent la cause à l'inégalité de la matiere, & à l'imperfection de l'Art, comme si des causes si foibles pouvoient suffire à la production des effets si differens, & d'une si énorme difformité.

Mais M. Galilée considerant la chose d'une autre maniere, & après une méditation, comme il dit de plusieurs années, a cru à la fin en avoir trouvé les veritables raisons; & argumentant à la façon des Géométres, & sur les anciens principes de la Méchanique, il est le premier qui ait fait connoître, que les résistances des Solides, c'est-à-dire, la force qu'ils ont d'eux-mêmes à soûtenir leur propre poids, & résister à la violence des coups du dehors, ne marchoient pas entr'elles avec les mêmes proportions

que les gravitez des mêmes Solides: & que celles-ci s'augmentant en la raiſon, & à meſure que les corps peſans d'une même matiere s'agrandiſſent; la réſiſtance au contraire ſuivoit une bien moindre proportion, & elle ſe trouvoit beaucoup affoiblie dans les grands corps, & bien moins capable de ſoûtenir des efforts, qu'elle n'étoit à proportion dans les moindres.

Je ſerois trop long, ſi je voulois vous raconter tout ce qu'il a admirablement écrit ſur cette matiere: auſſi je me contenterai de vous rapporter ce qui fait à mon ſujet, & vous dire premierement; Que ſuppoſant, par exemple, un Cylindre attaché en haut par un de ſes bouts, & un poids pendant à l'autre, qui ſoit petit à petit augmenté de telle ſorte qu'il devienne à la fin aſſez fort pour rompre le Cylindre: Ce poids que j'ai ſuppoſé le plus grand de tous ceux que le Cylindre puiſſe ſoûtenir ſans ſe rompre, joint au propre poids du Cylindre, s'appelle par M. Gali-
A. lée, *La meſure de la réſiſtance abſoluë de ce Cylindre*, laquelle conſiſte en la tenacité & attachement des parties contenuës dans les ſurfaces qui ſe doivent ſéparer l'une de l'autre par la rupture, & en l'effort que chacune fait en particulier pour demeurer liée & adhérente à ſes voiſines.

Enſuite il dit, que ſi un Cylindre ou Priſme eſt fiché par un bout perpendiculairement dans une muraille qui ſoit à plomb, & qu'à ſon autre bout on attache le plus grand poids qu'il puiſſe ſoûtenir ſans ſe rompre, (faiſant abſtraction de la propre Gravité du Cylindre) ce poids s'appelle,
B. *La meſure du moment de la réſiſtance du Cylindre en cette poſition*; & la réſiſtance abſoluë eſt à ce moment de la réſiſtance, comme la longueur du Cylindre eſt à la moitié du diamétre de la baſe.

Fig. 1. Tab. 19. De plus, pour démontrer que les momens de la réſiſtance des Priſmes ou Cylindres de même longueur & de differente groſſeur, comme A & B, fichez, comme il a été dit ci-deſſus, dans une muraille, ſont entr'eux com-

me les Cubes des diamétres de leurs bases C D, E F, il se sert de ces mots : *Imperò che se consideriamo l'assoluta è semplice resistenza che risiede nelle basi, cioè nè i cherchi E F, C D; all' essere strappati facendogli forza col' tirargli per dritto, nò è dubbio che la resistenza del Cilindro B è tanto maggiore che quella del Cilindro A, quanto il cerchio E F è maggiore del C D, perche tanto più sono le fibre, i filamenti ò le parti tenaci che tengono unite le parti de i solidi. Mà se consideriamo che nel far forza per traverso ci serviamo di due leve, delle quali le parti ò distanze dove si applicano le forze sono le linee D G, F H; i sostegni sono ne i punti D F: Mà le altre parti ò distanze dove son poste le resistenze, sono i semidiametri de i cherchi D C, E F; perche i filamenti sparsi per tutte le superficie de i cerchi, è come se tutti si riducessero ne i centri. Considerando, dico, tali leve, intenderemo la resistenza nel centro della base E F contro alla forza di H, essere tanto maggiore della resistenza della base C D contro alla forza posta in G, (è sono le forze in G & H di leve eguali D G, F H) quanto il semidiametro F E è maggiore del semidiametro D C: Cresce dunque la resistanza all' essere rotta nel Cilindro B sopra la resistenza nel Cilindro A, secondo amendüe le proportioni de i cerchi E F, D C è de i lor semidiametri*, &c. c'est-à-dire, en raison triplée des diamétres. C.

Ce que j'ai bien voulu vous rapporter tout au long, pour faire voir que M. Galilée a toûjours consideré dans les momens de la résistance des Solides, & les parties contenuës dans les surfaces qui doivent être séparées, & la distance de leur action; ne voulant pas m'arrêter présentement à vous expliquer à fonds cette proposition, qui prise en un sens & crûëment, est paralogistique; me réservant à vous en entretenir plus au long une autre fois, d'autant plus volontiers, que cette réflexion ne fait rien du tout à notre sujet.

Monsieur Galilée rapporte par après quantité de merveilleuses proprietez des Cylindres de toutes sortes de

grosseur & de longueur, égaux & inégaux, semblables & dissemblables; & toûjours dans la même hypothese, qu'ils soient attachez par un bout à un mur, & que l'autre s'étende librement en l'air, sans être soûtenu d'aucune chose.

Après quoi il entre en une autre consideration à leur égard; & recherchant ce qui arrive aux Cylindres soûtenus sur les deux bouts, ou sur un point pris entre les extré-
D. mitez, il dit: *Che il Cilindro che gravato dal' proprio peso sarà ridotto alla massima lunghezza oltre alla quale più non si sosterrebbe, ò sia retto nel mezzo da un sol sostegno, ò verò di due nell' estremità potrà esser lungo il doppio di quello che sarebbe fitto nel muro, cioè sostenuto in un sol termine. Il che per se*
Fig. 2. Tab. 19. *stesso è assai manifesto, perche se intenderemo del Cilindro ch'io segno A B C, la sua metà A B essere la summa lunghezza potente à sostenersi stando fissa nel termine B, nell' istesso modo si sosterrà se posita soprà il sostegno G sara contrapesata d'all' altra sua metà B C. E' similmente sè del Cilindro D E F la lunghezza sara tale, che solamente la sua metà potesse sostenersi fissa nel termine D, è in consequenza l'altra E F fissa nel termino F, è manifesto che posti i sostegni H I sotto le estremità D F, ogni momento che si aggiunga di forza ò di peso in E, quivi si farà la rottura.*

Et passant outre par ses méditations, il recherche, en faisant abstraction du propre poids des Cylindres, quelle proportion les puissances ont entr'elles, qui peuvent rompre les Cylindres, appuyez sur les deux extrêmes & faisant leur effort sur le milieu, ou sur un autre point qui soit plus proche d'un bout que de l'autre. Sur quoi il démontre que ces puissances, qu'il appelle autrement les momens
E. de la résistance du Cylindre, sont entr'elles en proportion réciproque des rectangles faits des parties du côté, contenuës entre les extrémitez & le point où les puissan-
Fig. 3. 4. Tab. 19. ces agissent; c'est-à-dire, qu'au Prisme ou Cylindre A B, soit qu'il soit soûtenu tantôt en C, & tantôt en D, & que la puissance agisse des extrêmes A & B; soit qu'il soit soû-

tenu sous ses extrêmes A & B, & que la puissance fasse ses efforts tantôt au point D, tantôt en C; le moment de la résistance en D est au moment de la résistance en C, comme le rectangle A C B est au rectangle A D B.

D'où il paroît, dit-il, qu'en tout Prisme ou Cylindre, le moment de la résistance qu'il a dans son milieu, est le moindre de tous, & que ces momens s'augmentent toujours à mesure qu'ils s'éloignent du milieu, & qu'ils approchent de l'un ou de l'autre des extrêmes, & que *nelle travi grandissime è gravi se ne potrebbe levar nò piccola parte verso l'estramità con notabile allegerimento di peso, che ne i travamenti di grandi stanze, sarebbe di commodo è utile non piccolo. E' bella cosa sarebbe il ritrovar quale figura deurebbe haver quel tal solido, che in tutte le sue parti fuse egualmente resistente, tal che nò più facile fusse ad essere rotto da un peso che lo premese nel mezzo che in qualsivoglia altro luogo.* F.

Après quoi il dit immédiatement, que comme il a démontré que la résistance du Prisme Quadrangulaire D B dans son extremité A D contre une force agissante en B, est à sa résistance en C I contre la même puissance en B, comme la ligne C B est à la ligne A B, c'est-à-dire, comme C N est à A F. Et qu'au Prisme Triangulaire inscrit F A B G D, la résistance en A D contre la force en B, est (ainsi qu'il le démontre en ce même endroit) à sa résistance en C O contre la même force en B, comme la ligne A B est à C B, ou comme A F est à C N: *Habbiano dunque* (dit-il) *nel trave ò Prisma D B levatone una parte, cioè la metà segandolo diagonalmente, è lasciato il Cuneo ò Prisma triangolare F B A; è sono due solidi di conditioni contrarie, cioè quello tanto più resiste quanto più si scorcia, è questo nello scorciarsi perde altrettanto di robustezza. Ora stante questo par ben ragionevole, anzi pur necessario che se gli possadar un taglio, per il quale togliendo via il superfluo rimanga un solido di figura tale, che in tutte le sue parti sia egualmente resistente.* Fig. 1. Tab. 17. G.

Fig. 1. Tab. 17. Et puis il démontre fort bien ensuite, que si la Poutre D B est coupée par une ligne Parabolique F N B, qui fasse le Solide inscrit F A B G, sa résistance en A D contre la force en B, sera égale à la résistance en C O contre la même

II. me puissance en B, & ainsi par tout ailleurs. *Di qui si vede,* dit-il, *come con diminuzione di peso di più di trenta trè per cento, si posson fare i travamenti senza punto diminuir la loro gagliardia, il che ne i navigli grandi in particolare per reggere le coperte puo essere d'utile non piccolo, atteso che in cotali fabriche la legerezza importa infinitamente.* Sagr. *Le utilità son tante che lungo ò impossibil sarebbe il registrarle tutte.*

Ce sont-là les passages du Livre de M. Galilée, dont j'avois besoin pour mon sujet, que j'ai cottez par lettres Capitales, & d'où vous pouvez facilement connoître qu'il a crû que les Poutres & les Solides triangulaires, dont il a recherché les proprietez, devoient être soûtenus par les deux extrêmes, & souffrir l'effort des puissances pressantes sur differentes parties entre les bouts, puisque les textes cottez F & H vous empêcheront d'en douter, aussi-bien que tout le raisonnement qui les précede.

Et que néantmoins dans la démonstration qu'il en a faite, il les a absolument supposé fichez par un bout & libres par l'autre, puisqu'il dit clairement, que dans le

Fig 1. Tab. 17. Prisme D B la résistance en A D contre une force en B, étoit à la résistance en C I contre la même puissance en B, comme la ligne C B est à la ligne A B. Ce qui dans cette hypothese peut être démontré de cette maniere : Et supposé ce qui a été enseigné par d'autres ; Que si deux raisons ont un même antécédent, elles seront entre elles comme réciproquement les termes conséquens. Maintenant, la résistance étant la même dans les surfaces A D & C I ; les raisons de la résistance A D contre une force en B agissante avec la distance A B, & de la résistance C I contre la même force en B agissante avec la distance C B, auront un même antécédent, sçavoir cette résistance

A D

A D ou C I ; & partant elles seront entre elles comme réciproquement les termes conséquens ; c'est-à-dire, que la résistance A D contre une force en B, sera à la résistance C I contre la même force en B, comme la force en B agissante avec la distance C B, est à la même force en B agissante avec la distance A B. Mais comme dans ces momens la force est la même, ils seront comme les distances de leur action, c'est-à-dire, comme la ligne C B à la ligne A B : Donc la résistance en A D contre une force en B, sera à la résistance en C I contre la même force en B, comme la ligne C B est à la ligne A B.

Que si quelqu'un vouloit soûtenir avec opiniâtreté, que M. Galilée a supposé dans sa démonstration que le Prisme D B fut soûtenu par ses deux extrêmes, il ne faudra que prendre un autre point comme H, & dire en cette maniere : Le moment de la résistance en C du Prisme D B, est au moment du même Prisme en A, comme A B est à C B par l'hypothese de la démonstration de M. Galilée ; & par la même raison le moment en A est au moment en H, comme la ligne H B est à A B : Donc par égalité le moment de la résistance en C du Prisme D B soûtenu sur ses deux bouts, sera au moment en H, comme la ligne H B est à C B. Mais par une autre démonstration cottée cy-dessus par la lettre E, il a fait voir dans la même hypothese que la résistance du Prisme D B en C étoit à la résistance en H, comme le rectangle A H B est au rectangle A C B : Donc le rectangle A H B sera au rectangle A C B comme la ligne H B est à la ligne C B ; ou, en prenant A C pour hauteur commune, comme le rectangle A C, H B au rectangle A C B : & par conséquent le rectangle A C, H B sera égal au rectangle A H B, & la ligne A C égale à la ligne A H, la partie au tout. Ce qui est absurde. Fig. 1. Tab. 17.

J'ai donc eu raison de dire que la démonstration de M. Galilée ne convient pas à sa supposition ; & qu'encore qu'il

eût fort bien démontré que certaines proprietez appartiennent aux Solides fichez par un bout, & libres par l'autre, il n'a pas eû pour cela aucun droit de dire qu'elles dûssent être énoncées des mêmes Solides qui seroient soûtenus par les deux bouts.

Pour la solution de l'autre difficulté que j'ai gardée pour la derniere, parce que c'est celle de laquelle il paroît que l'on doute le plus, puis qu'en toutes les propositions où elle est supposée, l'on la traite de faux & de paralogisme. Je veux dire, pour démontrer que les momens de la résistance en un même point de la Poutre & du Solide, qui lui est inscrit selon la hauteur, sont entre eux comme les quarrez des lignes perpendiculaires sur leurs bases communes, qui sont comprises en l'une & en l'autre, c'est-à-dire, comme les quarrez de leurs hauteurs au même point.

Il faut premierement se souvenir, ainsi qu'il est dit dans le discours cotté cy-dessus par la lettre B, que la résistance absoluë d'un Prisme fiché perpendiculairement par un de ses bouts dans un mur, est au moment de la résistance du même Prisme en cette situation, (faisant abstraction de la Gravité) comme la longueur du Prisme est au demi-diamétre de sa base.

Secondement, Que les résistances absoluës des Solides semblables & de même matiere, sont entre elles comme leurs bases; comme il est dit au discours cotté A.

Troisiémement, Qu'un Cylindre ou Prisme, au texte cotté D, reçoit les mêmes propriétez pour sa résistance, soit qu'il pose sur ses extrêmes & que la force agisse en differens endroits entre les bouts, ou qu'il s'appuye en quelque part entre ses bouts, & que la puissance fasse son effort sur les extrêmes; puisque c'est de cette sorte que M. Galilée l'a entendu, & qu'il s'en est clairement expliqué dans les discours rapportez cy-dessus au même texte D.

Fig. 3. Tab. 19. Joint que sa proposition, par laquelle il démontre au

texte cotté E, que les momens en D & C du Prisme ou Cylindre A B, aux extrémitez duquel A & B, les poids ou puissances agissent, & qui est appuyé tantôt en D, tantôt en son milieu C, sont entre eux comme le rectangle A C B est au rectangle A D B : Cette Proposition, dis-je, se peut aussi, suivant son même raisonnement démontrer dans l'autre hypothese, qui veut que le Prisme ou Cylindre soit soûtenu en A & B, & que les poids & les puissances agissent tantôt en D, tantôt en C : Car supposant le poids F, qui est égal à la résistance en D, être divisé en deux parties I & H, de telle sorte que I soit à H, comme la ligne D B est à la ligne D A, (afin que le poids I soit égal au moment de la résistance du Prisme A D fiché en A, & le poids H égal au moment de la résistance du Prisme D B fiché en B); & le poids E, qui est égal à la résistance en C, être divisé en deux moitiez, dont l'une soit G; le poids E sera au poids F, c'est-à-dire, la résistance en C à la résistance en D, en raison composée du poids E au poids G, du poids G au poids H, & du poids H au poids F. Mais le poids E est au poids G, comme la ligne A B est à C B; le poids G est au poids H, comme la ligne D B est à C B; & le poids H est au poids F, comme la ligne A D est à A B: Donc le poids E sera au point F, en raison composée de la ligne A B à la ligne C B, de la ligne D B à la ligne C B, & de la ligne A D à la ligne A B : Mais les raisons des lignes A D à A B & A B à C B, sont égales à la raison de la ligne A D à C B: Donc la raison du poids E au poids F, ou du moment en C au moment en D, sera composée des raisons de A D à C B & de B D à C B; c'est-à-dire, comme le rectangle A D B au quarré C B, ou au rectangle A C B. *Fig. 4. Tab. 19.*

Quatriémement, Il est bon de prendre garde qu'en matiere de résistance des Solides, où l'on fait abstraction de leur propre gravité, la varieté de leurs figures ne fait effet qu'en tant qu'elles déterminent plus ou moins la distance de l'action de la puissance qui agit contre la résistance, &

la grandeur de la surface où se doit faire la rupture, laquelle contient plus ou moins de parties, qui se doivent
Fig. 1. Tab. 20. séparer. Je veux dire, que dans le Solide A B E, le moment de la résistance en C, n'est aucunement alteré, quelque irrégularité de figure que l'on donne au Solide, comme celle de A P X B; pourvû que le point C, soit toujours en tous les cas, distant en la même maniere des extrêmes A & B, & que la surface C P I, qui contient les parties qui doivent être divisées l'une de l'autre, soit toujours la même. Et cela est à mon avis assez facile à comprendre, puisque les deux choses, en quoi les Solides sont differens l'un de l'autre, comme sont leurs formes ou figures & leurs propres poids, l'une n'entre point en considération dans les momens de la résistance, & il est fait abstraction de l'autre. Et les deux choses au contraire sur qui roulent toutes les raisons des résistances, c'est-à-dire, la longueur des leviers, & la quantité & situation des parties résistantes, dans les surfaces où la rupture se doit faire, y demeurent égales, ou plûtôt les mêmes en tous les cas.

En sorte que l'on pourra facilement juger, que pour déterminer le moment de la résistance en C du Solide difforme A P X B, il suffira de faire connoître celui du Prisme A E au même point C, dont la longueur A B est commune, aussi-bien que la surface C P I, qui est perpendiculaire à la ligne A B, & où se doit faire la rupture sur le point C.

Cinquiémement, Puisque par le discours de M. Galilée cotté cy-dessus D, il paroît qu'un Prisme, soûtenu par ses deux bouts ou seulement en son milieu, & qu'on suppose étendu jusqu'à sa plus grande longueur, sans qu'il se rompe de son propre poids, est le double de celui, qui n'étant fiché que par un bout, sera aussi alongé autant
Fig. 2. Tab. 20. qu'il se peut sans se casser. Comme si le Prisme A B, soûtenu sur son milieu C, est supposé être étendu en sa plus grande longueur, sans qu'il se rompe en cette situation; il est, dit M. Galilée, le double du Prisme C B, qui

attaché par un de ſes bouts en C, ſera auſſi étendu autant qu'il le puiſſe être pour ſe ſoûtenir : Puiſqu'en cette hypotheſe le contrepoids que fait toute la partie A C pour tenir en équilibre le Priſme C B, fait à ſon égard le même effet que ſi le ſuſdit C B étoit fiché dans le mur en C, ne pouvant pas ſe mouvoir ſur le point C, tant en l'un qu'en l'autre cas, ſans ſe rompre.

Maintenant, ſi nous prenons la moitié du côté C B comme C E, & faiſant abſtraction de ſa propre Gravité, que nous ſuppoſerons être entierement ôtée ; ſi nous appliquons en E le poids I, qui ſoit égal à toute cette gravité du Cylindre C B ; il eſt conſtant qu'il fera le même effet qu'auparavant : Et ſi prenant tout autre point comme D, nous y mettons le poids K, qui ſoit au poids I, comme la ligne C E eſt à la ligne C D ; il eſt encore manifeſte que les choſes demeureront au premier état, & que le poids K agiſſant en D avec la diſtance C D, ſera égal à la réſiſtance du Priſme C D contenuë dans la ſurface C P, ſoit que le Priſme C D ſoit fiché dans le mur en C, ſoit qu'il ſoit arrêté ſur le point C par le Priſme C A qui lui contrepeſe. Et que ſi l'on prend la ligne C F égale à C D, & le poids L égal à K, après avoir auſſi fait abſtraction de la propre Gravité du Priſme C A & C F, il arrivera encore la même choſe : Et par conſéquent, comme le poids K eſt la meſure du moment de la réſiſtance du Priſme D C attaché en C, les deux poids égaux K & L ſeront auſſi la meſure du moment de la réſiſtance du Priſme F D appuyé en C, lorſque les puiſſances ſont en D & F, ou appuyé en D & F, lorſque la puiſſance eſt en C.

Or eſt-il que, par la propoſition de M. Galilée que nous avons rapportée cy-deſſus ſous la lettre B, la réſiſtance abſoluë, qui eſt la même aux Priſmes F D & C D, eſt au moment de la réſiſtance du Priſme C D, comme la ligne C D eſt à C G. demidiametre de la baſe ; & le moment de la réſiſtance du Priſme C D, eſt au moment du

Priſme ou Cylindre F D, comme la ligne C G eſt à la ligne C P, (le moment de C D égal au poids K, étant la moitié du moment de F D qui eſt égal aux deux poids K & L, comme C G demidiametre de la baſe eſt la moitié du diamétre C P:) Donc, par égalité, la reſiſtance abſoluë ſera au moment de la réſiſtance du Priſme F D ſoûtenu en C, comme la ligne C D eſt au diamétre C P. Ce qu'il faut remarquer.

Fig. 3. Tab. 10. Voyons à préſent ce qui arrive aux Priſmes de même longueur & largeur, & qui ne different qu'en leur hauteur, c'eſt-à-dire, pour me ſervir de vos termes, dans leſquels il ſe fait diminution que d'une ſeule dimenſion: Comme A B F E & A B Q L, dont les longueurs A B & largeur P I ou N O ſont égales, mais les hauteurs C P & C N ſont inégales: Je dis que le moment de la réſiſtance du Priſme A E dans ſon milieu C, eſt au moment du Priſme A L dans le même point C, en même raiſon que le quarré de la ligne C P eſt au quarré de la ligne C N. Car la raiſon du moment de la réſiſtance en C du Priſme A E, au moment de la réſiſtance en C du Priſme A L, eſt compoſée des raiſons du moment en C du Priſme A E à ſa réſiſtance abſoluë, de la réſiſtance abſoluë du Priſme A E à la réſiſtance abſoluë du Priſme A L, & de la réſiſtance abſoluë du Priſme A L au moment de ſa réſiſtance en C: Mais il vient d'être enſeigné cy-deſſus, que le moment de la réſiſtance en C du Priſme A E eſt à ſa réſiſtance abſoluë, comme le diamétre C P eſt au côté C B & la réſiſtance abſoluë du Priſme A E, par ce qui a été cy-deſſus rapporté de M. Galilée ſous la lettre C, à la réſiſtance abſoluë du Priſme A L, comme la ſurface C I eſt à C O, c'eſt-à-dire, comme la ligne C P eſt à C N; & la réſiſtance abſoluë du Priſme A L eſt au moment de ſa réſiſtance en C, comme le côté C B eſt au diamétre de la baſe C N. Donc la raiſon du moment de la réſiſtance en C du Priſme A E, au moment en C du Priſme A L, ſera compoſée des rai-

ſons du diametre C P au côte C B, de la ligne C P à la ligne C N, & du côté C B au diametre C N : Mais les raiſons de C P à C B & C B à C N ſont égales à la raiſon de C P à C N. Donc la raiſon du moment A E en C au moment de A L en C, ſera composée des raiſons de la ligne C P à C N & C P à C N, c'eſt-à-dire, comme le quarré de C P au quarré de C N.

Je dis bien davantage ; que ſi l'on prend quelqu'autre point que ce puiſſe être comme H, le moment de la réſiſtance du Priſme A E au point H, ſera encore au moment de la réſiſtance du Priſme A L au même point H, comme le quarré de H M ou C P au quarré de H K ou C N. Car la raiſon du moment de la réſiſtance du Priſme A E au point H, au moment de la réſiſtance du Priſme A L au même point, eſt composée des raiſons du moment de A E en H, au moment du même A E en ſon milieu C ; du moment du Priſme A E en C, au moment du Priſme A L au même point C ; & du moment du Priſme A L en C, au moment du même Priſme A L au point H. Mais le moment de la reſiſtance du Priſme A E au point H, eſt au moment du même Priſme A E en C, comme le rectangle A C B eſt au rectangle A H B ; le moment de la réſiſtance du Priſme A E en C, eſt au moment du Priſme A L en C, comme le quarré du diamétre P C, eſt au quarré du diamétre C N ; & le moment de la réſiſtance du Priſme A L en C, eſt à ſon moment en H, comme le rectangle A H B au rectangle A C B Donc la raiſon du moment de la réſiſtance du Priſme A E en H, au moment de la réſiſtance du Priſme A L au même point H, ſera composée des raiſons du rectangle A C B au rectangle A H B, du quarré P C au quarré C N, & du rectangle A H B au rectangle A C B. Mais la raiſon de A C B à A H B détruit celle de A H B à A C B. Il ne reſte donc plus que la raiſon du quarré P C au quarré C N ou du quarré H M au quarré H K, à laquelle ſoit égale la raiſon du moment de la réſiſtance du

Prisme A E au point H, au moment de la résistance du Prisme A L au même point H.

Fig. 3. Tab. 20. Maintenant, si l'on étend un Solide, quel qu'il puisse être, comme l'un de ceux que nous avons consideré A K P B R I S, qui soit inscrit dans la Poutre A E, en sorte qu'il soit de même longueur & largeur qu'elle, & qu'il passe par le point K, par où il faut s'imaginer une autre Poutre A L; il paroît par les choses démontrées cy-dessus, que le moment de la résistance de ce Solide inscrit au point H, est le même que le moment de la Poutre A L au même point; lequel étant au moment de la Poutre A E au point H, en la raison du quarré de H K au quarré de H M; il s'ensuit que le moment de ce Solide inscrit en H, est au moment de la Poutre A E au même point, comme le quarré de H K à H M ou de C P à C N, & non pas en même raison que les lignes C P & C N, comme vous l'avez marqué. Et que je n'ai point fait de Paralogisme, quand sur cette proposition j'ai conclu que les momens des Solides Paraboliques, en quelque maniere qu'ils soient inscrits dans la Poutre selont sa hauteur, ne sont point égaux entre eux; & que ceux du Demi-cercle & de l'Ellipse le sont en tous leurs points.

Fig. 1. Tab. 21. Je dis des Solides Paraboliques inscrits dans la Poutre selon sa hauteur, parce que la même Poutre peut être coupée par une ligne Parabolique selon sa largeur, en sorte qu'étant soûtenuë par les deux bouts, les momens de la résistance soient égaux en toutes ses parties. Comme si la Poutre A E est coupée sur sa largeur G E par une Parabole G I F, dont l'axe soit la même largeur P I, le sommet I & l'amplitude toute la longueur de la Poutre G F, & qui fasse, dans la Poutre, le Solide Parabolique GIFBOA de même hauteur & longueur qu'elle.

Je dis que les momens de la résistance de ce Solide Parabolique soûtenu sur ses extrêmes A & B, sont par tout égaux; c'est-à-dire, que si ce Solide est rompu par une puissance

puissance ou un poids, agissant au point M ou H, il sera rompu par la même puissance ou le même poids, qui fera effort au point P ou C ; & ainsi des autres.

Parce que le moment au point H du Solide Parabolique, est à son moment au point C, en raison composée de la raison du moment du Parabolique en H, au moment de la Poutre A C au même point H ; de la raison du moment de la Poutre en H, à son moment en C ; & de la raison du moment de la Poutre en C, au moment du Parabolique au même point C : Mais la raison du moment de la résistance du Solide Parabolique au point H, au moment de la Poutre A E au même point H, est la même que celle des Parties du Solide, qui se doivent séparer dans la surface H N, aux parties contenuës dans la surface de la Poutre H K ; c'est-à-dire, comme la même surface H N, est à la même surface H K, ou comme la ligne M N à M K ou P I (à cause que les surfaces H N & H K ont une même hauteur H M :) Et la raison du moment de la Poutre en H, à son moment en C, est la même que celle du rectangle A C B au rectangle A H B ; & la raison du moment de la Poutre en C, au moment du Solide Parabolique au même point C, est celle d'égalité ; puisque c'est le même moment en l'un & en l'autre, par ce qui a été dit ci-dessus. Et partant le moment de la résistance du Solide Parabolique en H, au moment du même Solide au point C, sera en raison composée des raisons de la ligne M N à la ligne P I, & du rectangle A C B au rectangle A H B. Mais par la proprieté de la Parabole la ligne M N est à la ligne P I, comme le rectangle A H B est au rectangle A C B : Donc le moment de la résistance du Solide Parabolique au point H, sera au moment de la résistance du même Solide au point C, en raison composée de celles du rectangle A H B au rectangle A C B, & du rectangle A C B au rectangle A H B, c'est-à-dire, en raison d'égalité. Et la même chose pouvant être concluë de la même maniere en tous les points

de la baſe AB, il s'enſuit que les momens du Solide Parabolique ſont égaux, en quelque point que la puiſſance ou le poids agiſſent.

La même choſe ſe peut encore démontrer d'une autre Solide Parabolique double C R X Q D P S O, qui ſera fait dans la Poutre A E, ſi ſa largeur G E eſt coupée par les deux Paraboles oppoſées en dedans D P S & D O S, dont les ſommets ſont aux points P & O, l'axe P O commun, auſſi-bien que l'amplitude D S; parce qu'en ce cas, & ſuppoſé que ce Solide ſoit ſoûtenu par ſes extrêmes Q & R: Je dis que les momens de ſa réſiſtance ſont par tout egaux.

Fig. 2. Tab. 21.

Car ſi l'on entend que la puiſſance agiſſe au point K ou H, & puis au point N ou C; le moment de la réſiſtance du double Parabolique en H, ſera à ſon moment en C, en raiſon compoſée du moment du Parabolique en H, au moment du Priſme A E au même point H ou I; du moment du Priſme en I, à ſon moment en C; & du moment du Priſme en C, au moment du Parabolique au même point C. Mais la raiſon du moment du Solide Parabolique au point H, au moment de la Poutre A E au même point H ou I, eſt la même que celle de la ſurface H L à la ſurface I M, c'eſt-à-dire, (à cauſe de la commune hauteur F H) de la ligne H T ou F L à la ligne Z M ou P O; & la raiſon du moment de la Poutre A E en I à ſon moment en C, eſt la même que celle du rectangle A C B au rectangle A I B, c'eſt-à-dire, du rectangle D N S au rectangle D K S; & enfin la raiſon du moment de la Poutre en C, au moment du Solide Parabolique au même point C, eſt la raiſon d'égalité: Et partant la raiſon du moment de la réſiſtance du Solide Parabolique au point H, au moment du même Solide au point C, ſera compoſée des raiſons de la ligne F L à la ligne P O, ou, prenant les moitiez, de la ligne F K à la ligne P N, & du rectangle D N S au rectangle D K S: Mais par la proprieté de la Parabole, la ligne FK eſt à la ligne PN, comme le rectangle DKS eſt au rectangle DNS:

Donc le moment de la résistance du Solide Parabolique au point H, à son moment au point C, sera en raison composée des raisons du rectangle D K S au rectangle D N S, & du rectangle D N S au rectangle D K S, c'est-à-dire, en raison d'égalité. Ce qui se pouvant dire en la même maniere de tous les points de la base du Solide Parabolique, on peut conclure que les momens de la résistance sont par tout égaux.

J'ai été bien-aise de vous rapporter les proprietez de ces Solides Paraboliques, afin de vous avertir en même temps, que cette égalité de momens de leurs résistances, ne fait rien du tout au Théoréme de M. Galilée, qui est toûjours faux en la maniere qu'il l'a proposé, n'ayant jamais, en toutes ses figures & en tous ses raisonnemens, consideré les sections ou coupes des Prismes ou Poutres en autre maniere que selon leur hauteur, & jamais selon leur largeur.

Et pour vous ôter le scrupule qui vous peut rester sur cette matiere, en sorte que vous ne puissiez plus douter, comme vous faites, qu'un si grand Homme ait pû se méconter; je veux vous faire voir encore quelques exemples, que j'ai tirez de ses mêmes Dialogues méchaniques, qui me font peine, & que je souhaiterois avoir été plus clairement expliquez par leur Auteur.

Le premier est celui dont je vous ai dit un mot ci-dessus au texte cotté C, qui fait la 4. Prop. du 2. Dial. des Mech. où il dit, qu'aux Cylindres ou Prismes de même longueur, & de differentes grosseurs, les momens de la résistance croissent en raison triplée des diamétres de leurs bases; c'est-à-dire, que le moment de la résistance du Cylindre B, est au moment de la résistance du Cylindre A, comme le Cube de la ligne EF, est au Cube de la ligne CD. *Fig. 4. Tab. 20.*

Ce qui ne peut pas être véritable, s'il ne fait abstraction du poids des Cylindres A & B, dont il ne parle pourtant point du tout; au contraire, par la liaison de cette Propo-

ſition avec la précedente, il ſemble que les momens de la réſiſtance doivent être conſiderez, dans cette Propoſition, comme les momens du poids ou de la puiſſance ſont conſiderez dans la 3ᵉ Prop. qu'il conclut en ces termes : *Concludaſi per tanto, i momenti delle forze de i Priſmi e Cilindri egualmente groſſi, mà diſegualmente lunghi eſſer trà di loro in duplicata proporzione di quella delle lor lunghezze, cioè eſſer come i quadrati delle lunghezze.*

Monſtreremo adeſſo nel ſegondo luogo, ſegondo qual proporzione creſca la reſiſtenza all' eſſer ſpezzati ne i Priſmi e Cilindri, mentre reſtino della medeſima lunghezza, è ſi accreſca la groſſezza. E' qui dico che (Prop. 4.) *Ne i Priſmi è Cilindri egualmente lunghi, ma diſegualmente groſſi, la reſiſtenza all' eſſer rotti creſce in triplicata proporzione de i diametri delle lor großezza, cioè delle lor baſi.*

Ce qui fait voir que les momens du poids, ou de la puiſſance, ayant été conſiderez, dans la 3ᵉ Prop. relativement au moment de leur réſiſtance ; les momens de la réſiſtance doivent, par la même raiſon, être conſiderez, dans la 4ᵉ Prop. avec rélation aux momens des puiſſances.

Auquel cas, comme les momens des puiſſances, dans la 3ᵉ Prop. ſont en raiſon doublée des côtez des Cylindres, à cauſe que le moment de la réſiſtance eſt le même en l'un & en l'autre ; il faudroit de même, dans la 4ᵉ Prop. que les momens des poids des Cylindres de même longueur & de differente groſſeur, fuſſent toûjours égaux, pour conclure que les momens de leurs réſiſtances, ſont comme les Cubes des diamétres de leurs baſes.

Mais comme les momens des poids de ces Cylindres ne ſont point égaux, auſſi les momens des réſiſtances ne croiſſent pas, ſur cette hypotheſe, en la même raiſon que les Cubes des diamétres de leurs baſes, mais ſeulement en celle des mêmes diamétres. Ce que je démontre en cette Fig. 4. Tab. 20. maniere, après avoir coupé les lignes D G & F H en deux également en K & L, auſſi-bien que les deux C D & E F en M & I, & fait F N égale à D M.

La résistance absoluë du Cylindre A, est à la résistance absoluë du Cylindre B, comme la base C D est à la base E F: Et parce que les Cylindres sont de même longueur, ils seront aussi comme leurs bases, aussi-bien que leur poids; & partant le poids du Cylindre A, sera au poids du Cylindre B, comme la résistance absoluë du Cylindre A, est à la résistance absoluë du Cylindre B. Maintenant, comme le centre de l'action de la résistance absoluë du Cylindre A, fiché dans le mur à angles droits, est au centre de la base M; & le centre de l'action du poids du même Cylindre A est au point K, en sorte que la résistance absoluë résiste par la ligne D M, & le poids agit par la ligne D K: Si nous supposons que le centre de l'action de la résistance du Cylindre B soit au point N, comme le centre de l'action du poids du même Cylindre est au point L, en sorte que la résistance absoluë du Cylindre B résiste par la ligne F N, égale à la ligne D M, ainsi que le poids du même Cylindre B agit par la ligne F L, égale à la ligne D K, il n'y aura, dans cette supposition, aucun changement aux raisons des poids ni des résistances; & le moment de la résistance du Cylindre A en M, sera au moment de la résistance du Cylindre B en N, comme le moment du poids A en K, est au moment du poids B en L; & en permutant, la raison du moment de la résistance du Cylindre A en M, au moment du poids du même Cylindre A en K, sera égale à la raison du moment de la résistance du Cylindre B en N, au moment du poids du même Cylindre B en L. Mais parce que le centre de l'action de la résistance du Cylindre B est au point I, centre de la base E F; & le moment de la résistance au point I, est au moment de la résistance au point N, comme la ligne F I à la ligne F N, c'est-à-dire, D M; ou prenant leurs doubles, comme le diamétre E F est au diamétre C D; il s'ensuit que le moment de la résistance du Cylindre B en I, au regard du moment du poids B en L, est plus grand que le moment de la résistance du même

Cylindre B en N, au regard du même poids B en L; c'est-à-dire, (en prenant des raisons égales) plus grand que le moment de la résistance du Cylindre A en M, au regard du poids A en K; en la même raison que le diamétre E F est plus grand que le diamétre C D: & par conséquent que le moment de la résistance du Cylindre B au regard de son poids, s'est accrû sur le moment de la résistance du Cylindre A au regard de son propre poids, en la raison de l'accroissement du diamétre de la base E F sur le diamétre de la base C D, & non pas en la raison des Cubes de ses diamétres. Ce qu'il falloit démontrer.

La même Proposition se peut démontrer encore d'une autre maniere, après avoir fait que comme le diamétre C D est au diamétre E F, ainsi F L soit à F O.

La raison du moment de la résistance du Cylindre A en M, au moment de la résistance du Cylindre B en I, est composée de la raison de la base C D à la base E F, & de celle du demi-diamétre D M au demi-diamétre F I, ou de la ligne CD à la ligne E F. Et la raison du moment du poids du Cylindre A en K, au moment du poids B en O, est composée des mêmes raisons, sçavoir de celle du poids A au poids B, qui est égale à celle de la base C D à la base EF; & de celle de la ligne D K ou F L à la ligne F O, qui par la construction est la même que celle de C D à E F: Donc le moment de la résistance du Cylindre A en M, sera au moment de la résistance du Cylindre B en I, comme le moment du poids du Cylindre A en K, est au moment du poids du Cylindre B en O: Et en permutant, le moment de la résistance du Cylindre A en M, sera au moment du poids A en K, comme le moment de la résistance du Cylindre B en I, est au moment du poids B en O.

Maintenant, par ce qui a été démontré par d'autres, que si deux raisons ont un même antécédent, elles seront entr'elles comme réciproquement les termes consequens; il s'ensuit que la raison du moment de la résistance du Cy-

lindre B en I au moment du poids B en L, & la raiſon du même moment de la réſiſtance du Cylindre B en I au moment du même poids B en O, ayant un même antécédent, ſçavoir le moment de la réſiſtance du Cylindre B en I; elles ſeront entr'elles comme réciproquement les termes conſéquens, c'eſt-à-dire, que le moment de la réſiſtance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en L, ſera au moment de la même réſiſtance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en O, comme le moment du poids B en O, eſt au moment du même poids B en L, c'eſt-à-dire, comme la ligne B O eſt à la ligne B L, ou comme le diamétre E F au diamétre C D; & partant que le moment de la réſiſtance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en L, ſera au moment de la réſiſtance du Cylindre B en I au regard du moment du même poids B en O, comme la ligne E F eſt à la ligne C D. Mais il a été montré ci-deſſus, que le moment de la réſiſtance du Cylindre A en M au regard du moment du poids A en K, étoit égal au moment de la réſiſtance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en O. Donc le moment de la réſiſtance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en L, ſera au moment de la réſiſtance du Cylindre A en M au regard du moment du poids A en K, comme le diamétre E F eſt au diamétre CD. Ce qu'il falloit démontrer.

Au reſte, la verité du Corollaire qui ſuit la 4. Prop. & qui dit, que les réſiſtances ſont en raiſon ſeſquialtere des poids des Cylindres, n'en paroît pas moins, dans cette hypothéſe de l'accroiſſement des réſiſtances en raiſon des diamétres des baſes des Cylindres par relation aux poids, que dans l'autre, où les réſiſtances s'augmentent en raiſon des Cubes des mêmes diamétres; ſi l'on ſe ſouvient que les réſiſtances abſoluës & les poids croiſſent l'un & l'autre en raiſon doublée des diamétres, & que les diſtances de l'action des poids, étant les mêmes à cauſe de la même

longueur des Cylindres, le moment des poids ne s'augmente point : Mais les distances de l'action des résistances s'augmentant en raison des diamétres, à cause de la difference des grosseurs ; il s'ensuit qu'ajoûtant cette raison des diamétres à celle des résistances absoluës, c'est-à-dire, à celle des quarrez des mêmes diamétres, il se fera la raison triplée des diamétres pour celle des momens des résistances, qui par conséquent est sesquialtere de celle des momens des poids, qui est demeurée doublée des mêmes diamétres.

Ce que nous venons de dire de la 4. Prop. se peut encore assûrer de la 5. du même Livre, laquelle dit, que *I Cilindri è Prismi di diversa lunghezza, è grossezza hanno le lor resistenze all' esser rotti di proporzione composta della proporzione de i Cubi de i diametri delle lor basi, e della proporzione delle lor lunghezze permutatament prese* ; & qui ne peut être veritable, si l'on ne fait encore abstraction du propre poids des Cylindres, dont M. Galilée ne parle pourtant point du tout, non plus qu'aux précedentes, ni en celles qui suivent. Puisque si l'on considere les momens de la résistance des Cylindres de differentes longueurs & grosseurs rélativement aux momens de leurs propres poids, elles ne seront pas, comme il dit, en raison composée de la proportion des Cubes des diamétres de leurs bases, & de celle de leurs côtez pris réciproquement ; mais bien en raison composée de la proportion des diamétres des bases, & de celle des quarrez des côtez des Cylindres pris réciproquement. Ce que je démontre en cette maniere, & sur la fig. de M. Galilée, qui fait la ligne EG égale à B C.

Fig. 5, Tab. 20. La raison du moment de la resistance du Cylindre A C au regard du moment du poids du même Cylindre A C, au moment de la résistance du Cylindre D F au regard du moment du poids du même Cylindre D F, est composée de la raison du moment de la résistance de A C au regard du moment du poids du même A C, au moment de la résistance

ſiſtance du Cylindre D G au regard du moment du poids D G, & de la raiſon du moment de la réſiſtance D G au regard du moment du poids D G, au moment de la reſiſtance du Cylindre D F au regard du moment du poids D F. Mais la raiſon du moment de la réſiſtance de A C au regard du moment du poids de A C, au moment de la réſiſtance de D G au regard du moment du poids D G, eſt la même que la raiſon du diamétre A B au diamétre D E, par ce qui a été démontré ci-deſſus ; & la raiſon du moment de la réſiſtance du Cylindre D G au regard du moment du poids de D G, au moment de la réſiſtance du Cylindre D F au regard du moment du poids D F, eſt la même que celle du quarré du côté E F au quarré du côté E G ou B C, ainſi que je le démontrerai ci-deſſous. Et partant la raiſon du moment de la réſiſtance du Cylindre A C au regard du moment du poids A C, au moment de la réſiſtance du Cylindre D F au regard du moment du poids D F, ſera compoſée des raiſons du diamétre A B au diamétre D E, & du quarré du côté E F au quarré du côté BC. Ce qu'il falloit démontrer.

Or pour faire voir que la raiſon du moment de la réſiſtance du Cylindre D G au regard du moment du poids du même D G, au moment de la réſiſtance du Cylindre D F au regard du moment du poids du même D F, eſt égale à celle du quarré E F au quarré E G ; je dis ainſi. Les raiſons des momens de la réſiſtance des deux Cylindres D G & D F aux momens de leurs poids, ayant un même antécédent, ſçavoir le moment de la réſiſtance, qui eſt le même en tous les Cylindres de même groſſeur ; elles ſeront entr'elles comme les termes conſéquens, pris réciproquement, (par ce qui a été démontré par d'autres.) C'eſt-à-dire, que la raiſon du moment de la réſiſtance du Cylindre D G au moment du poids du même D G, ſera à la raiſon du moment de la réſiſtance du Cylindre D F au moment du poids du même D F, comme réciproquement le mo-

ment du poids du Cylindre D F, eſt au moment du poids du Cylindre D G. Mais par la 2^e Prop. de M. Galilée, le moment du poids de D F, eſt au moment du poids de D G, comme le quarré du côté E F eſt au quarré du côté E G : Donc le moment de la réſiſtance du Cylindre D G au regard du moment du poids du même D G, ſera au moment de la réſiſtance du Cylindre D F au regard du moment du poids du même D F, comme le quarré du côté E F, au quarré du côté E G ou B C.

Il y a encore une maniere de raiſonner, qui fait peine, dans ſon 3. Dial. où, après avoir fort bien dit, *Motum æqualiter ſeu uniformiter acceleratum dico illum, qui à quiete recedens, temporibus æqualibus æqualia celeritatis momenta ſibi ſuperaddit.* Il fait un diſcours excellent pour l'explication de cette définition, contre laquelle enſuite il ſe fait faire une objection, qu'il réſout en cette ſorte.

Sagr. *Per quanto per ora mi ſi rappreſenta all' intelletto, mi pare che con chiarezza forſe maggiore ſi fuſſe potuto definire ſenza variare il concetto : Moto uniformemente accelerato eſſer quello nel quale la velocità andaſſe creſcendo ſegondo che creſce lo ſpazio che ſi và paſſando : ſi che per eſſempio il grado di velocità acquiſtato dal mobile nella ſceſa di quattro braccia, fuſſe doppio di quello che'gli hebbe, ſceſo che fù lo ſpazio di due, è queſto doppio del conſeguito nello ſpazio del primo bracio. Perche non mi par che ſia dà dubitare, che quel grave, che viene dall' altezza di ſei braccia, non habbia, è perquota con impeto doppio di quello che hebbe, ſceſo che fù trè braccia, è triplo di quello che hebbe alle due, è ſeſcuplo dell'havuto nello ſpazio di uno.* Salu. *Io mi conſolo aſſai d'haver havuto un tanto compagno nell' errore ; è più vi dirò, che il voſtro diſcorſo hà tanto del veriſimile, è del probabile, che il noſtro medeſimo Autore non mi niegò, quando glielo propoſi, d'eſſer' egli ancora ſtato per qualche tempo nella medeſima fallacia. Ma quello, di che io poi ſommamente mi maravigliai, fu il vedere ſcoprir con quattro ſemplicißime parole, non pur falſe, mà impoßibili-*

due proposizioni, che hanno del verisimile tanto, che havendole io proposte à molti, non hò trovato, chi liberamente non me l'ammetesse. Simpl. *Veramente io sarei del numero de i conceditori, è che il grave descendente,* Vires acquirat eundo, *crescendo la velocità à ragion dello spatio, è chel momento dell' istesso percutiente sia doppio venendo da doppia altezza, mi paiono proposizioni da concedersi senza repugnanza, ò controversia.* Salu. *E' pur son tanto false e impossibili, quanto che il moto si faccia in un instante. Et eccòvene chiarissima dimonstrazione. Quando le velocità hanno la medesima proporzione, che gli spazii passati ò da passarsi, tali spazii vengon passati in tempi eguali; se dunque le velocità, con le quali il cadente passò lo spazio di quattro braccia, furono doppie delle velocità, con le quali passò le due prime braccia (si come lo spazio è doppio dello spazio) adunque i tempi di tali passaggi sono eguali; mà passare il medesimo mobile le quattro braccia, e le due nell' istesso tempo, non può haver luogo fuor che nel moto instantaneo. Mà noi veggiamo, che il grave cadente fà suo moto in tempo, & in minore passa le due braccia, che le quattro. Adunque è falso, che la velocità sua cresca come lo spazio. L'altra proposizione si dimostra falsa con la medesima chiarezza,* &c. Sagr. *Troppa evidenza, Troppa agevolezza è questa, con la quale manifestate conclusioni ascoste; Questa somma facilità,* &c.

Qui fait paroître que la solution de cette objection lui plaît extraordinairement; & il en fait tant de cas, qu'il ne peut quasi se lasser d'en exagérer la beauté.

Et cependant je vous avouë franchement la foiblesse de mon esprit, qui ne l'a pû jusqu'ici comprendre en aucune maniere, quelque soin que j'aye pris de méditer sur son raisonnement, lequel au contraire m'a toûjours paru faux, & paralogistique en sa forme, quoiqu'il soit très-veritable en sa matiere.

Et pour vous faire voir mon sentiment, je vous dirai que pour avoir démontré, dans la 2e Prop. du même Dial.

au commencement, lorſqu'il a expliqué les proprietez du mouvement égal & uniforme, que *ſi ſpatia ſint ut velocitates, tempora erunt æqualia.* Je ne vois pas pour cela, que parlant des proprietez du mouvement acceleré, (permettez-moi de me ſervir de ce terme) il ait pû dire, que *quando le velocità hanno la medeſima proporzione che gli ſpazii paſſati, ò da paſſarſi, tali ſpazii vengon paſſati in tempi eguali.* Ce qui peut être abſolument nié, puiſque ces mouvemens ſont ſi differens, qu'il n'y a aucune connexité entre ces deux Propoſitions, & ce qui convient à l'un, peut abſolument ne pas convenir à l'autre. Et cependant c'eſt de cette Majeure, que M. Galilée tire ces conſéquences qui raviſſent M. Sagredo, & qui font qu'il s'écrie avec tant d'emportement, *Troppa Evidenza, troppa agevolezza*, &c.

Que ſi l'on veut dire qu'il a pû argumenter ſur les proprietez du mouvement acceleré, comme il a fait ſur celles du mouvement égal & uniforme, par ce qu'il démontre un peu au-deſſous dans la 1. Prop. de l'acceleré, que *Tempus in quo aliquod ſpatium à mobili conficitur latione ex quiete uniformiter acceleratà, eſt æquale tempori, in quo idem ſpatium conficeretur ab eodem mobili motu æquabili delato, cujus velocitatis gradus ſubduplus ſit, ad ſummum ultimum gradum velocitatis prioris motus uniformiter accelerati.* Qui fait voir la rélation qu'il y a entre les deux mouvemens; & que pour ce qui regarde les temps & les eſpaces, ce qui ſe dit de l'un, peut être proportionnellement entendu de l'autre.

Je répondrai que ce diſcours, quelque veritable qu'il ſoit en ſoi-même, ou, comme on dit dans les Ecoles, par ſa matiere, il eſt toûjours faux dans ſa forme; & le Paralogiſme ne fait que changer de nom, en ce que ci-deſſus on pouvoit l'appeller, comme on dit en Logique, *à non cauſa tanquam à cauſa*, & ici *à petitione Principii.* Puiſque cette premiere propoſition du mouvement acceleré, ſup-

posant & étant fondée sur la définition contestée, il n'est pas juste de vouloir démontrer celle-ci par l'autre.

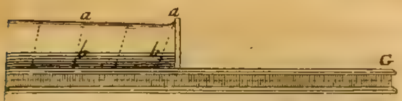
Voilà donc les Observations que j'ai faites sur ces matieres, que je ne vous rapporte point avec un esprit de critique, ou d'un homme qui ne cherche que ce qui peut être repris dans les plus beaux Ouvrages, puisqu'il n'y a peut-être personne au monde, qui ait plus d'amour & d'estime pour tout ce qui vient de M. Galilée que moi, qui ai eu l'honneur d'être de ses derniers Disciples, & qui ai travaillé depuis tant d'années à étendre cette Doctrine de la résistance des Solides dont il est l'Inventeur, & qu'il a renfermée dans un si petit nombre de propositions; ayant pour ce sujet composé le Livre que vous avez vû prêt à être donné au public il y a plus de douze ans, que j'appelle *Galilæus Promotus de resistentia Solidorum*; & qui pouvant quelque jour être mis en lumiere, fera assez connoître ma reconnoissance, & le respect que je porte à la memoire de ce grand Homme, que notre bon Ami M. Gassendi appelloit ordinairement le Platon de notre siécle.

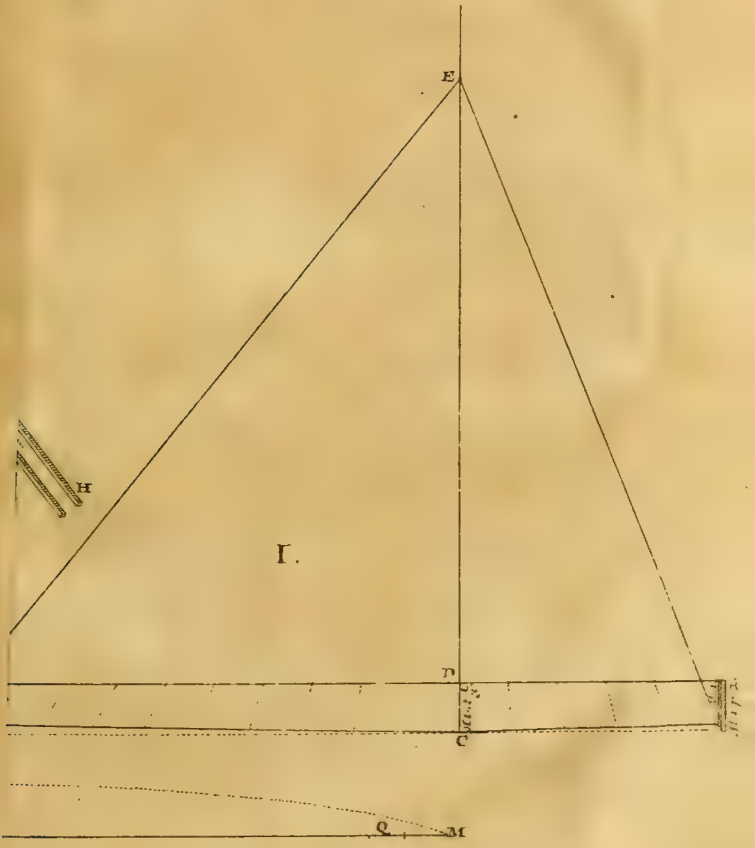
Ce n'est donc pas dans le dessein de rien censurer dans ses Ecrits que je vous ai marqué mes sentimens; mais seulement pour vous faire voir que ce n'est pas miracle, que dans le nombre infini de méditations toutes divines, dont il a rempli ses Ouvrages, quelques petites bagatelles comme celles-ci, lui soient échappées sans y avoir pris garde.

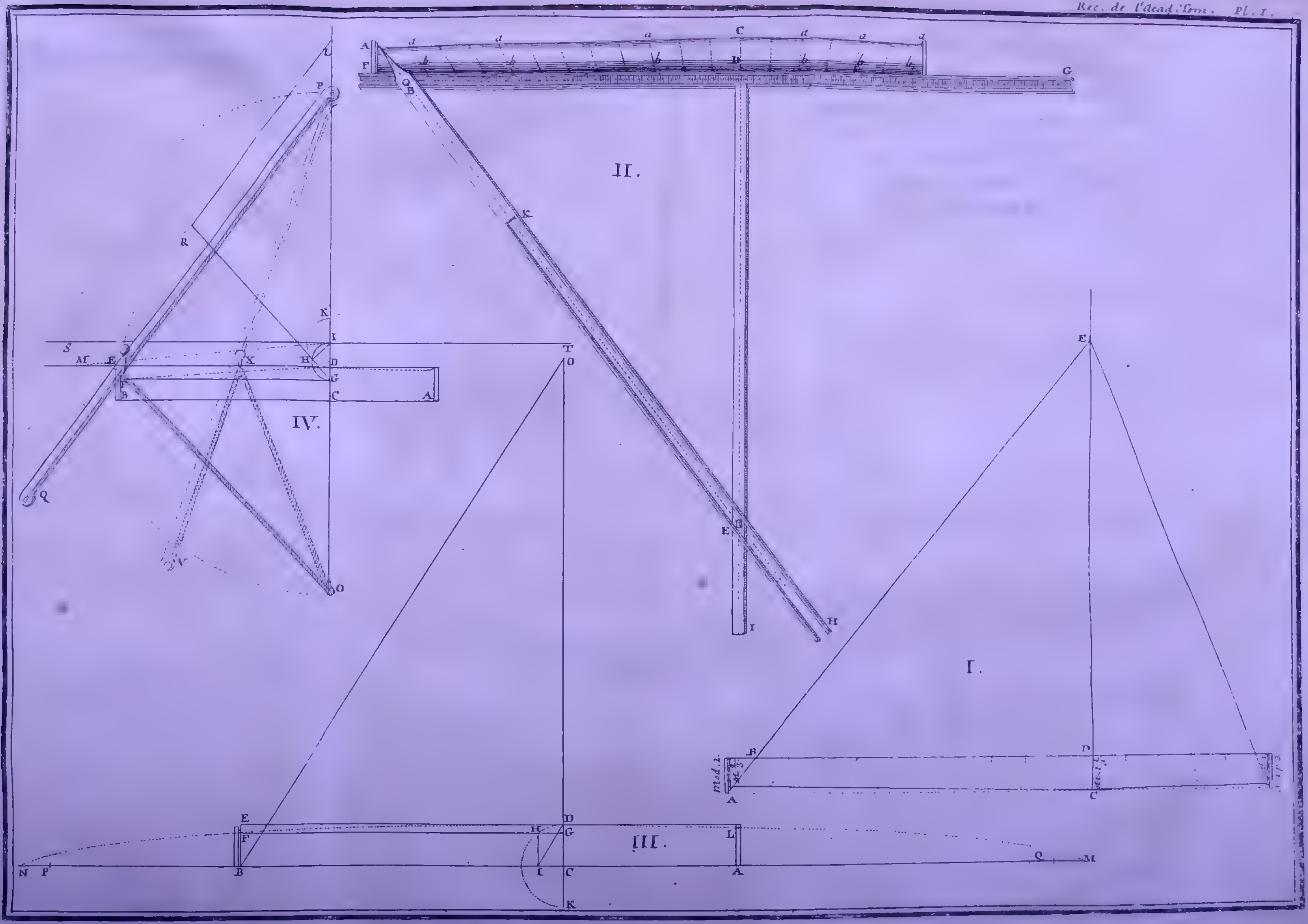
Ce qui est, à mon avis, tout ce que je devois vous dire, pour vous tirer des doutes qui vous étoient venus sur la lecture de mon écrit: Et si dans tout ce discours vous trouvez encore quelque chose qui ne vous satisfasse pas entierement, il faudra que nous nous en entretenions plus particulierement ensemble; & que sur le Livre même de M. Galilée j'essaye de me mieux expliquer que je n'ai pû faire dans les raisonnemens que je vous ai communiquez, où j'ai eu le malheur de ne me sçavoir pas si nettement faire entendre.

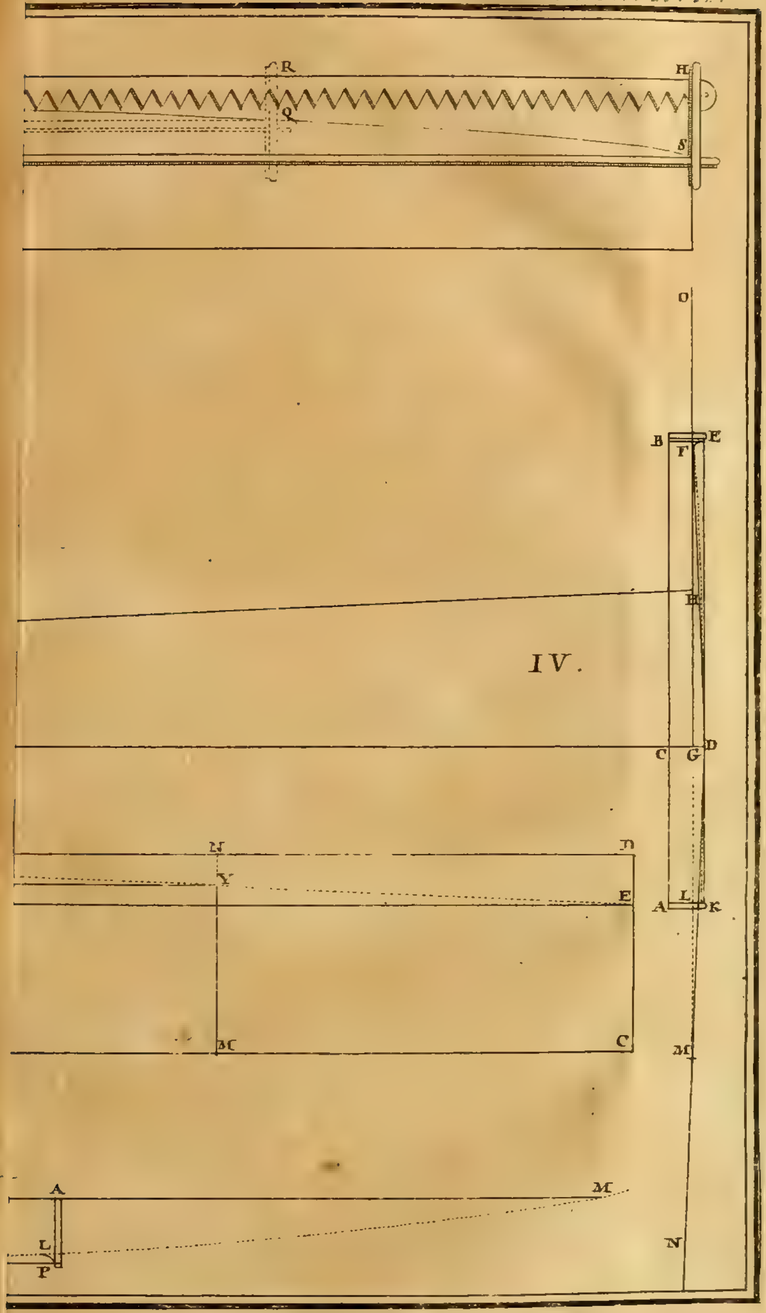
Et c'eſt une des principales raiſons qui m'ont fait étendre un peu plus au long dans cette Lettre, & rapporter quantité de paſſages aux mêmes termes de M. Galilée; puiſque dans cette queſtion il ſeroit toûjours fâcheux de tomber dans l'inconvenient, où une autre de pareille nature a jetté dans ces derniers temps les plus beaux eſprits de l'Europe. Adieu, Monſieur; conſervez-moi toûjours l'honneur de vos bonnes graces. A Paris, ce 18. Juillet 1661.

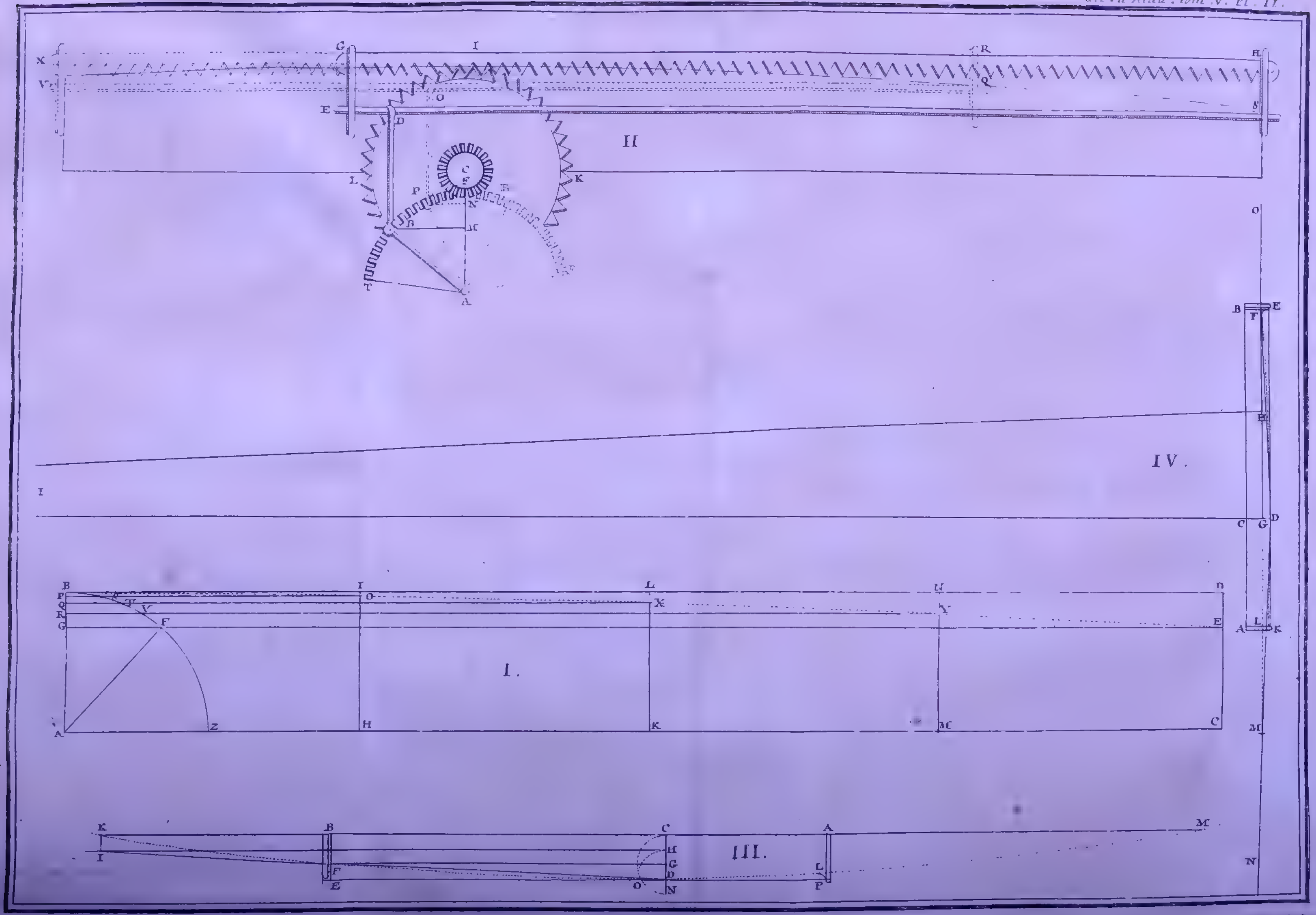
FIN.

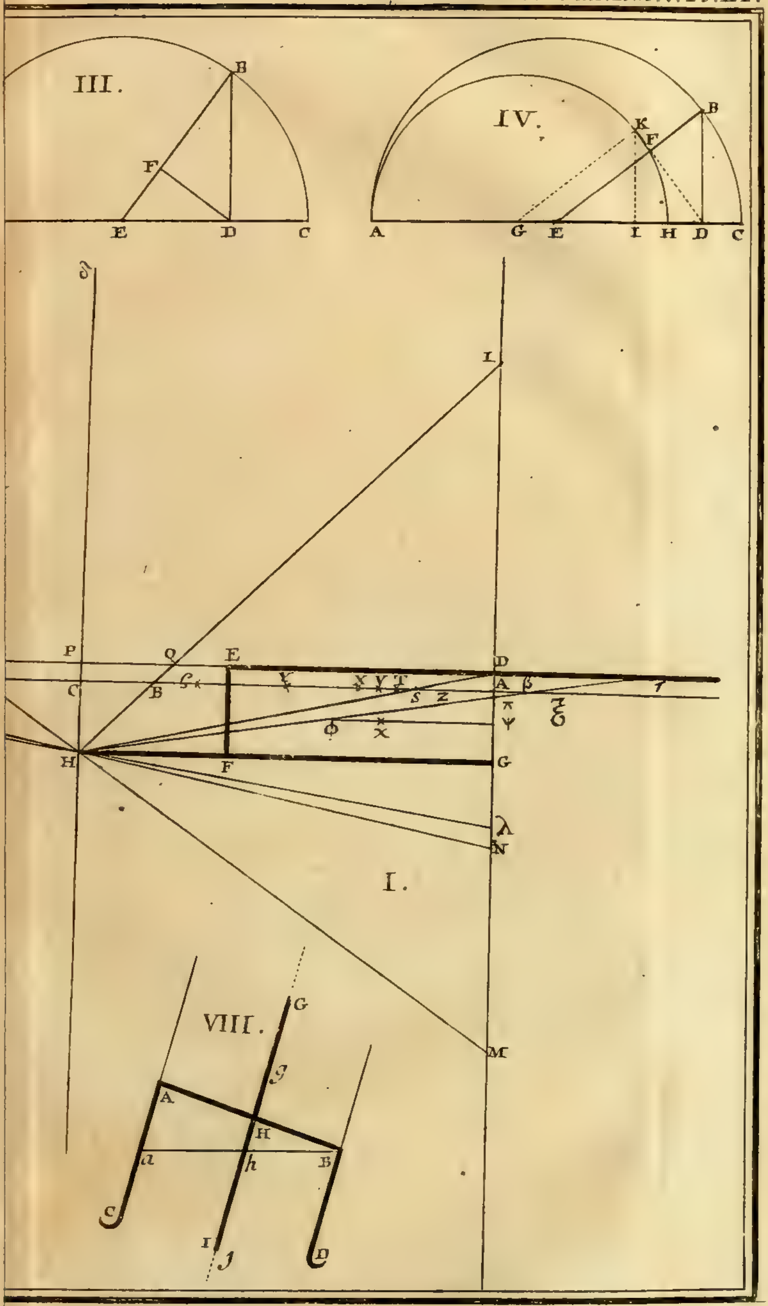

a
a
b
b
G

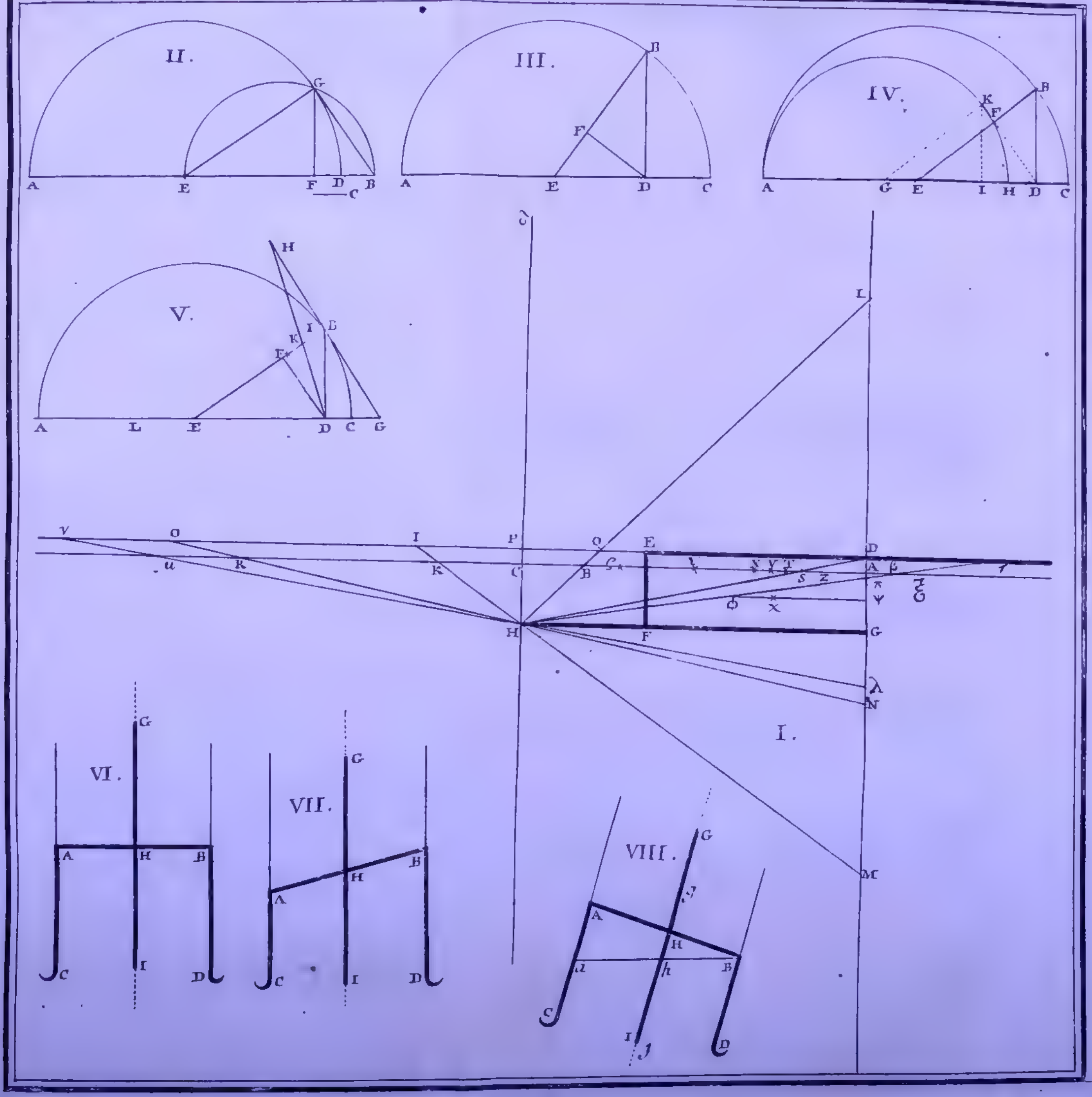

E
H
I.
D
C
Q
M

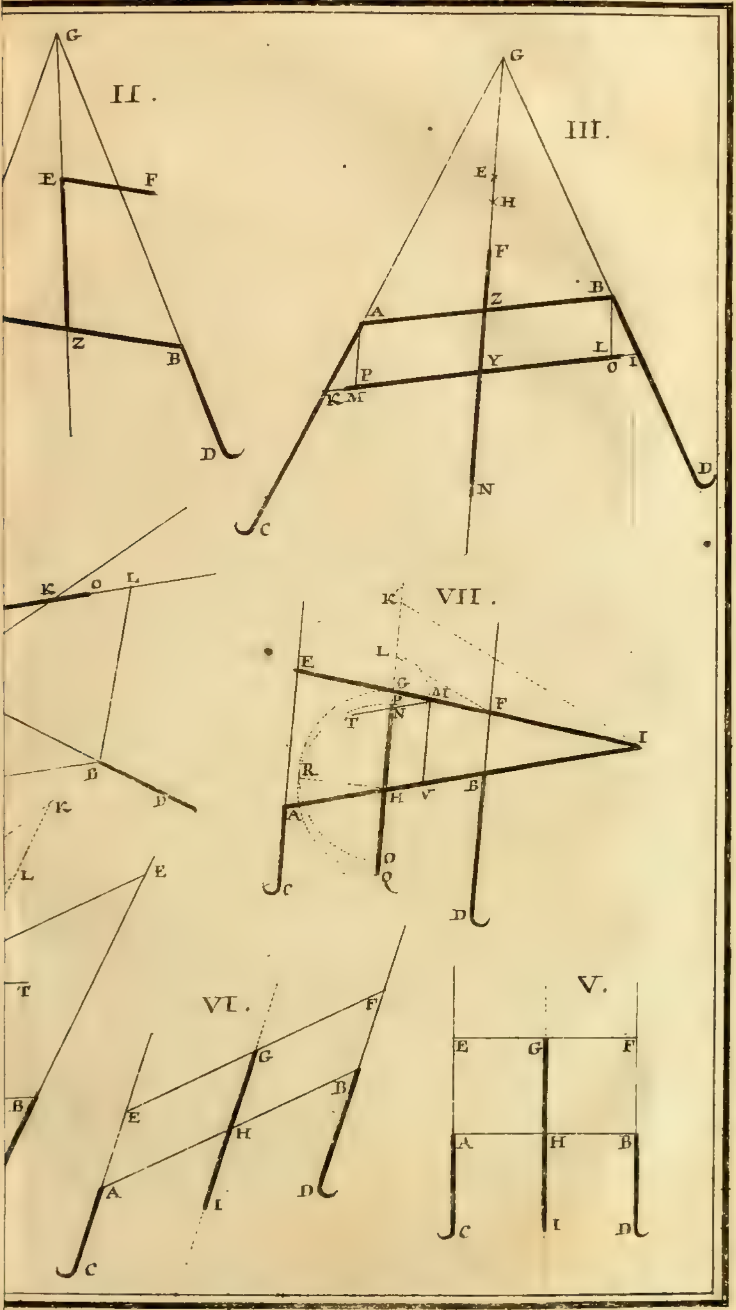

II.
IV.
I.
III.

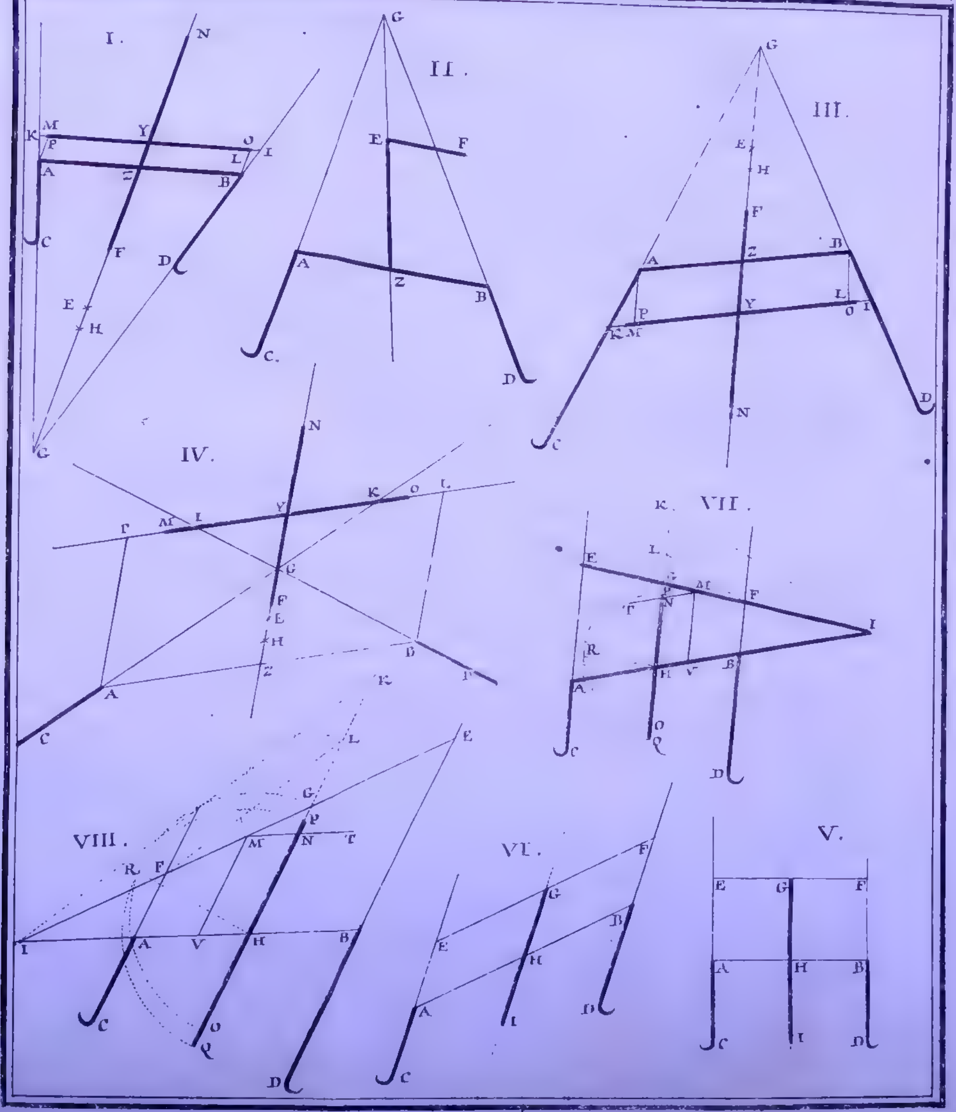

R
H
Q
S
O
B
E
F
H
IV.
C
G
D
N
D
Y
E
A
L
K
M
C
M
A
M
L
P
N

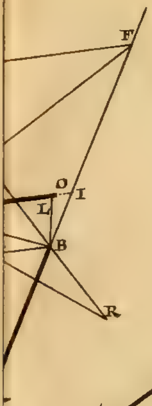

II
IV.
I.
III.

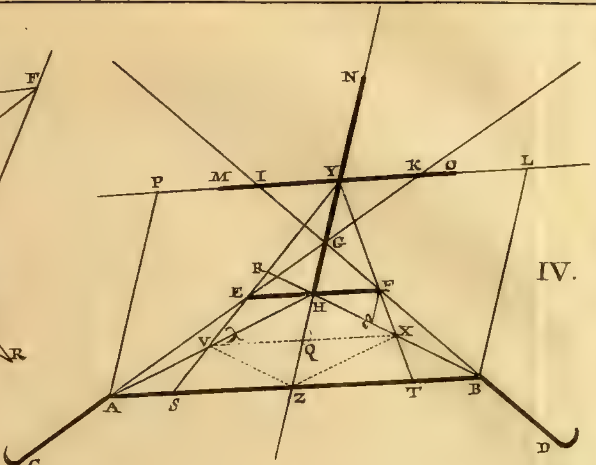

III.
B
F
E D C
IV.
K
F
B
A G E I H D C
I.
L
P Q E D
C B A
H F G
λ
N
M
VIII.
G
A
H
a h B
C
I
D


II.
III.
IV.
V.
I.
VI.
VII.
VIII.

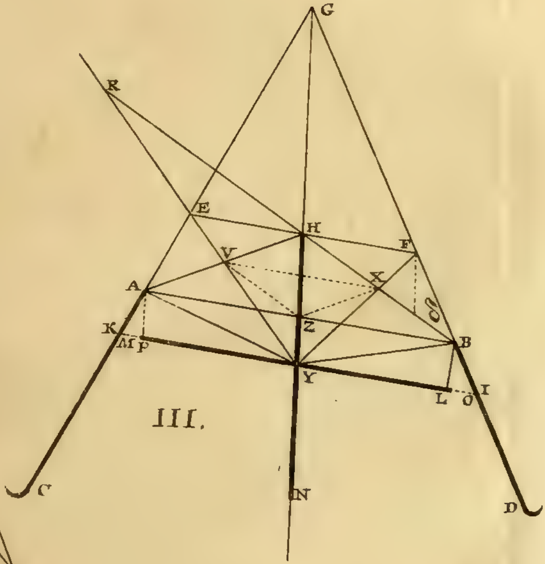

II.
III.
VII.
VI.
V.


I.
II.
III.
IV.
VII.
VIII.
VI.
V.

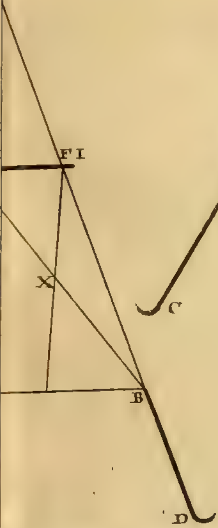

F
O
I
L
B
R

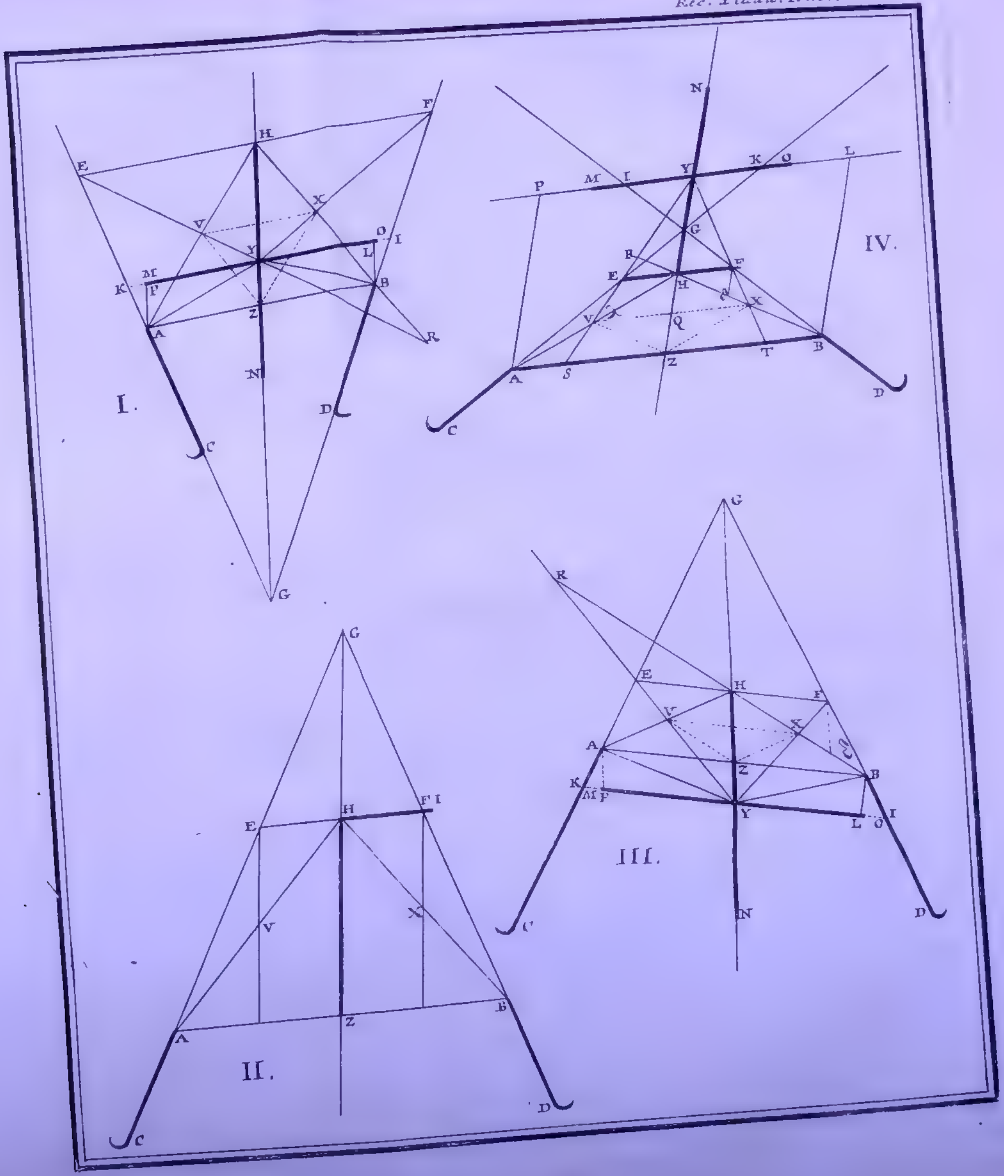

N
M
I
Y
K
O
L
P
G
R
E
F
H
V
Q
X
A
S
Z
T
B
C
D

IV.

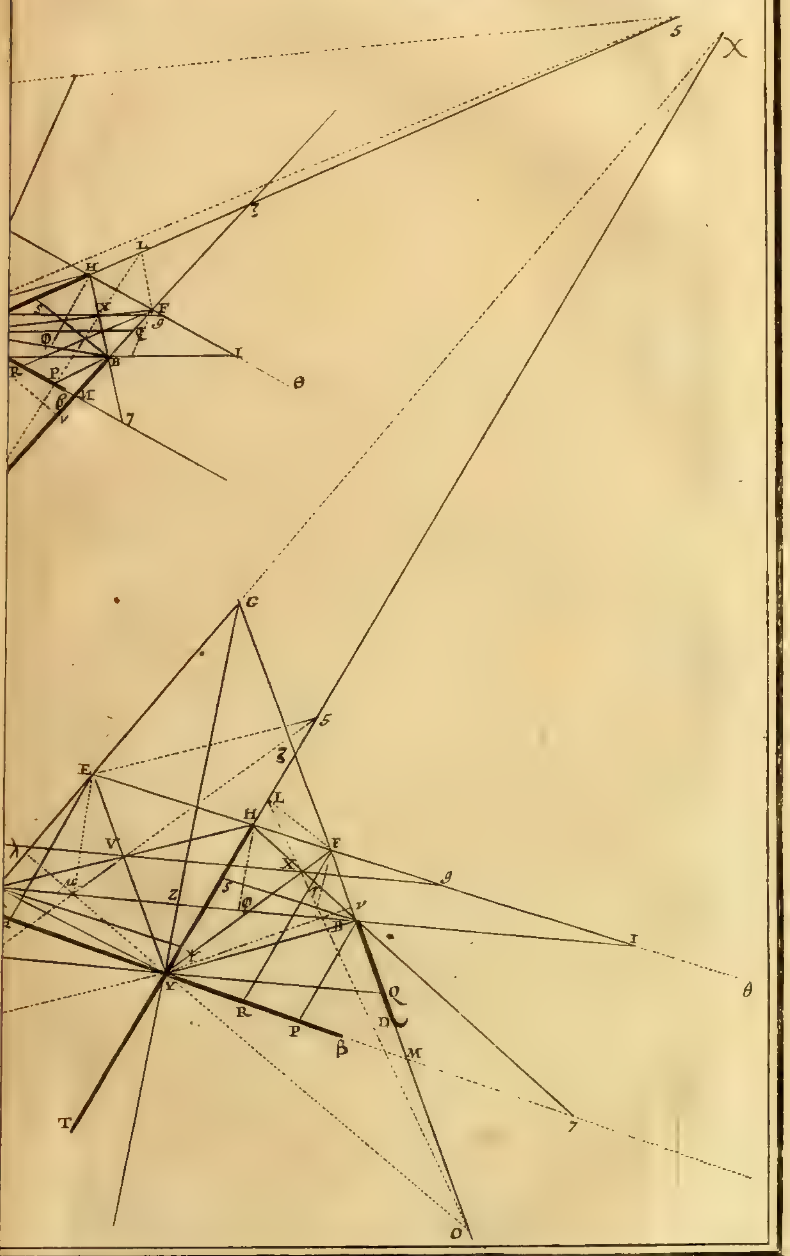

G
R
E
H
F
V
X
A
Z
K
M
P
B
Y
L
O
I
C
N
D

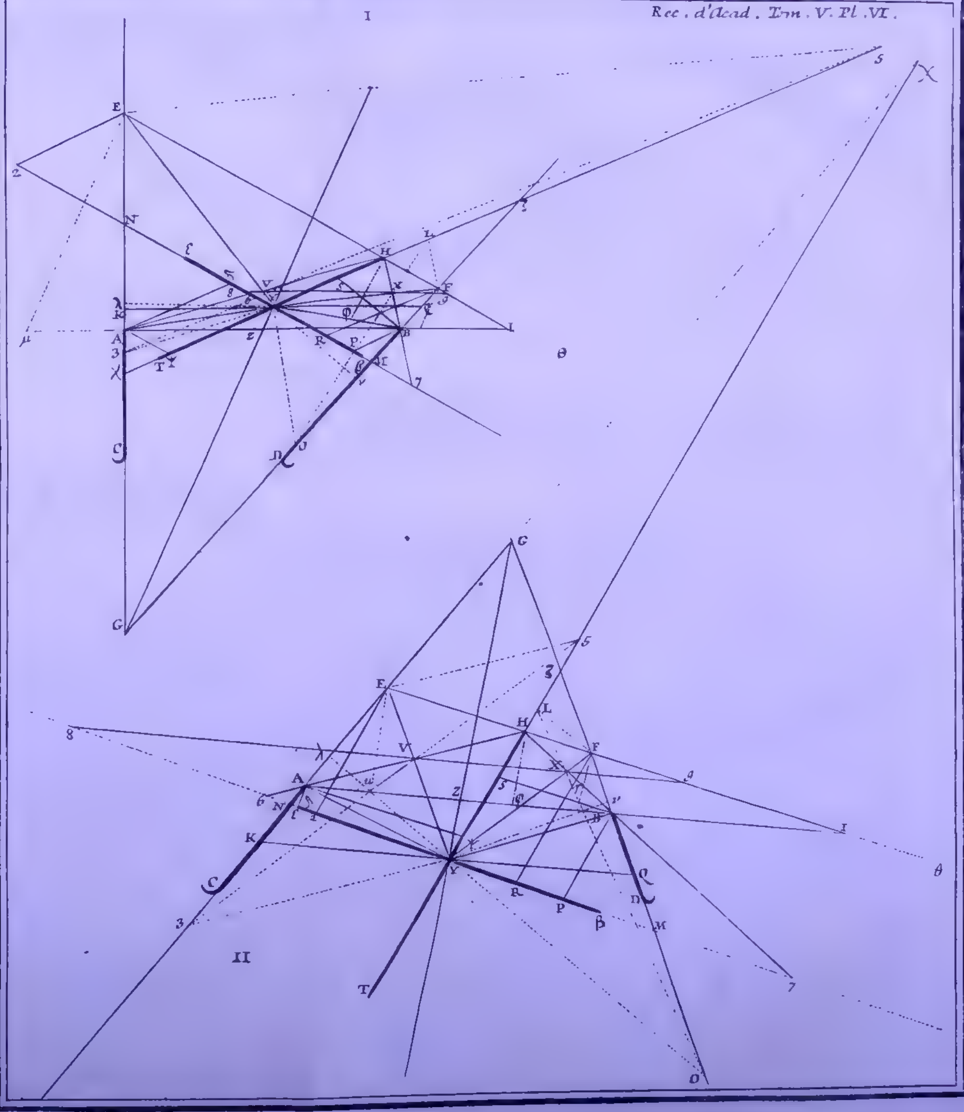
III.

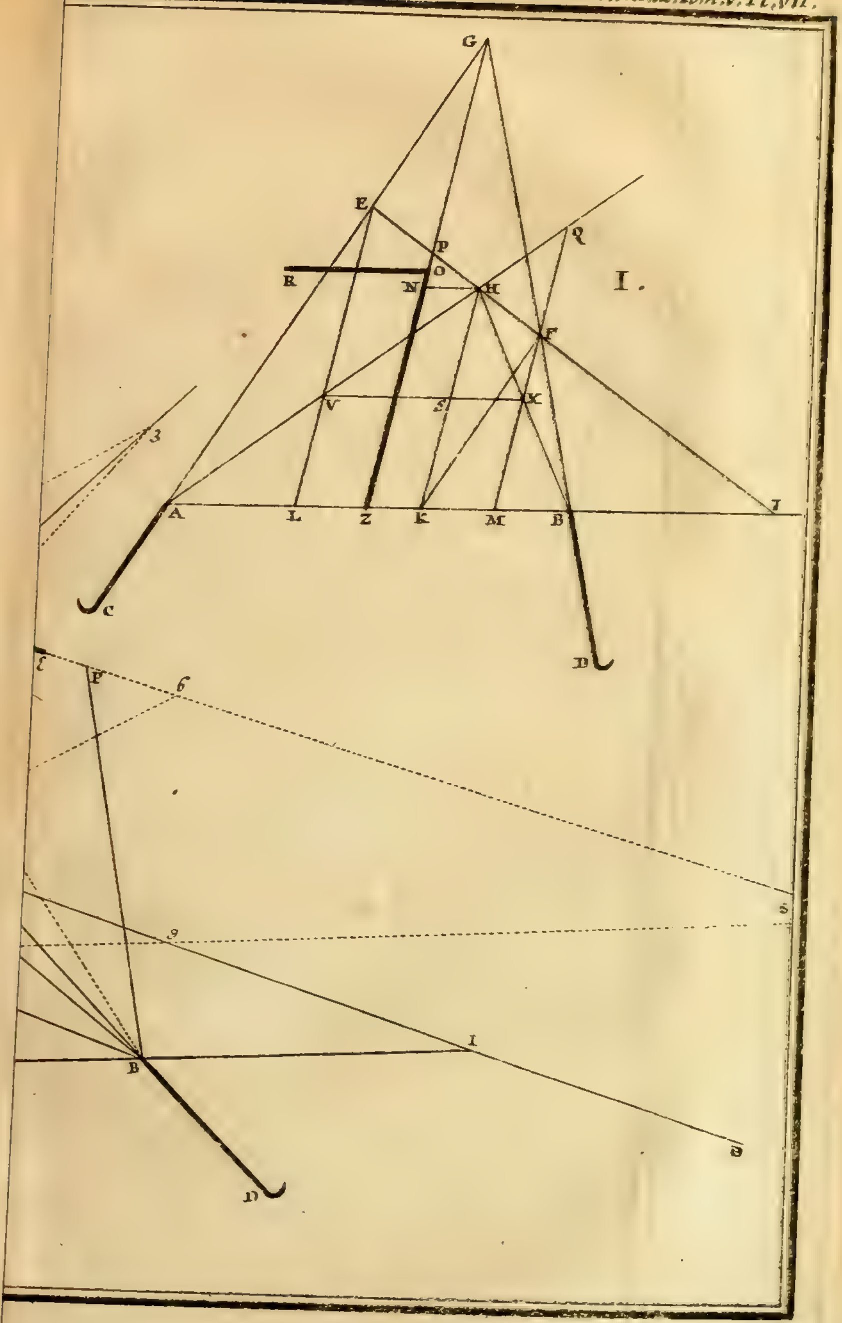

F I
X
B
D


I.
II.
III.
IV.

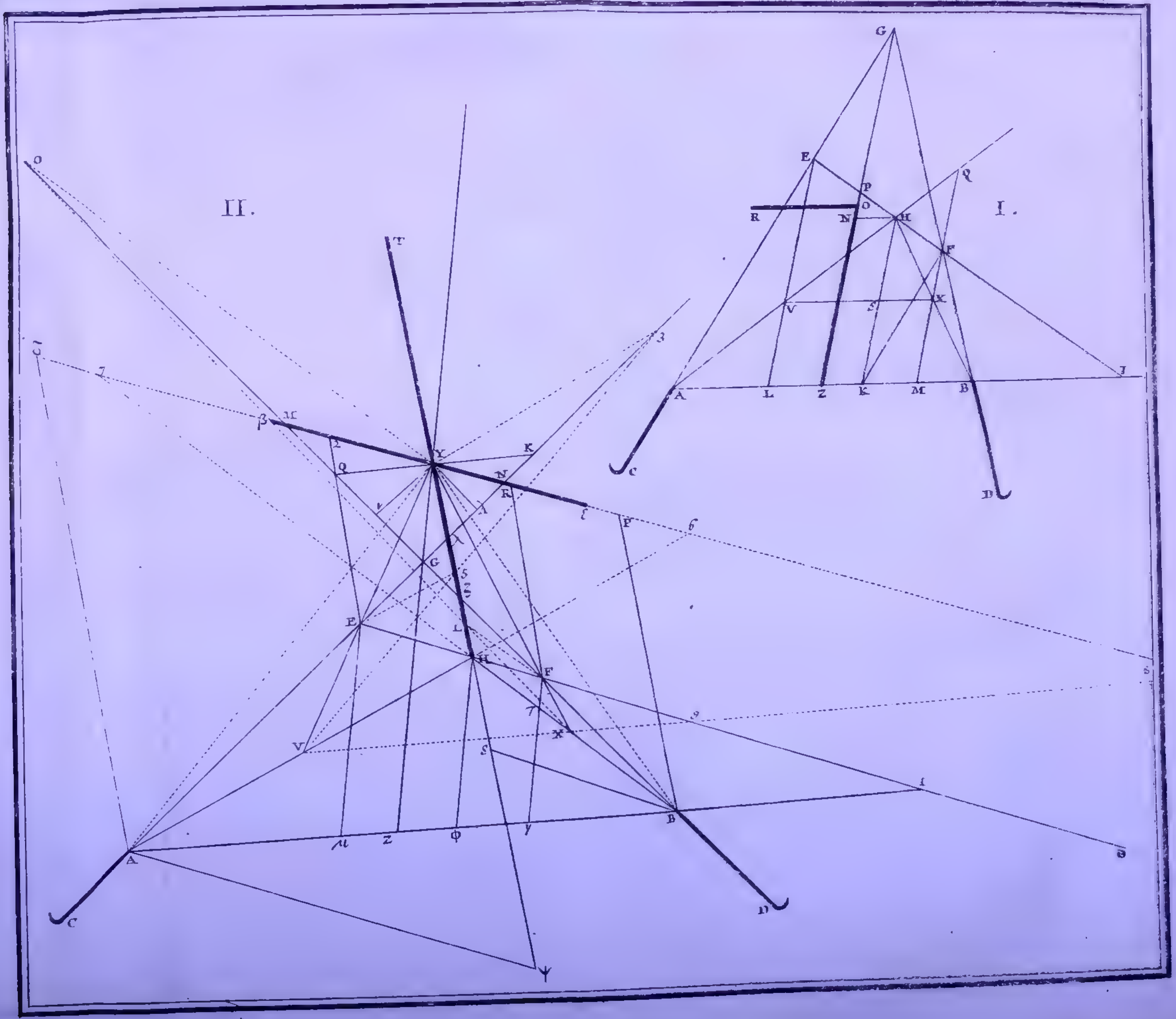
I

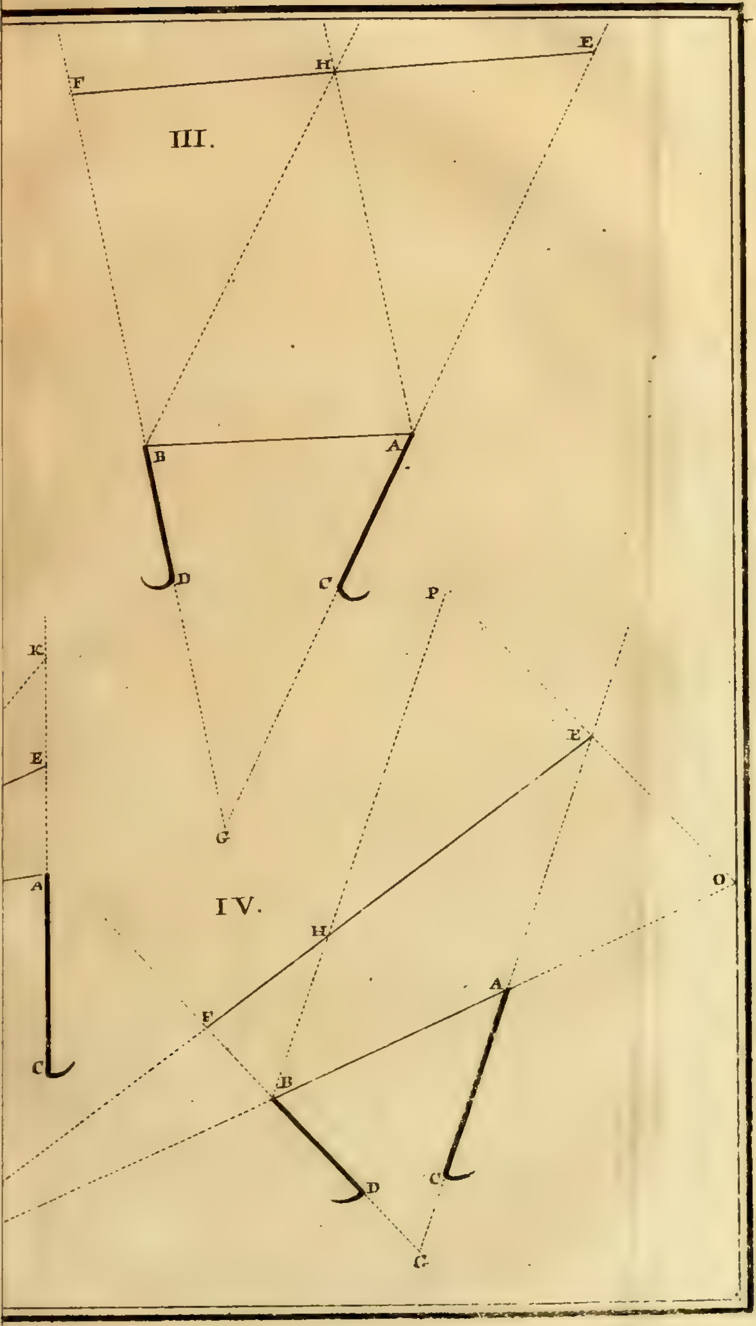


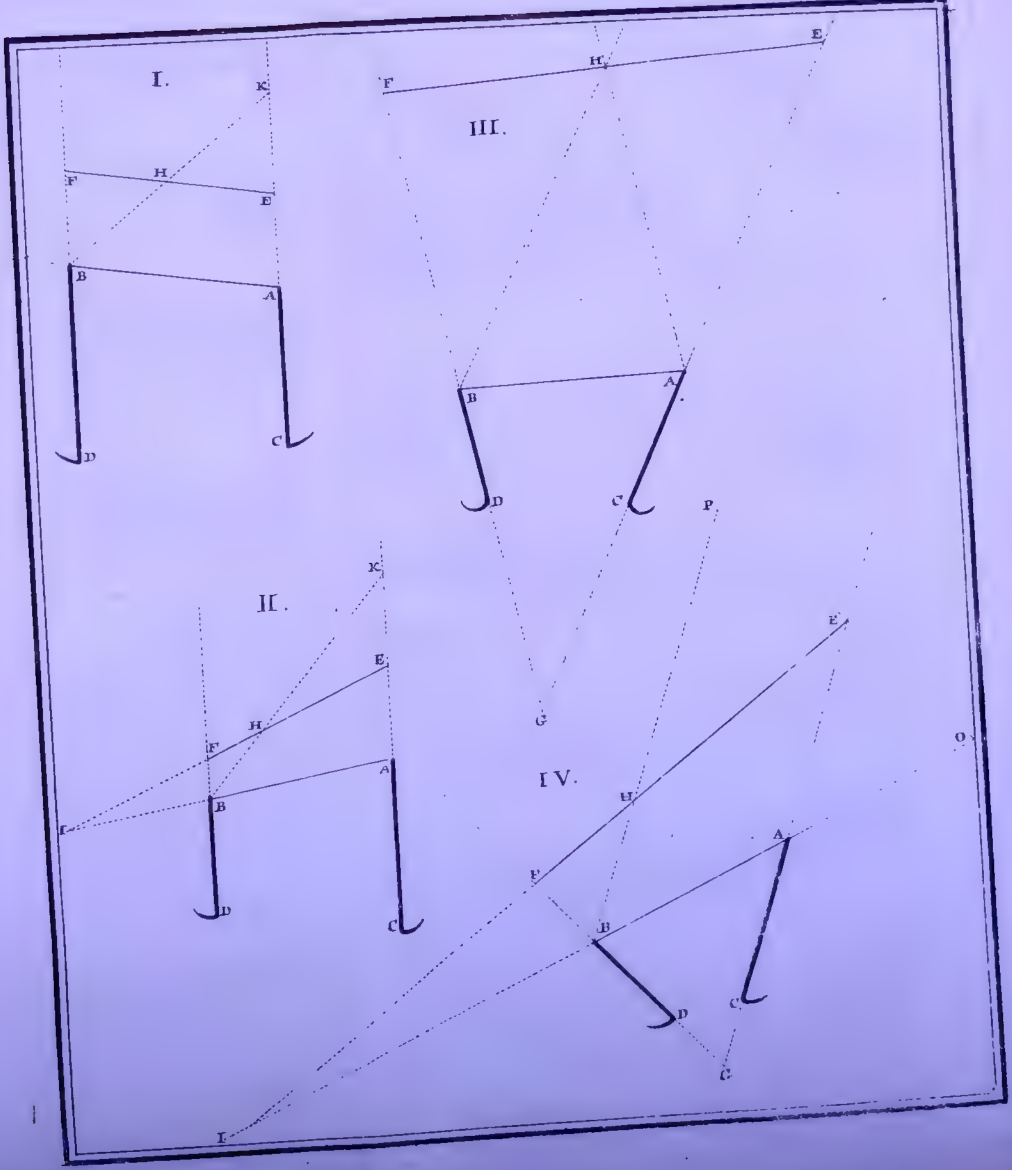

I
II

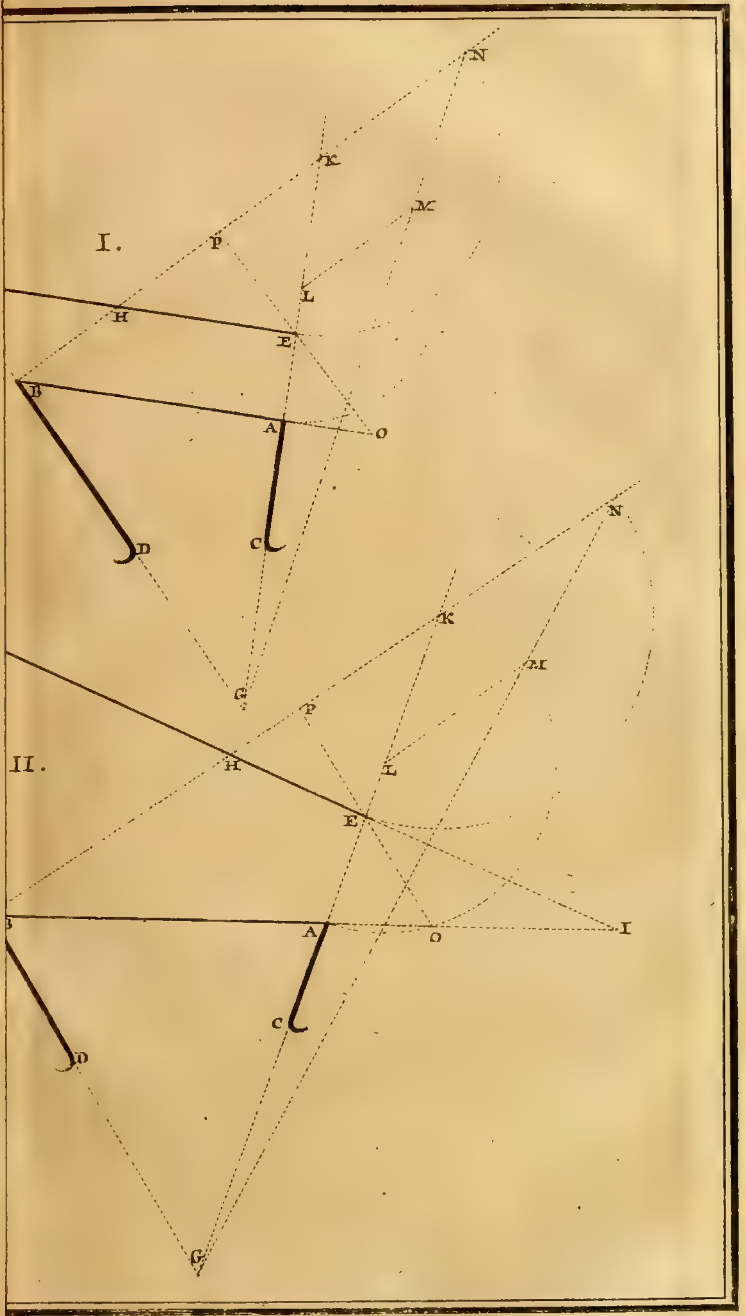


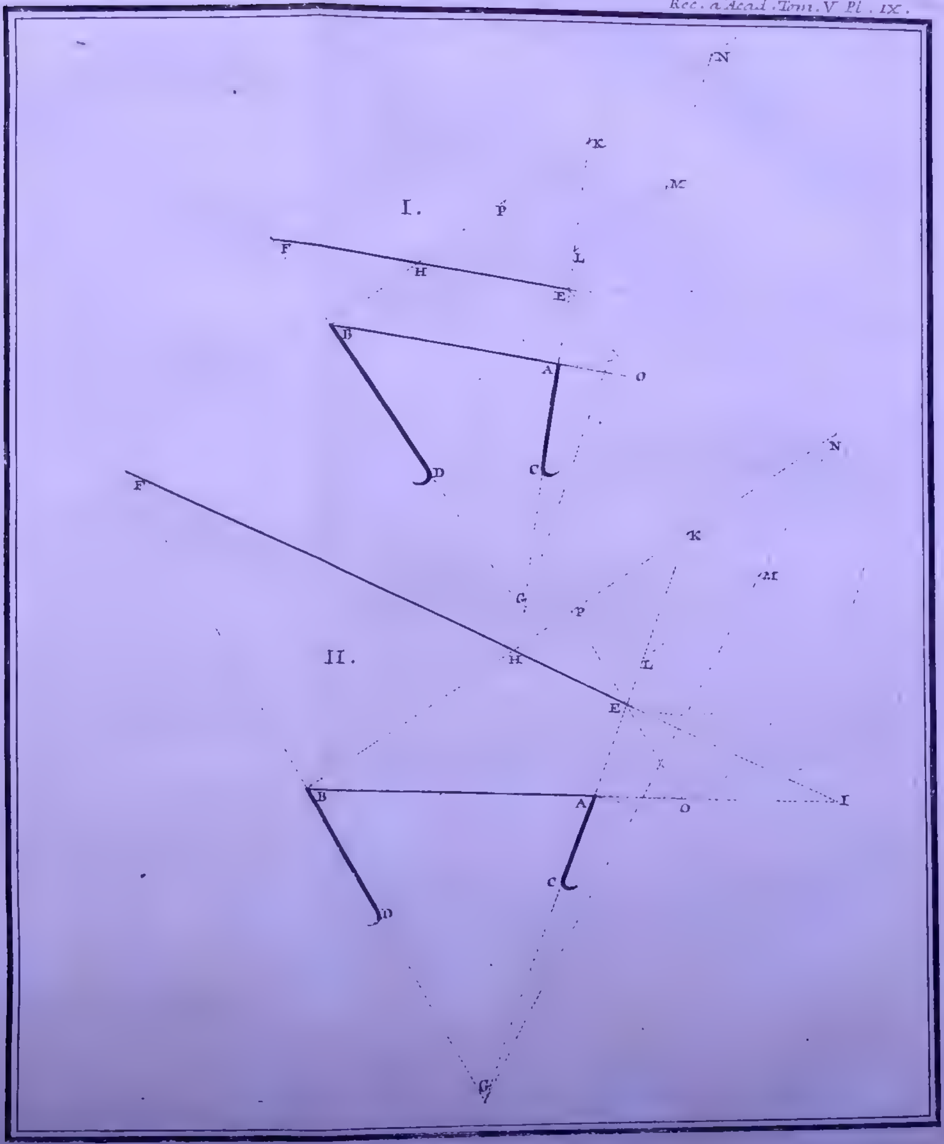
G
E
P
Q
R
O
N
H
I.
F
V
X
3
A
L
Z
K
M
B
C
D
F
6
5
9
I
B
D

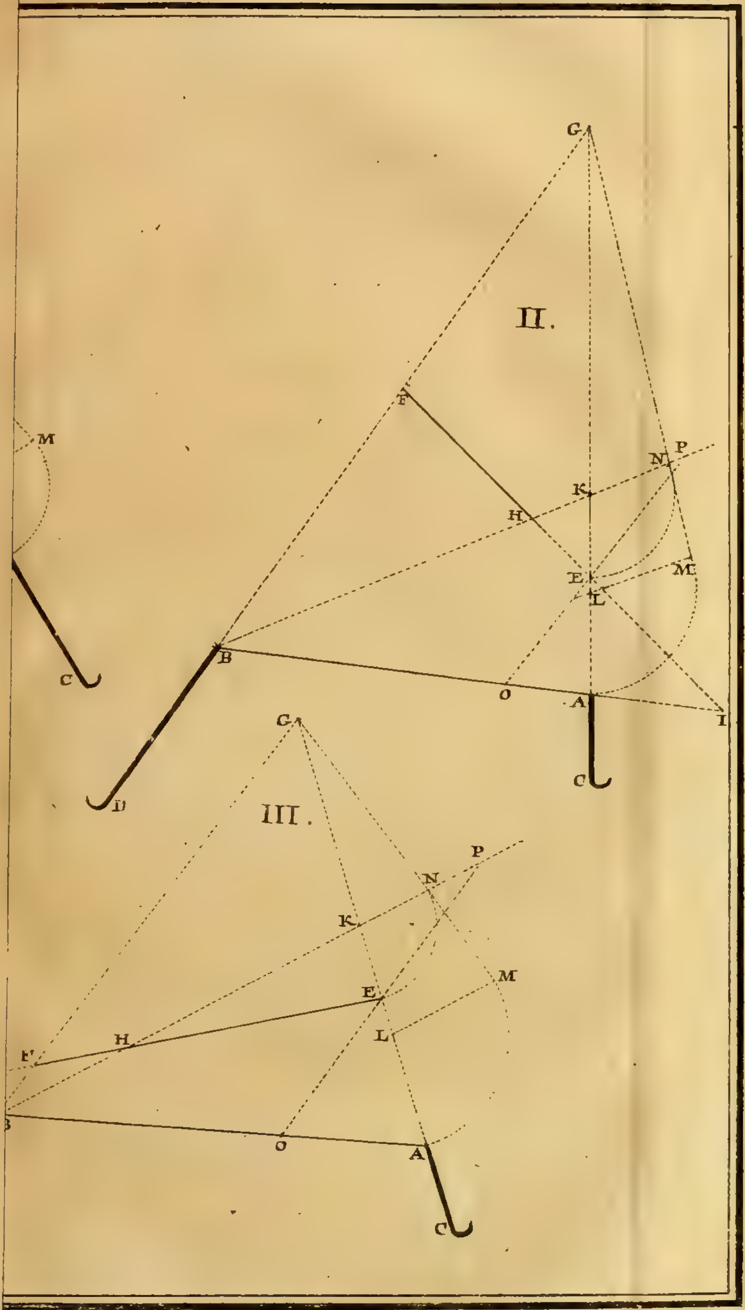

II.
I.
G
E
P
O
R
N
H
Q
F
V
X
J
A
L
Z
K
M
B
C
D
T
Y
μ
φ
y
θ
Ψ

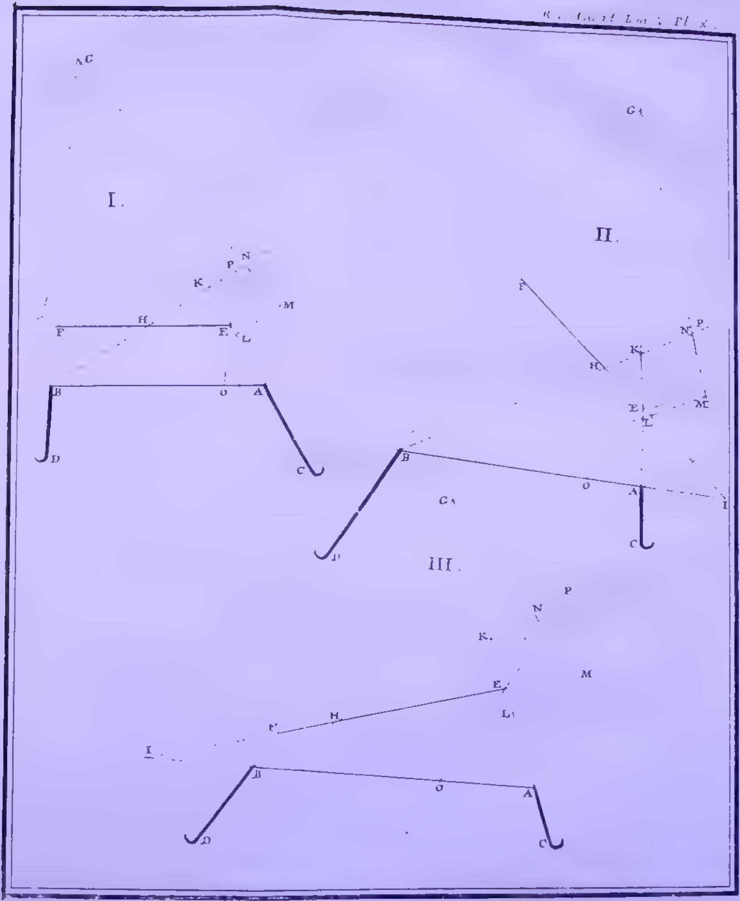

III.
F
H
E
B
A
D
C
G
IV.
K
E
A
C
P
E
O
H
A
F
B
D
C
G

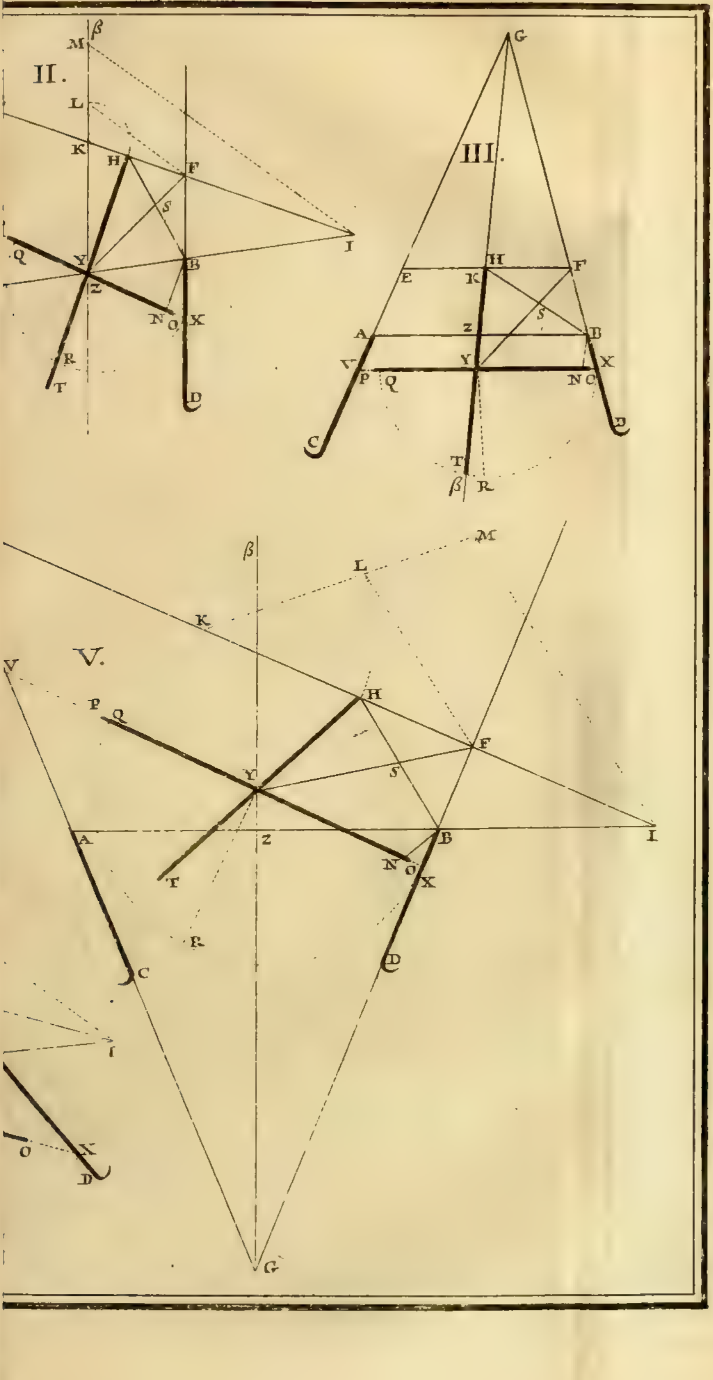

I.
K
H
F
E
B
A
D
C
III.
F
H
E
B
A
D
C
P
G
II.
K
E
H
F
A
B
I
D
C
IV.
E
O
H
A
F
B
D
C
G
I

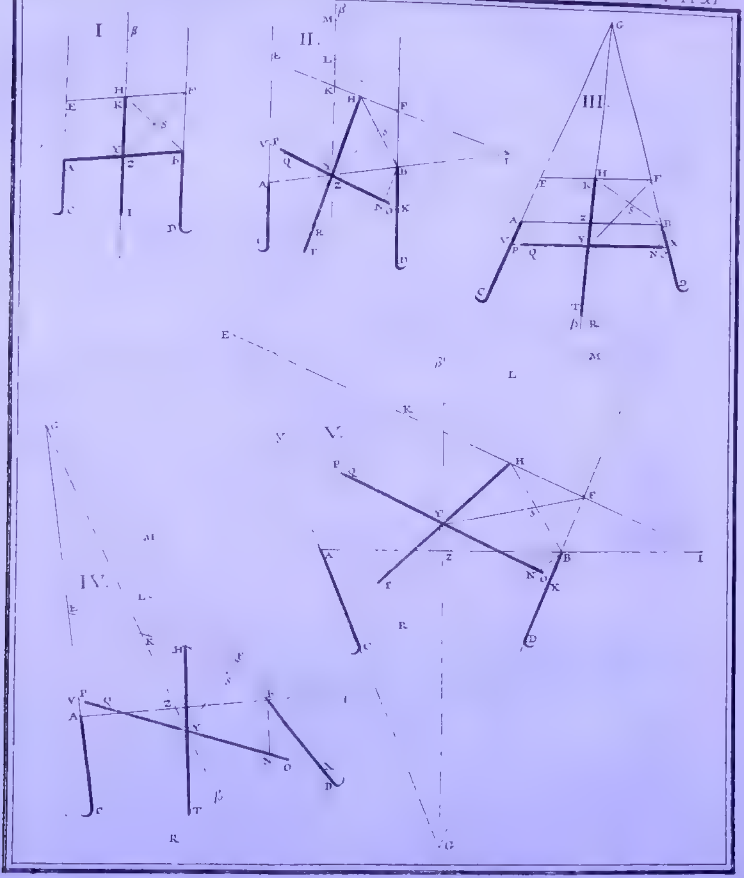

I.
N
K
M
P
L
H
E
B
A
O
D
C
G
II.
N
K
M
P
H
L
E
B
A
O
I
C
D
G

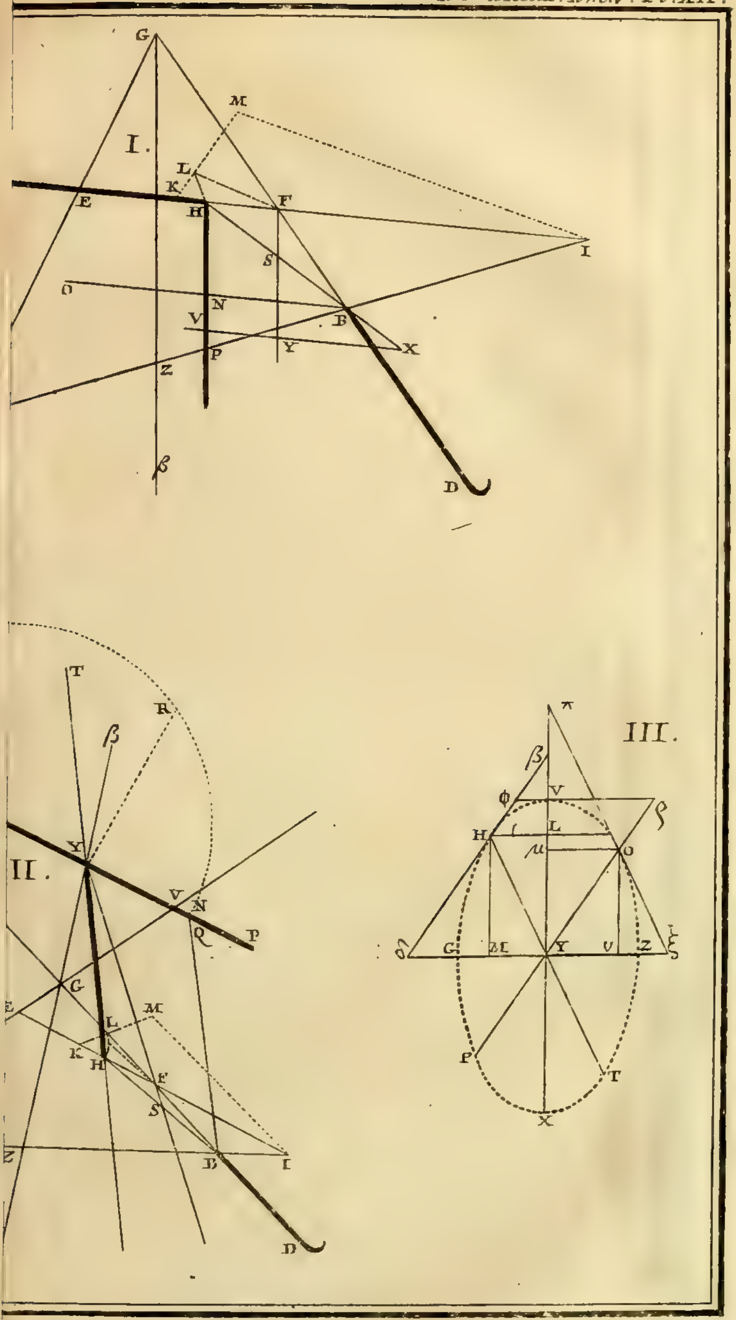

I.
N
K
M
P
F
H
L
E
B
A
O
D
C
II.
F
N
K
M
G
P
H
L
E
B
A
O
I
C
D
G

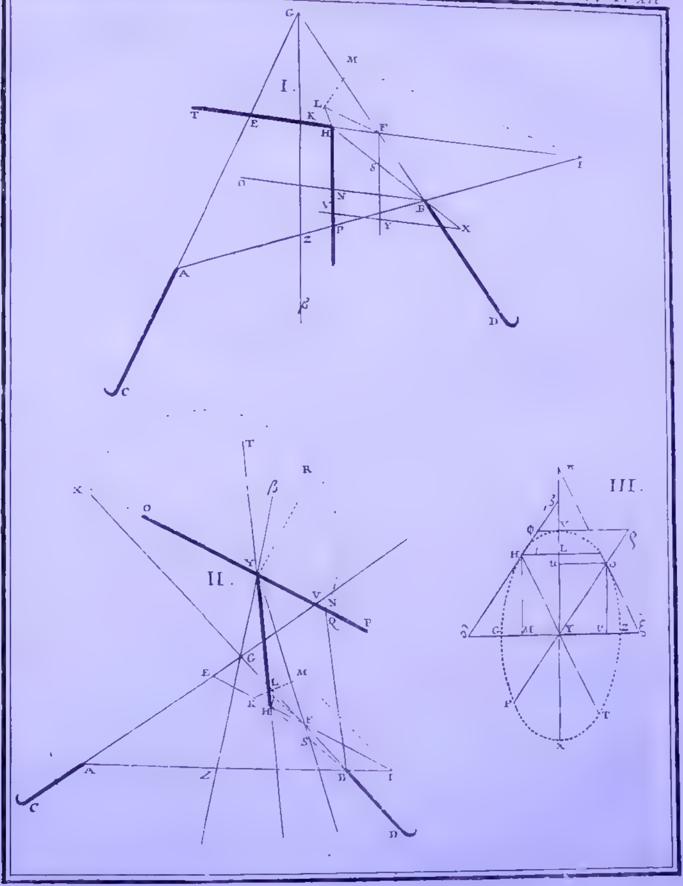

II.
G
F
M
N
P
K
H
E
M
L
B
C
O
A
I
C
D
III.
G
P
N
K
M
E
H
L
F
B
O
A
C

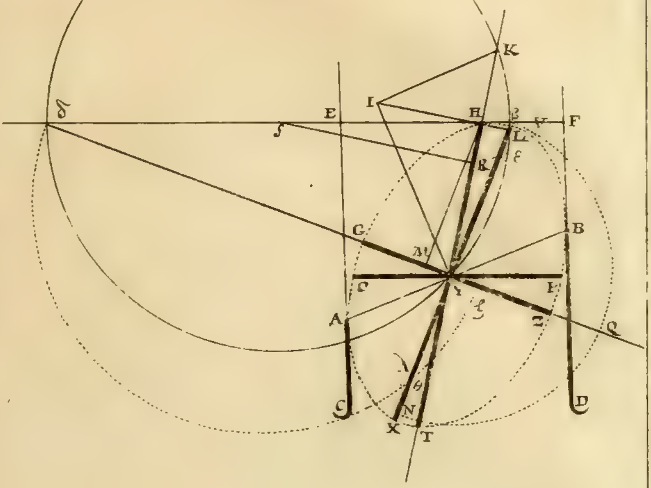

I.
II.
III.
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N
O
P


II.
III.
V.

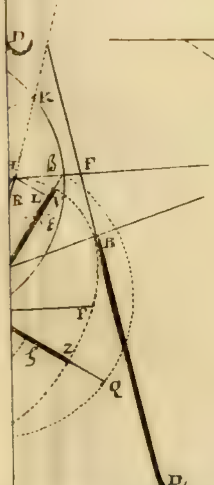

I
II.
III.
IV.
V.

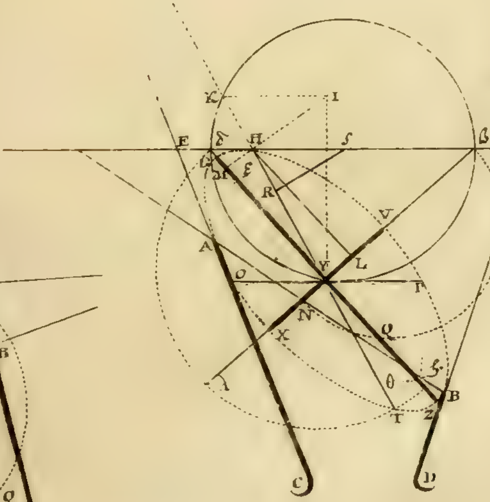

I.
G
M
L
K
E
H
F
S
I
O
N
V
B
X
Y
P
Z
β
D
II.
T
R
β
Y
V
N
Q
P
G
E
M
L
K
H
F
S
Z
B
I
D
III.
β
V
ϕ
L
H
μ
O
G
M
Y
Z
P
T
X


I.
II.
III.

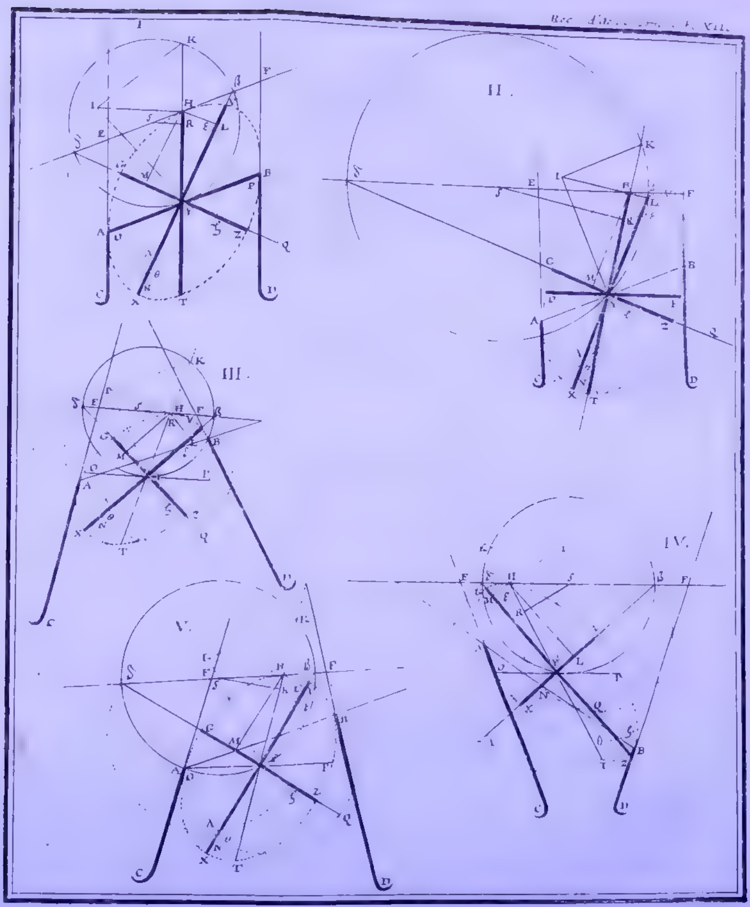


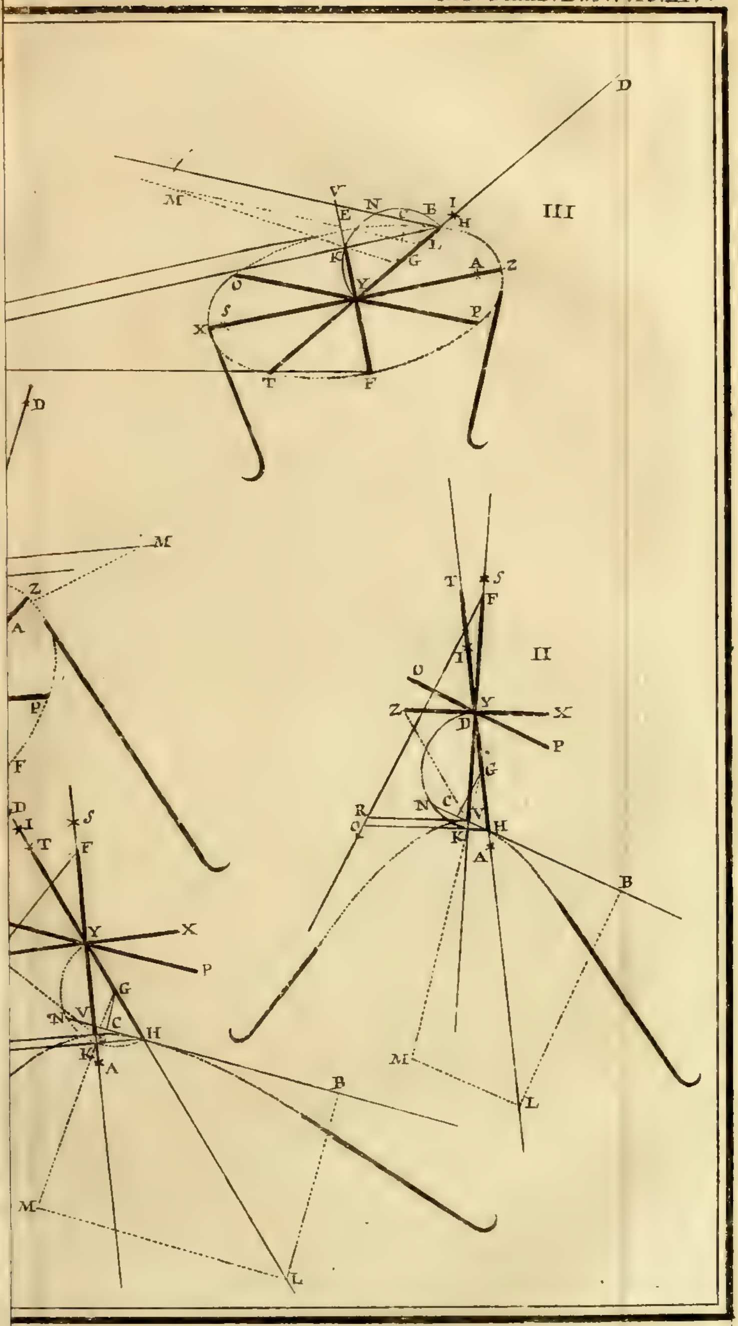
II.

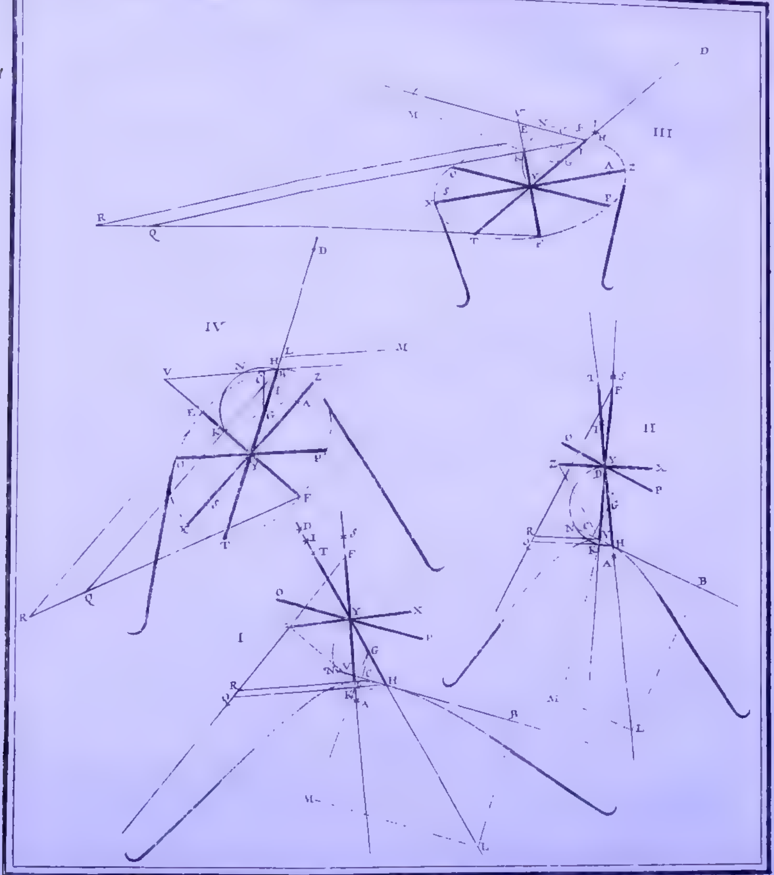


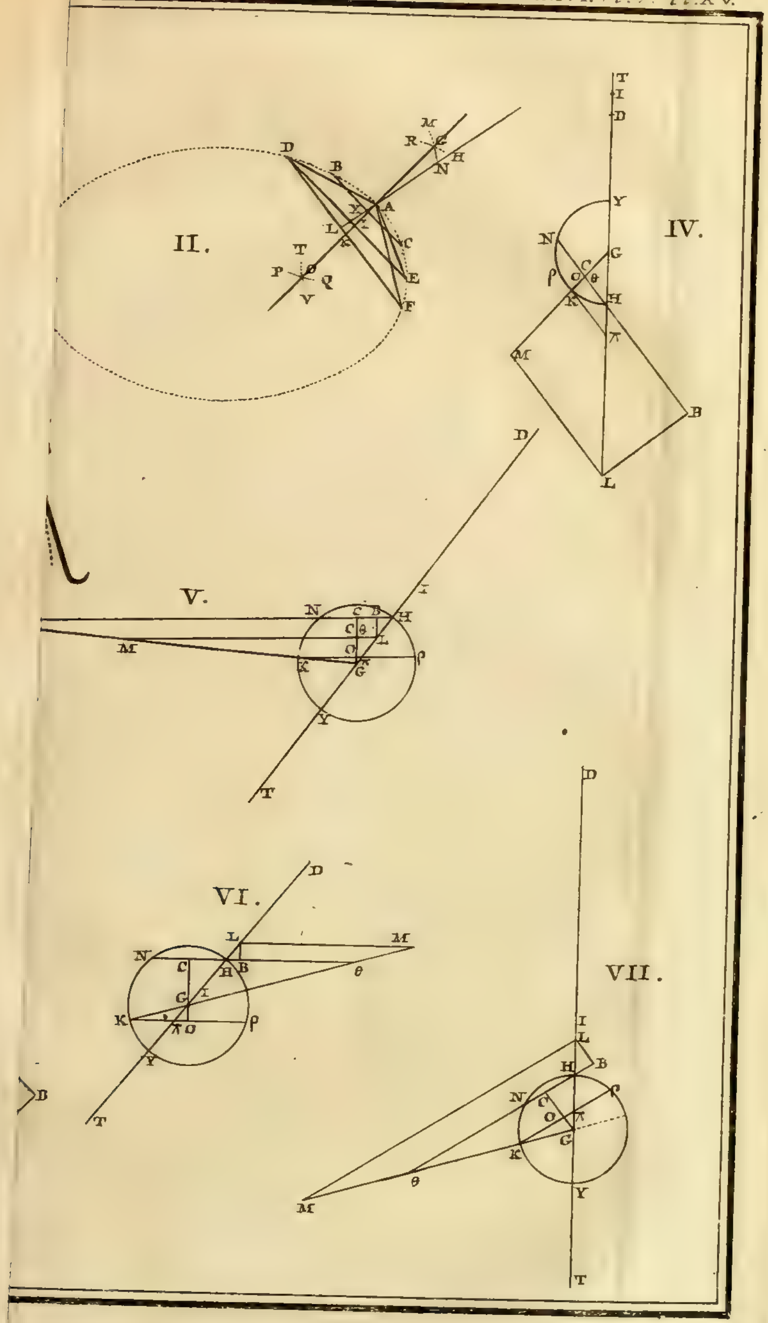


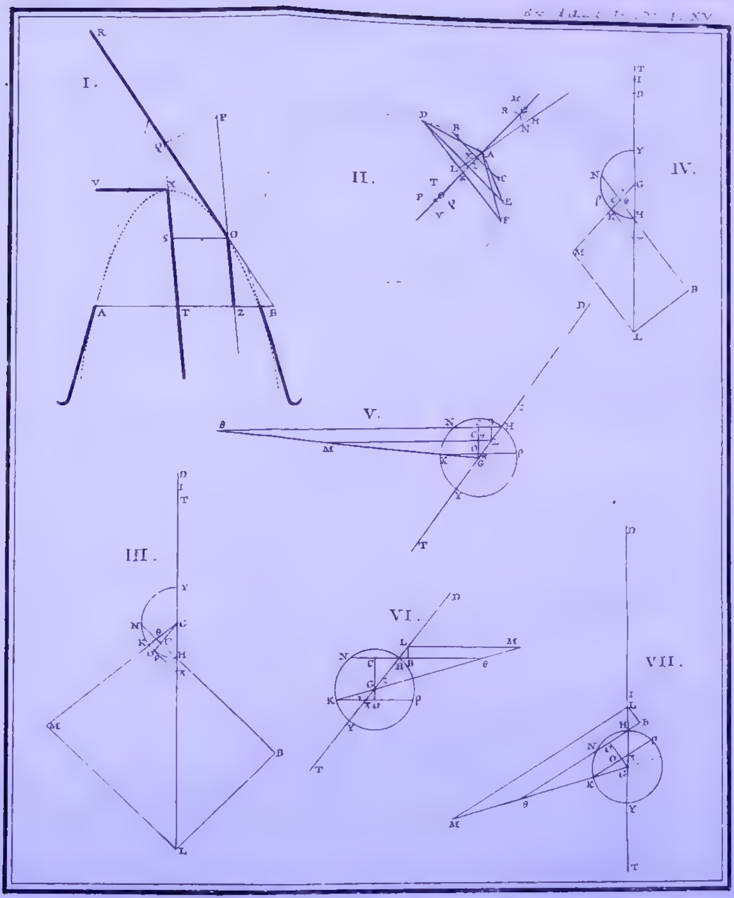
IV.

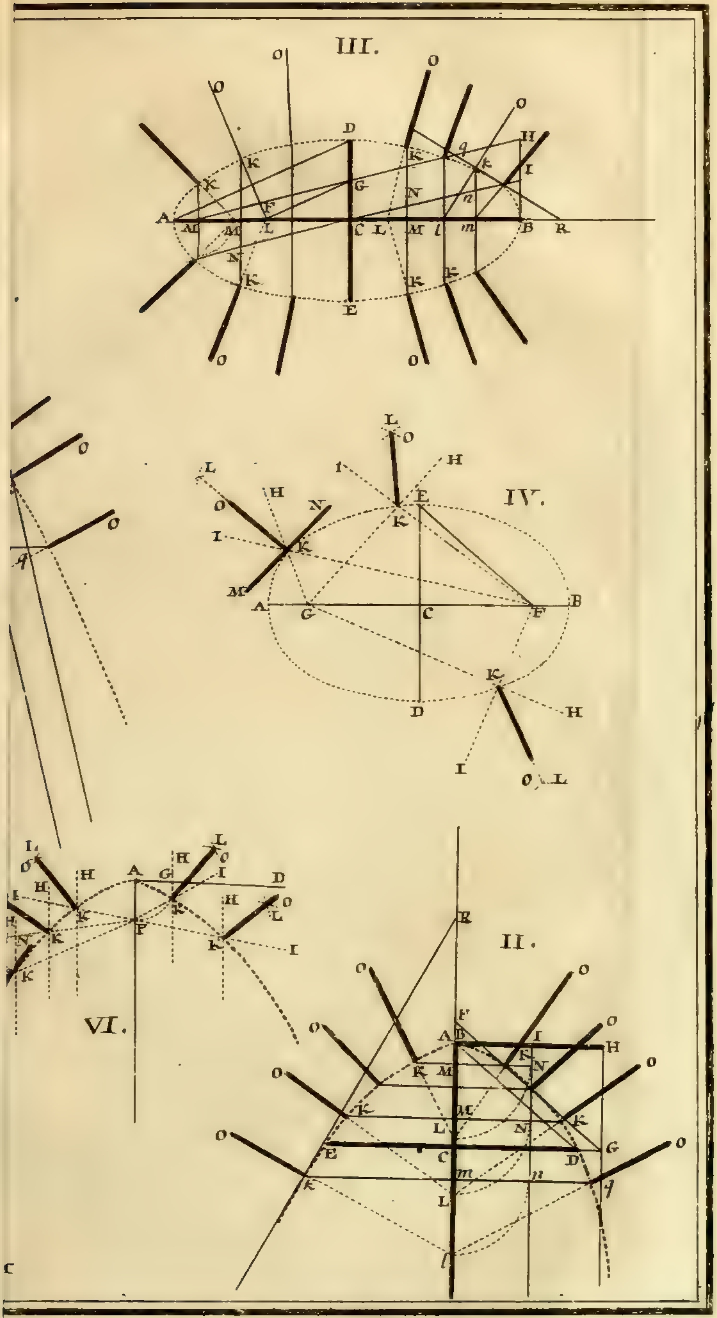

I
II.
III.
IV.
V.

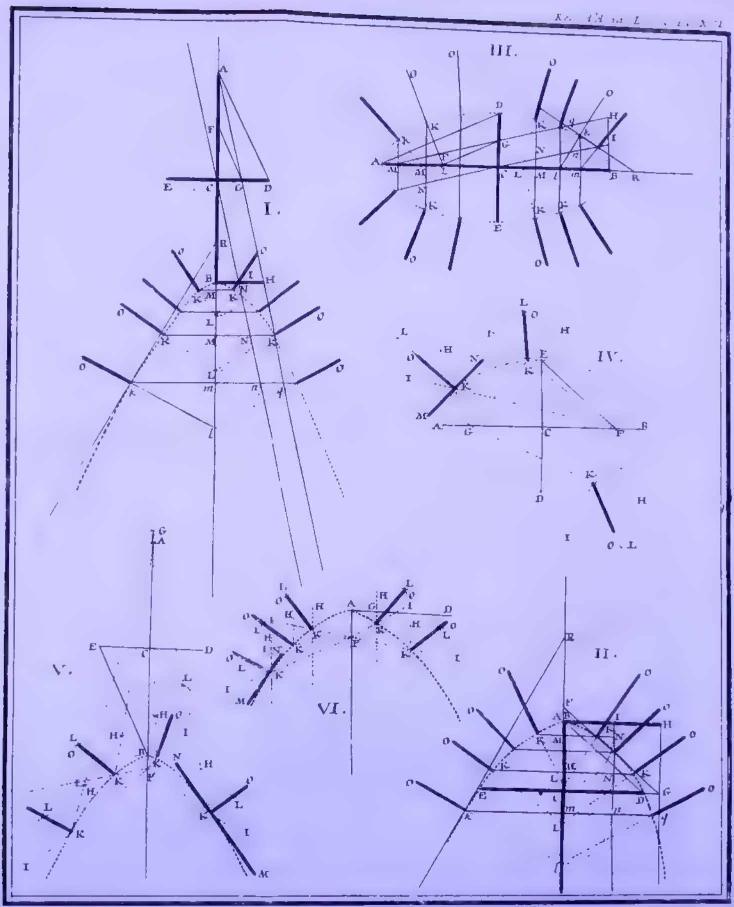

III
II

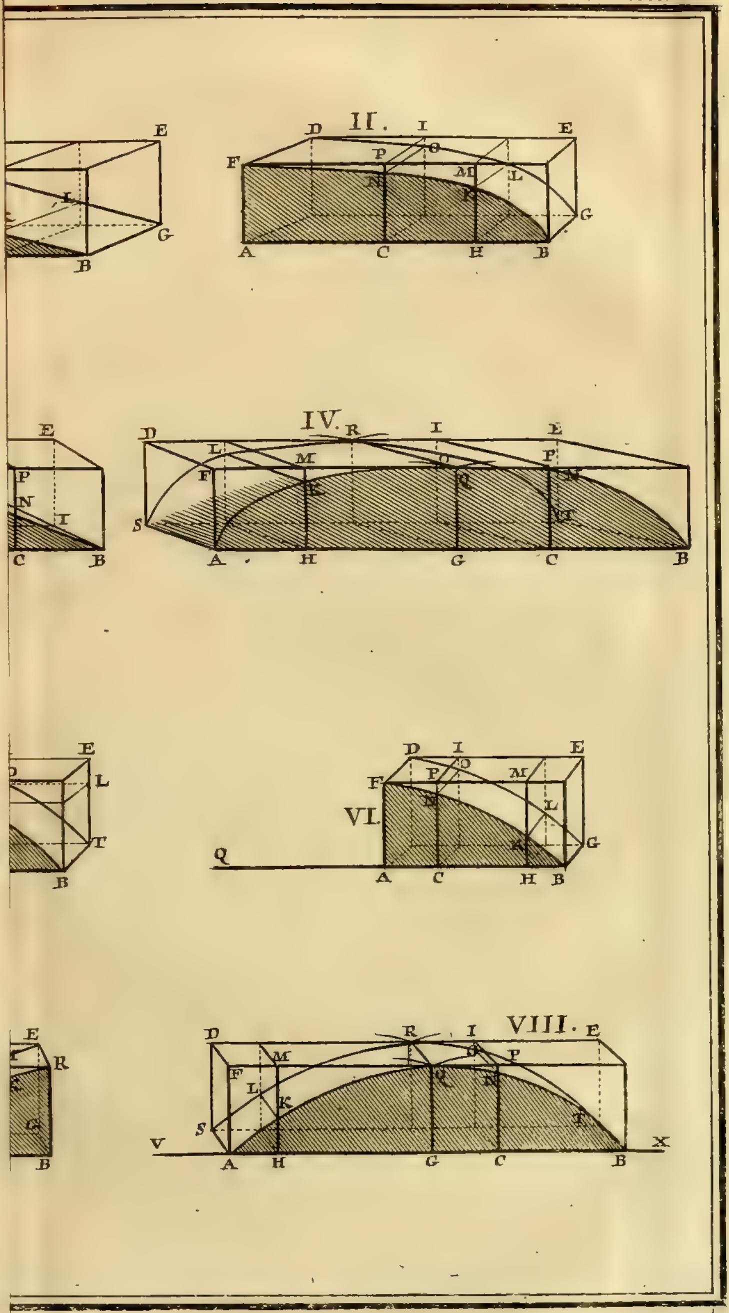

III
IV
II
I

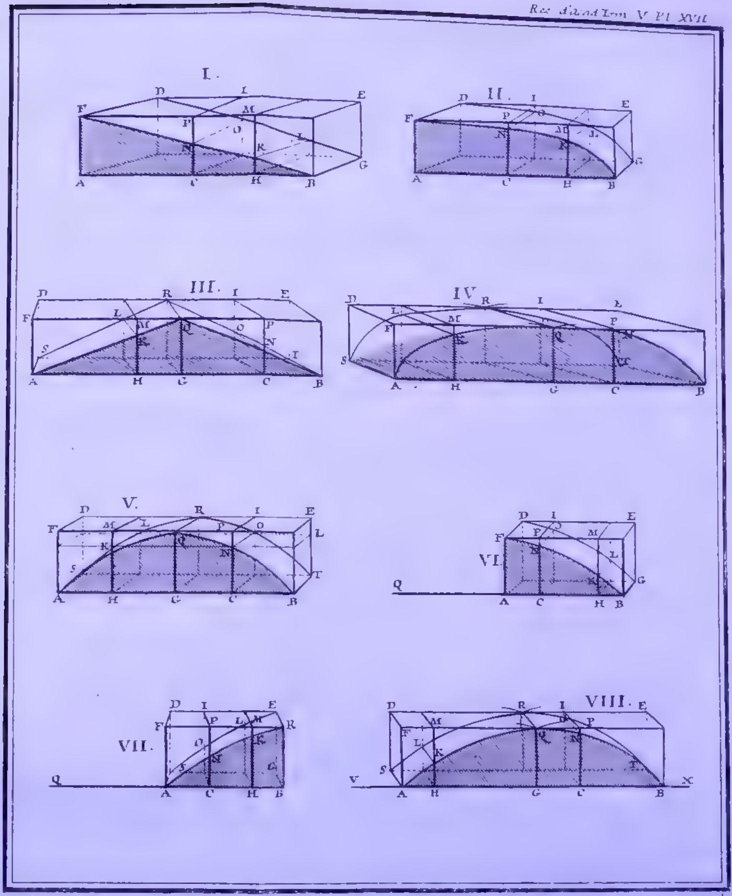

II.
IV.
V.
VI.
VII.

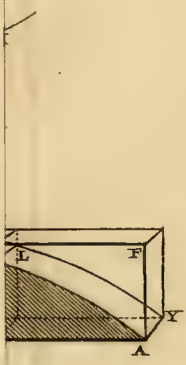

I.
II.
III.
IV.
V.
VI.
VII.


III.
IV.
VI.
II.

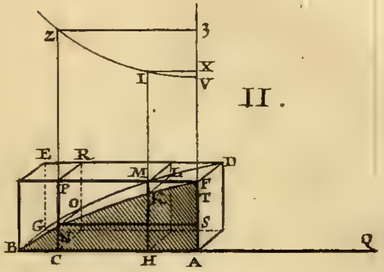

I.
II.
III.
IV.
V.
VI.


II.
IV.
VI.
VIII.


I.
II.
III.
IV.
V.
VI.
VII.
VIII.

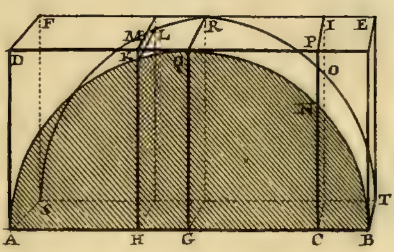

L
F
Y
A

II.

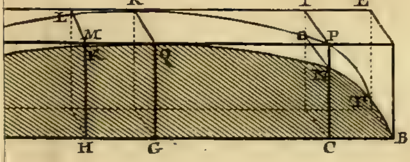

Z
3
X
I
V
E
R
M
L
D
P
F
O
K
T
G
S
N
B
C
H
A
Q

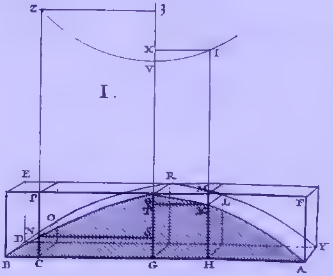
Q

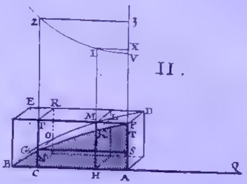
IV.

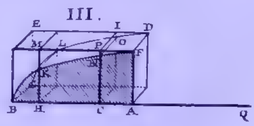

F
M
L
R
I
E
D
K
Q
P
O
N
S
T
A
H
G
C
B

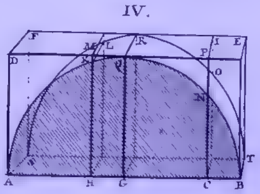
V.

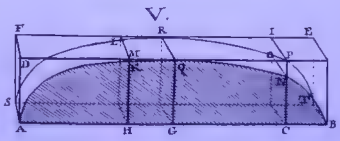

R
I
E
L
M
P
K
Q
N
T
H
G
C
B

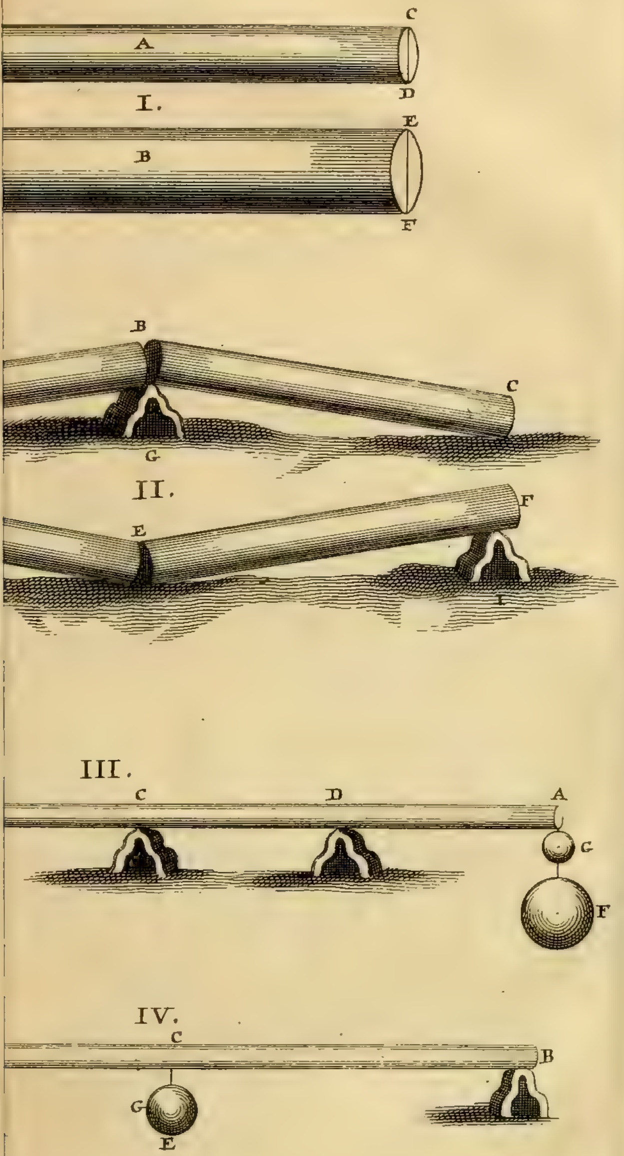

I.

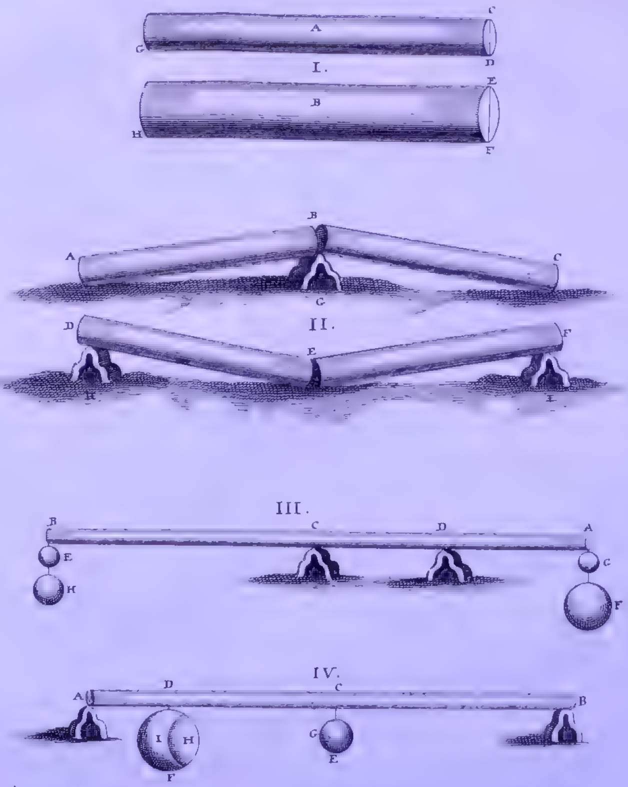

II.


III.

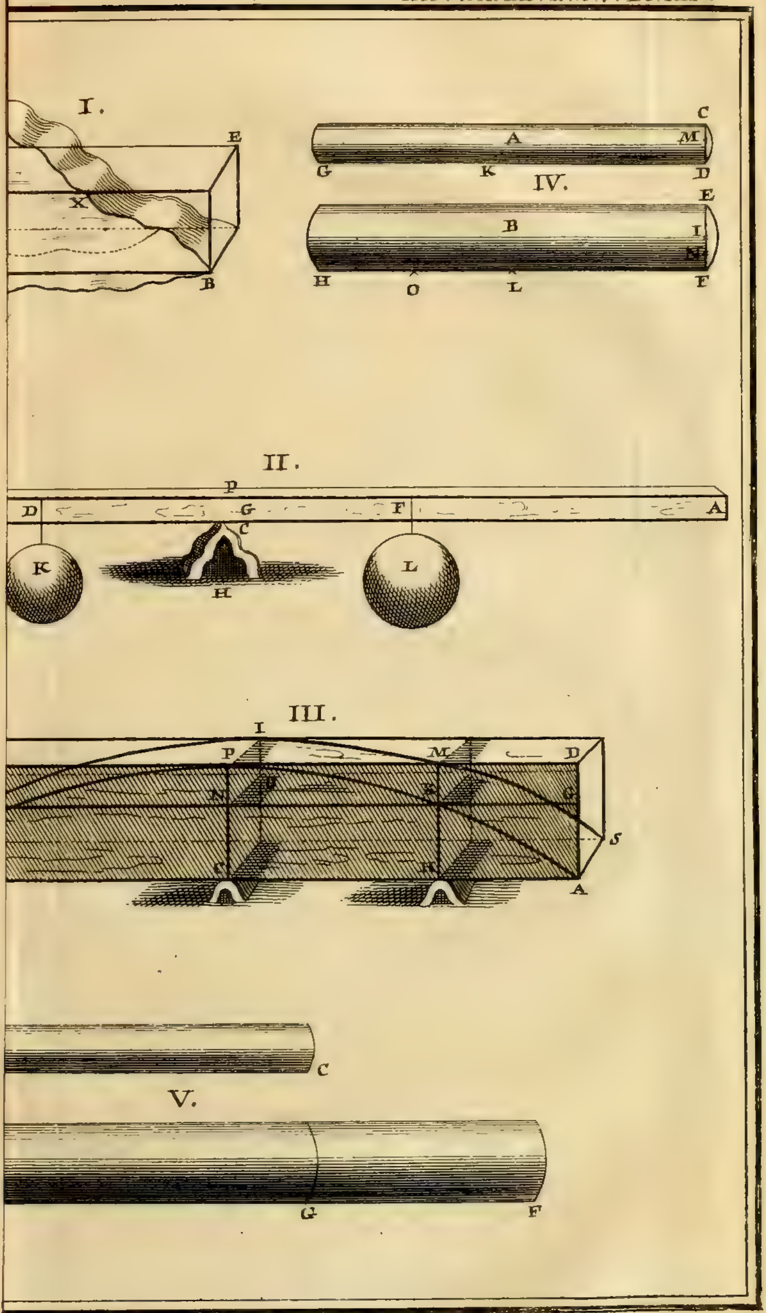

IV.

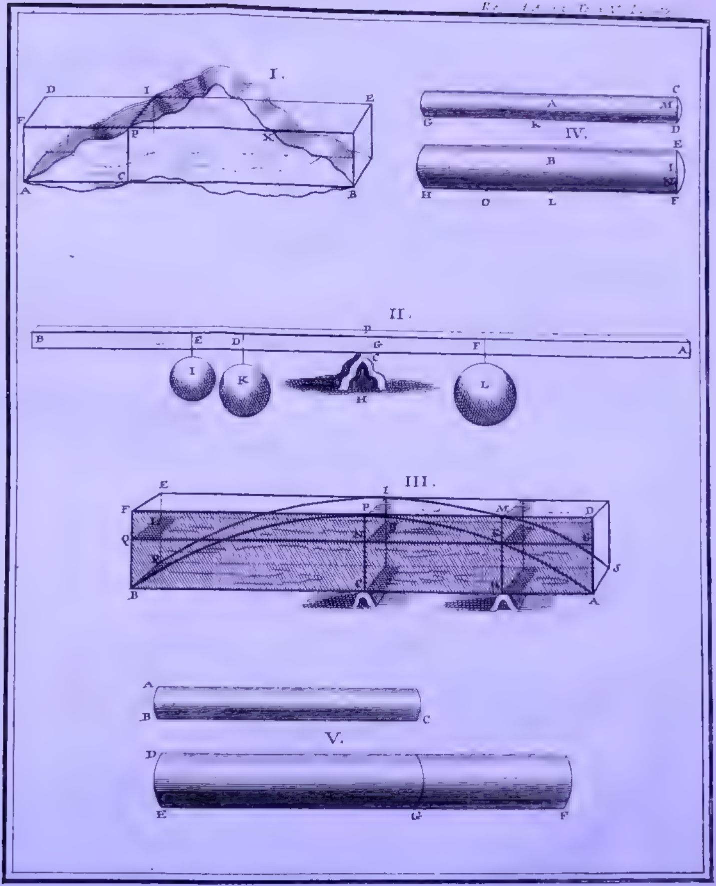

V.


C
A
D
I.
E
B
F
B
C
G
II.
F
E
III.
C
D
A
G
F
IV.
C
B
G
E

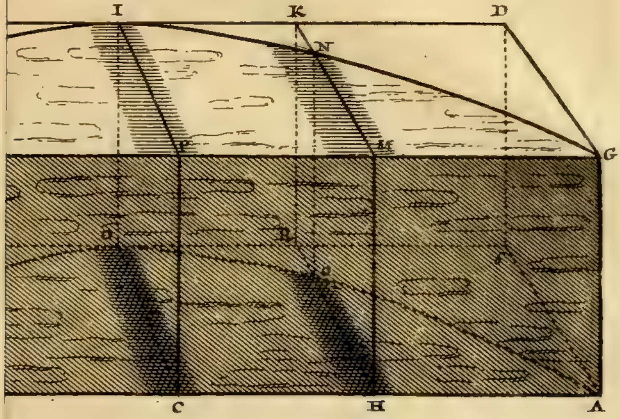


I.
II.
III.
IV.

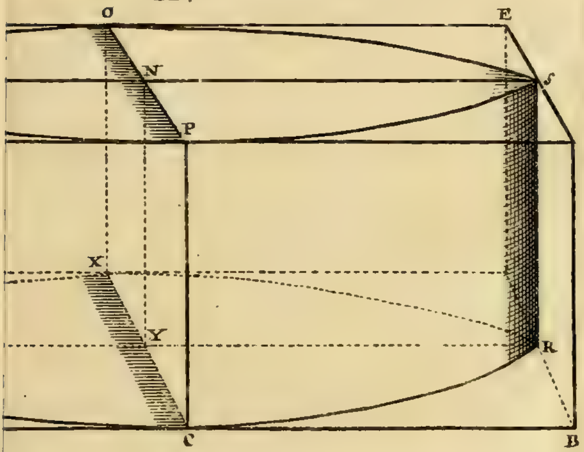

I.
E
X
B
C
A
M
G
K
D
IV.
E
B
I
N
H
O
L
F
II.
P
D
G
F
A
C
K
H
L
III.
I
P
M
D
N
R
G
S
A
C
V.
G
F


I.
II.
III.
IV.
V.

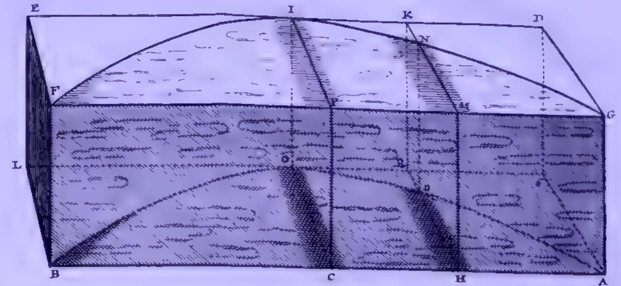
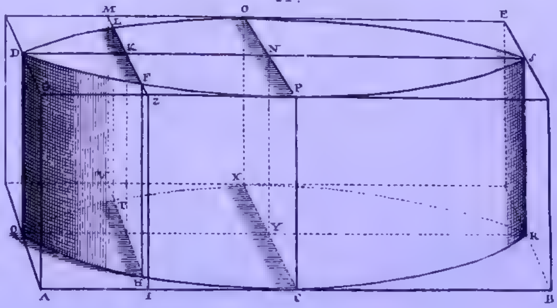
I.



II.



I.



II.